

Уравнения с двумя переменными и их графики

Как пара чисел превращается в точку на плоскости?



Почему это важно в математике и жизни

Такие уравнения описывают связи между величинами: ценой и количеством, временем и расстоянием, размерами фигур. Эта тема учит видеть не только ответ, но и все возможные решения, а также готовит к системам уравнений и графикам функций.



Что такое уравнение с двумя переменными

Две неизвестные

В таком уравнении есть две переменные, например x и y , которые связаны одним равенством. Оно задаёт условие, которое должны выполнить оба числа одновременно.

Пара как ответ

Решением считают не одно число, а пару значений $(x; y)$. Если после подстановки равенство становится верным, такая пара подходит и является решением.

Много вариантов

Одно уравнение с двумя переменными обычно имеет не один, а множество решений. Иногда их можно перечислять, но чаще удобнее рассматривать все сразу на графике.

Примеры записи

Запись $x + y = 5$ или $2x - y = 3$ показывает, какие действия связаны с переменными. Вид уравнения подсказывает, как искать подходящие пары чисел.



Пара чисел как решение уравнения

Координаты точки

Каждая пара $(x; y)$ соответствует точке на координатной плоскости. Сначала откладывают значение x , затем значение y , и точка занимает своё место.

Одна пара — одна точка

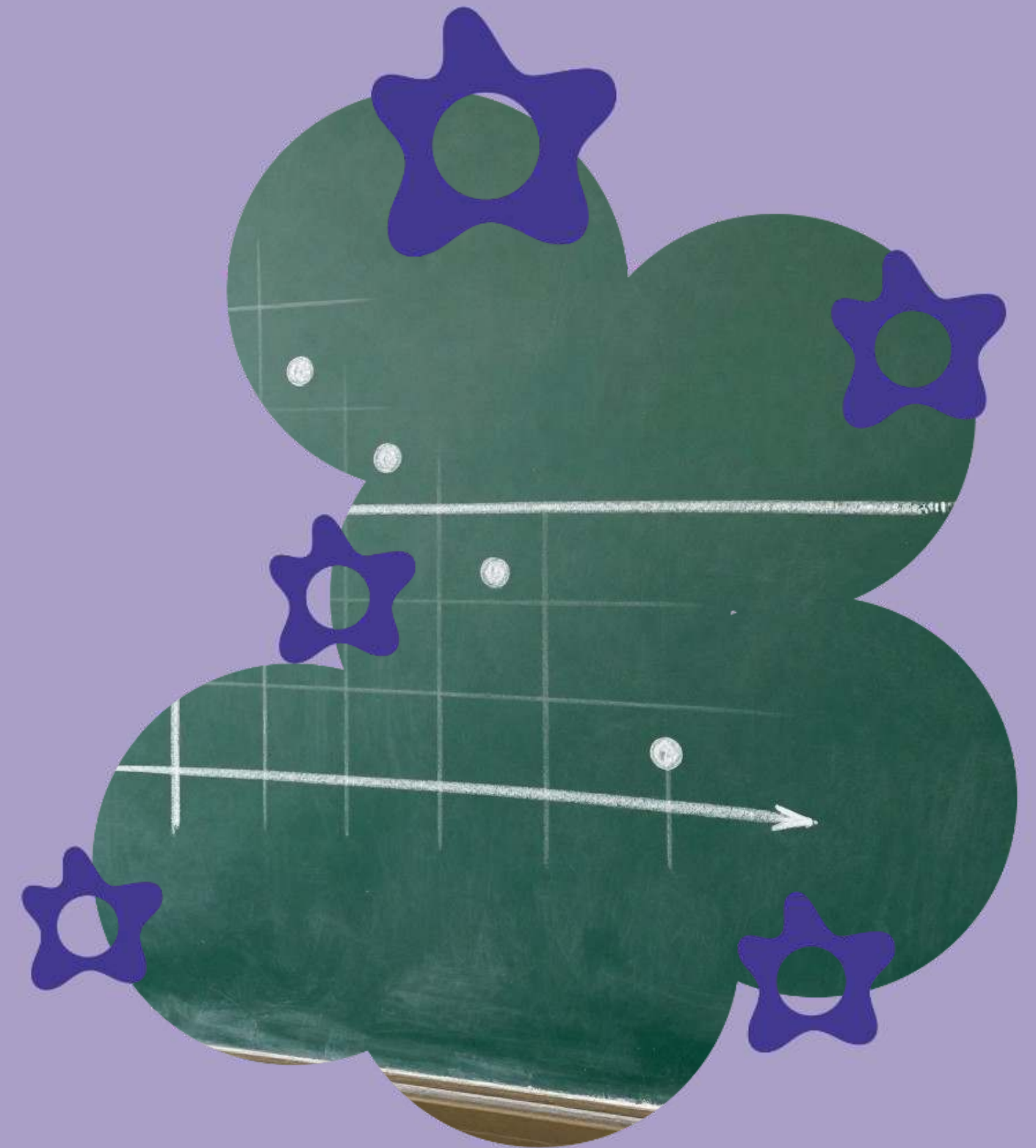
Если выбрать одну подходящую пару, на плоскости появится одна точка. Но все решения вместе образуют уже не отдельные точки, а целый график.

Подходящие пары

Для уравнения $x + y = 5$ подходят, например, пары $(0; 5)$, $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ и $(5; 0)$. Все они дают верное равенство.

Что важно заметить

Порядок записи координат менять нельзя: сначала x , потом y . Из-за этого пары $(1; 4)$ и $(4; 1)$ дают разные точки и могут иметь разный смысл.



Примеры уравнений и проверка решений

В таблице показано, как подстановка чисел помогает проверить пару значений и увидеть, выполняется ли равенство.

Во всех строках подходящая пара делает равенство верным, поэтому решение подтверждается вычислением.

Примеры составлены по школьным уравнениям с двумя переменными.

Уравнение	Пара	Проверка
$x+y=5$	(1; 4)	$1+4=5$
$2x+y=7$	(2; 3)	$4+3=7$
$x-y=1$	(4; 3)	$4-3=1$

Что показывает график уравнения

1

Все решения сразу

График уравнения с двумя переменными состоит из всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству. Он показывает не один ответ, а целое множество подходящих пар чисел.

2

Связь с плоскостью

Каждая точка на графике соответствует одной верной паре $(x; y)$. Если точка лежит на линии графика, её координаты являются решением уравнения.

3

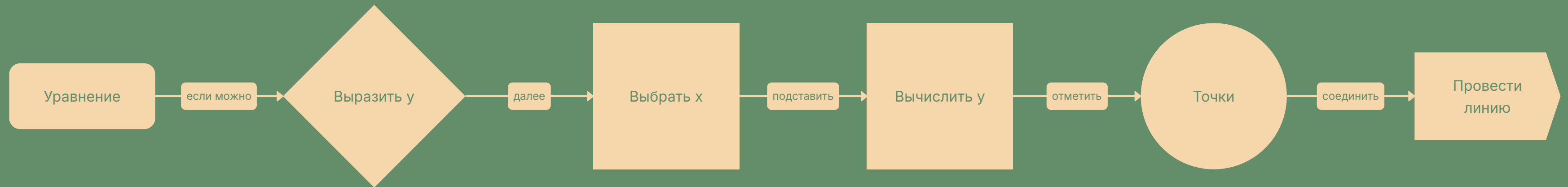
Пример с прямой

Для уравнения $x + y = 5$ график образует прямую линию. Любая точка этой прямой даёт верную проверку, а точки вне линии не подходят.



Как построить график уравнения

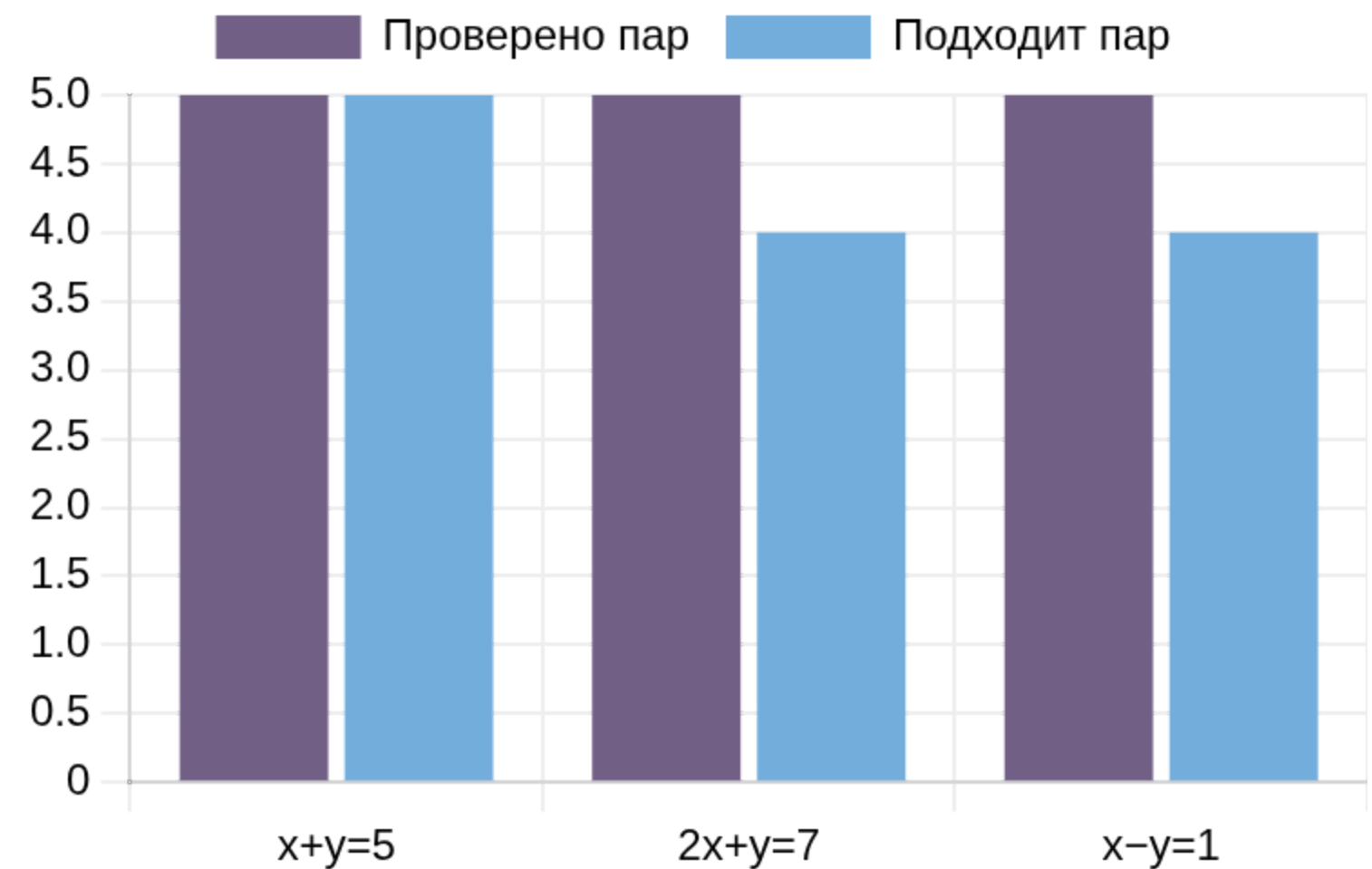
Последовательность действий при построении по нескольким значениям x



Сколько решений находят при проверке разных пар

Для каждого уравнения проверяют несколько пар чисел, но совпадают не все. Даже простые равенства могут иметь много подходящих решений.

Одно уравнение может принимать несколько пар-решений, однако проверка сразу отсеивает неподходящие варианты.



Учебные примеры для уравнений $x+y=5$, $2x+y=7$ и $x-y=1$.

Линейное уравнение с двумя переменными

1

Общий вид

Линейное уравнение можно записать как $ax + by = c$. В нём переменные входят только в первой степени, без квадратов и других сложных выражений.

2

Запись через y

Если коэффициент при y не равен нулю, уравнение удобно преобразовать к виду $y = kx + b$. Такая запись сразу показывает зависимость y от x .

3

Примеры

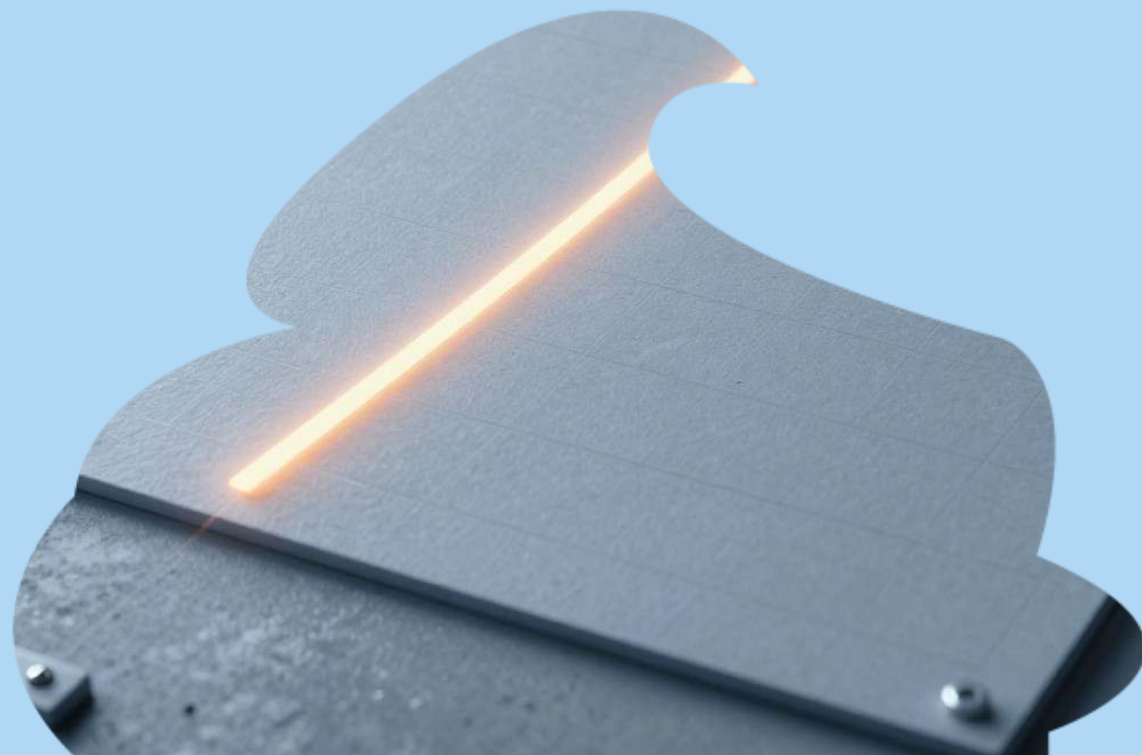
К линейным уравнениям относятся $y = 2x + 1$, $y = -x + 3$ и $3x + 2y = 6$. Все они задают прямые линии на плоскости.

4

Что означают буквы

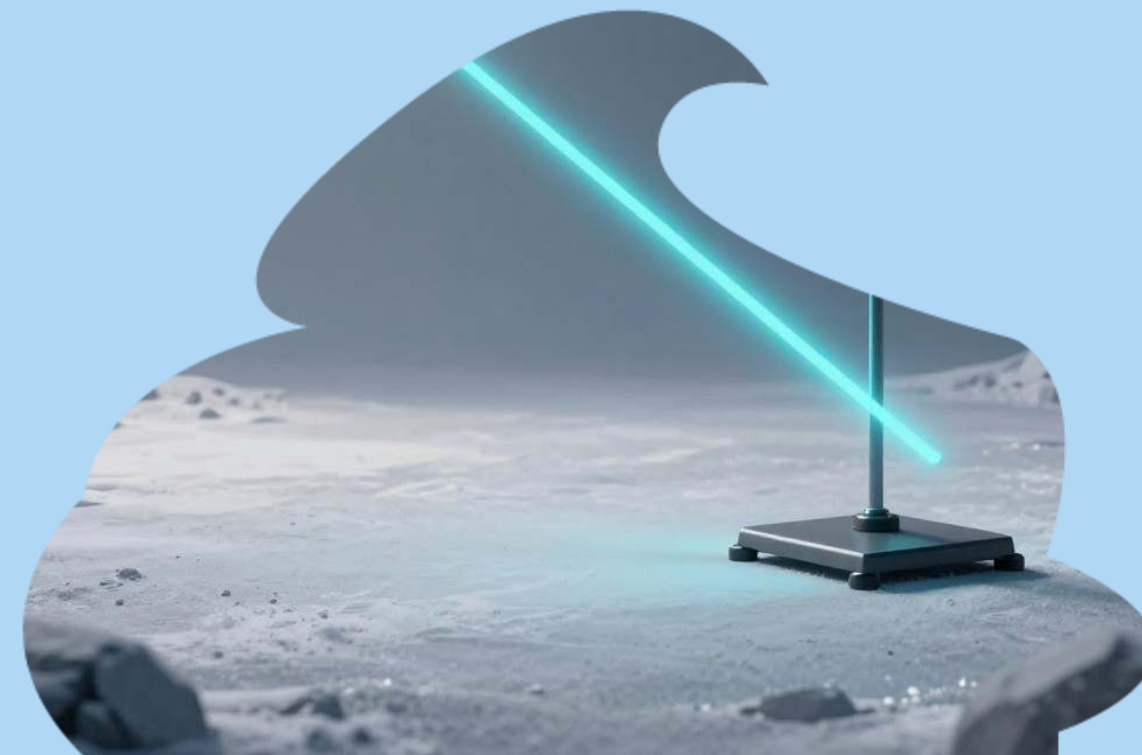
Буквы a , b , c , k — это числа, которые задают конкретное уравнение. Они меняют положение прямой и её наклон, но не сам тип зависимости.

Прямая на координатной плоскости



Когда линия идёт вверх

На графике уравнения $y = 2x + 1$ прямая поднимается слева направо. Каждое новое значение x даёт большее значение y , поэтому линия выглядит возрастающей. Она пересекает ось y в точке с координатой 1, и это удобно заметить сразу.



Когда линия идёт вниз

У уравнения $y = -x + 3$ прямая наклонена в другую сторону: слева она выше, а справа ниже. Отрицательный коэффициент k меняет направление наклона, но точка пересечения с осью y всё равно остаётся важной опорой для построения.

Коэффициенты k и b в уравнении $y = kx + b$



Таблица показывает, как коэффициенты влияют на вид линейного графика: k задаёт наклон прямой, а b — точку пересечения с осью y .



Чем больше модуль k , тем заметнее наклон прямой; коэффициент b сдвигает график вверх или вниз без изменения направления.



Примеры линейных уравнений из школьного курса алгебры

Уравнение	k	b	График
$y = 2x + 1$	2	1	возрастает
$y = -x + 3$	-1	3	убывает
$y = 4$	0	4	горизонтальная

Как проверить, является ли пара чисел решением

1

1. Подставьте значения

Замените переменные x и y числами из пары и аккуратно запишите полученное выражение. Важно не перепутать порядок координат и сохранить все знаки.

2

2. Выполните вычисления

Посчитайте левую часть уравнения по обычным правилам действий. Если в выражении есть скобки или дроби, сначала упростите запись, чтобы избежать лишних ошибок.

3

3. Сравните части

Сопоставьте полученный результат с правой частью уравнения. Если числа совпали, пара подходит; если нет, значит, она не является решением данного уравнения.

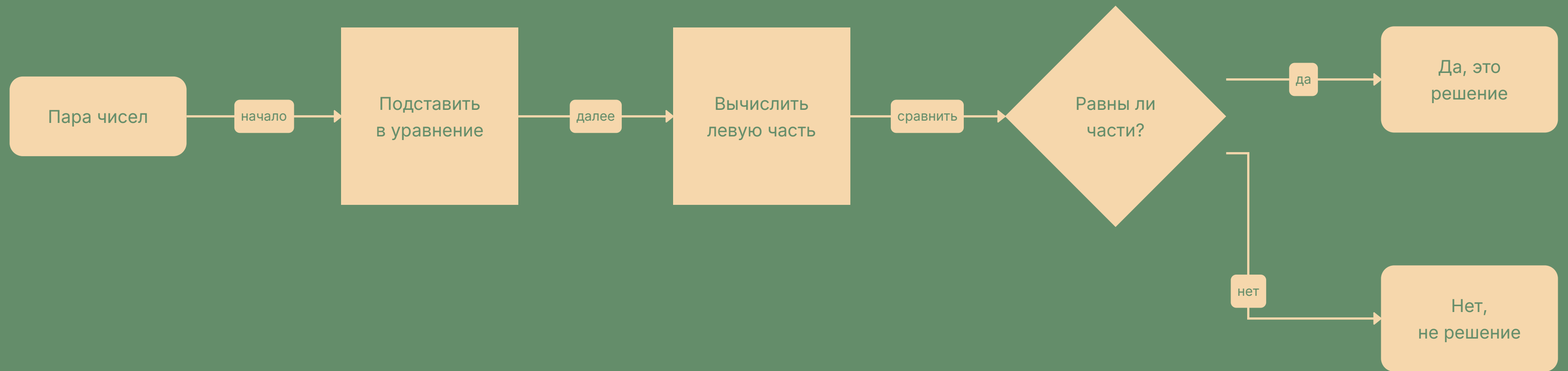
4

4. Сделайте вывод

Для уравнения $x + y = 5$ пара $(2; 3)$ подходит, потому что получается верное равенство, а пара $(1; 5)$ не подходит, так как равенство нарушается.

Алгоритм проверки пары чисел

Последовательность действий при подстановке значений в уравнение с двумя переменными

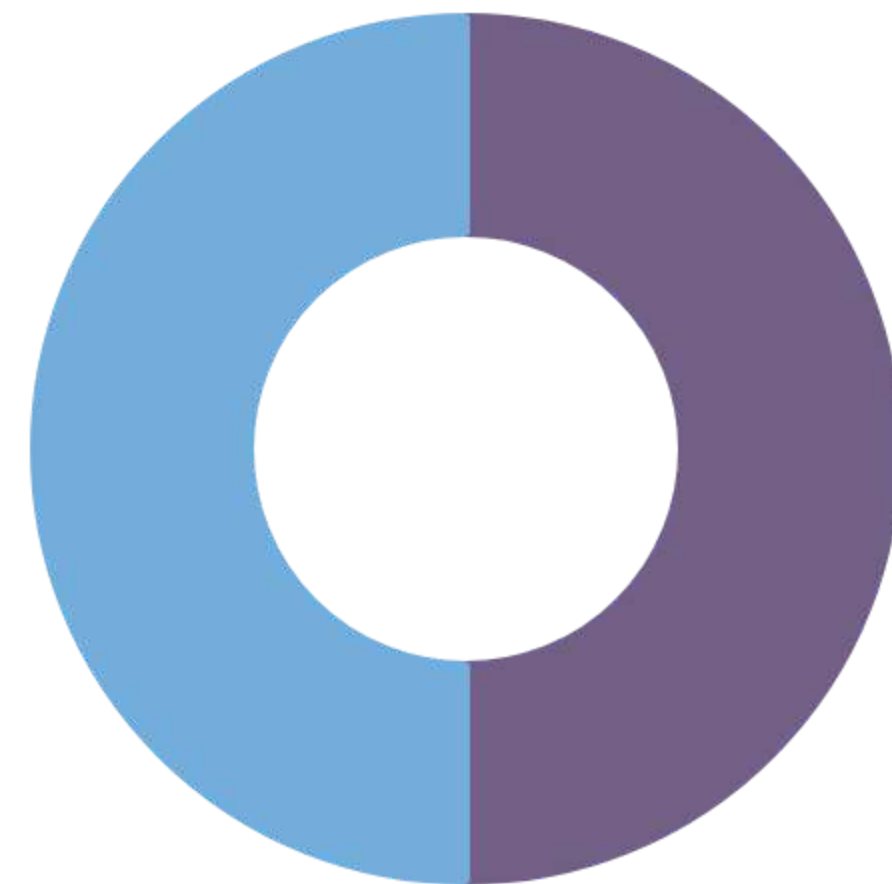


Точки, принадлежащие и не принадлежащие графику

Для уравнения $x + y = 5$ одинаковое число верных и неверных примеров помогает быстро увидеть, что на графике лежат только решения.

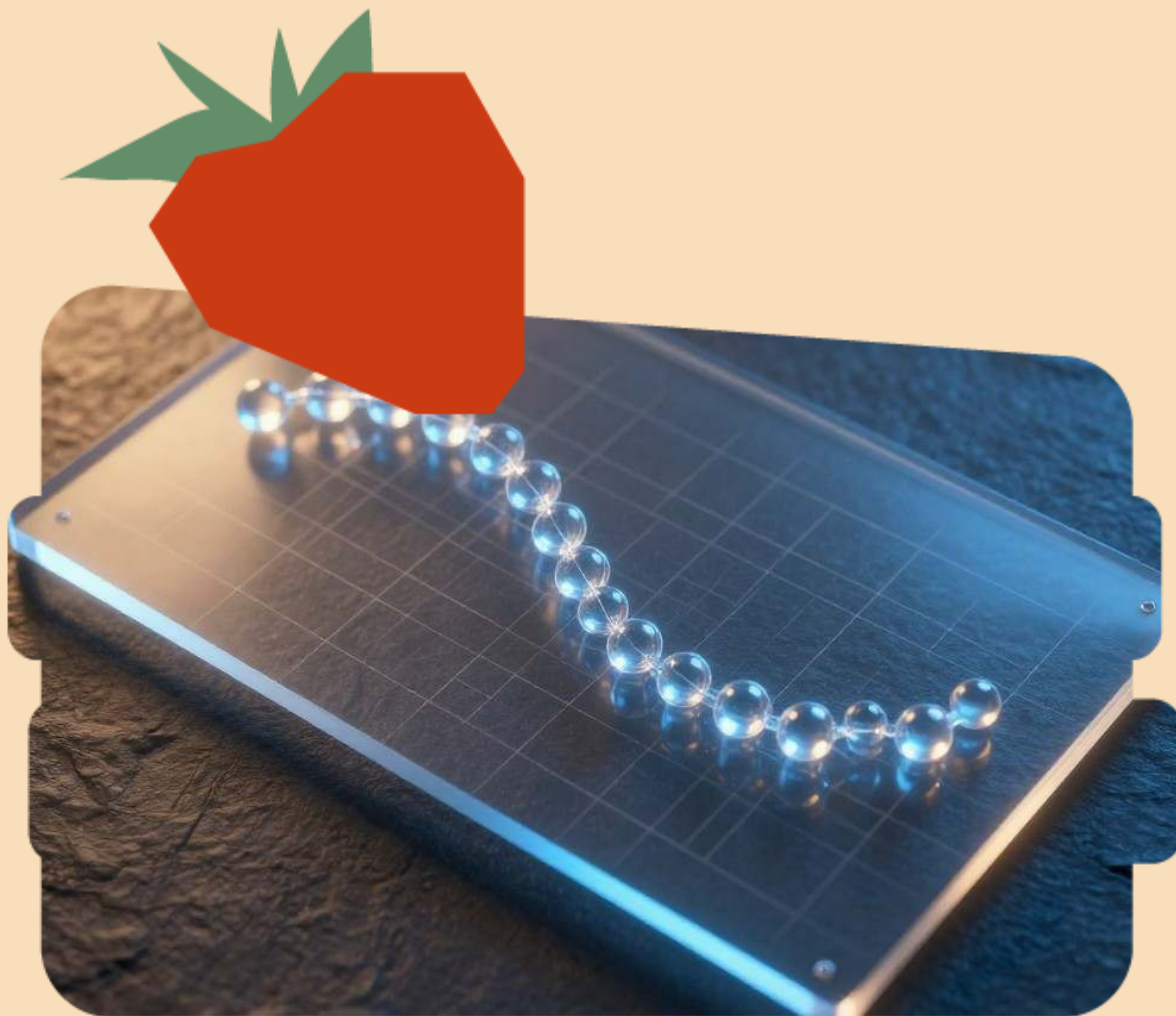
Принадлежность точки графику полностью определяется выполнением уравнения; одинаковое количество примеров подчёркивает, что проверка нужна для каждой пары отдельно.

■ Принадлежат ■ Не принадлежат



Составлено по уравнению $x + y = 5$ и приведённым примерам

Почему график помогает понять уравнение



Точки складываются в линию

На координатной плоскости каждая верная пара чисел превращается в точку. Когда таких точек несколько, они выстраиваются в линию или другую фигуру, и по ней легче заметить общую зависимость между x и y .

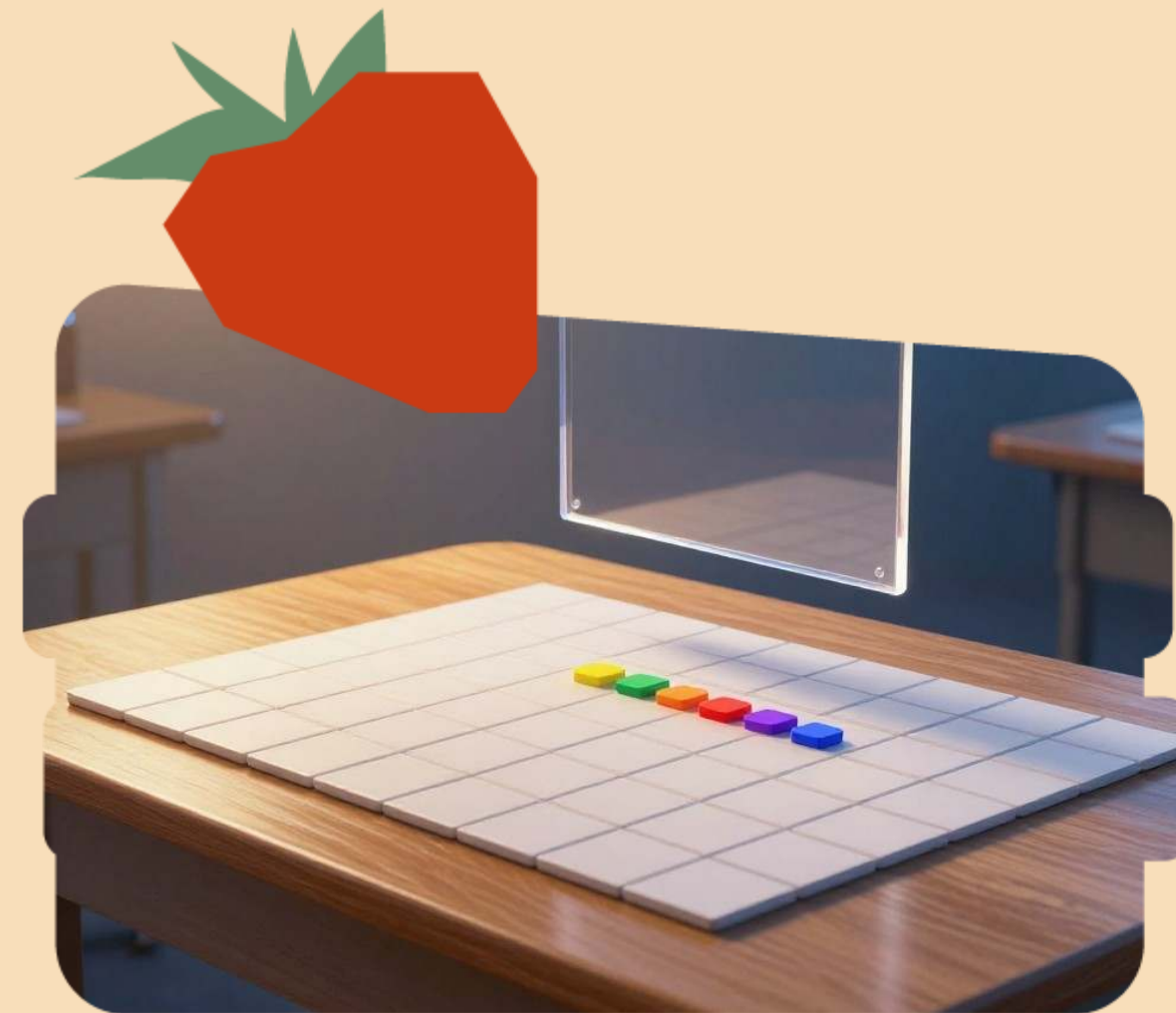


Таблица превращается в образ

Сначала можно составить таблицу значений, а потом нанести точки на график. Тогда сухие вычисления становятся наглядными: видно, как изменяется значение y при увеличении x и почему все решения связаны между собой.

Уравнения с двумя переменными в задачах



Движение

По скорости, времени и расстоянию удобно составлять уравнения, когда известны две величины, а третью нужно найти. Такие задачи учат связывать формулу с реальной ситуацией.



Покупки

Цена, количество и общая стоимость часто образуют уравнение с двумя переменными. Если один показатель известен не полностью, можно выразить второй и проверить разные варианты.



Геометрия

Длина и ширина прямоугольника, периметр и площадь нередко задаются через два неизвестных. Это помогает переводить чертёж в алгебраическую запись и обратно.

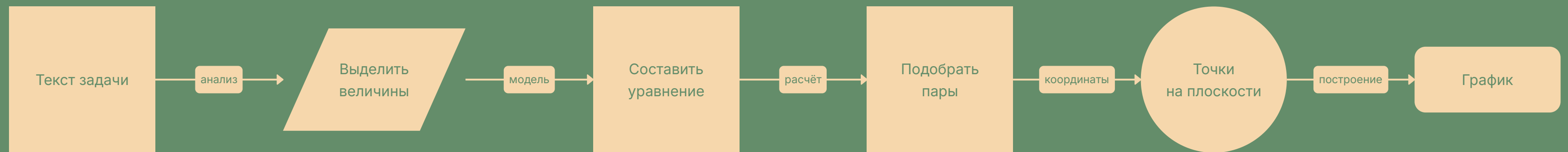


Сравнение величин

Если сумма двух чисел известна, а разность тоже задана, удобно составить систему. Так находят общую пару решений, которая подходит сразу обоим условиям.

От текстовой задачи к графику

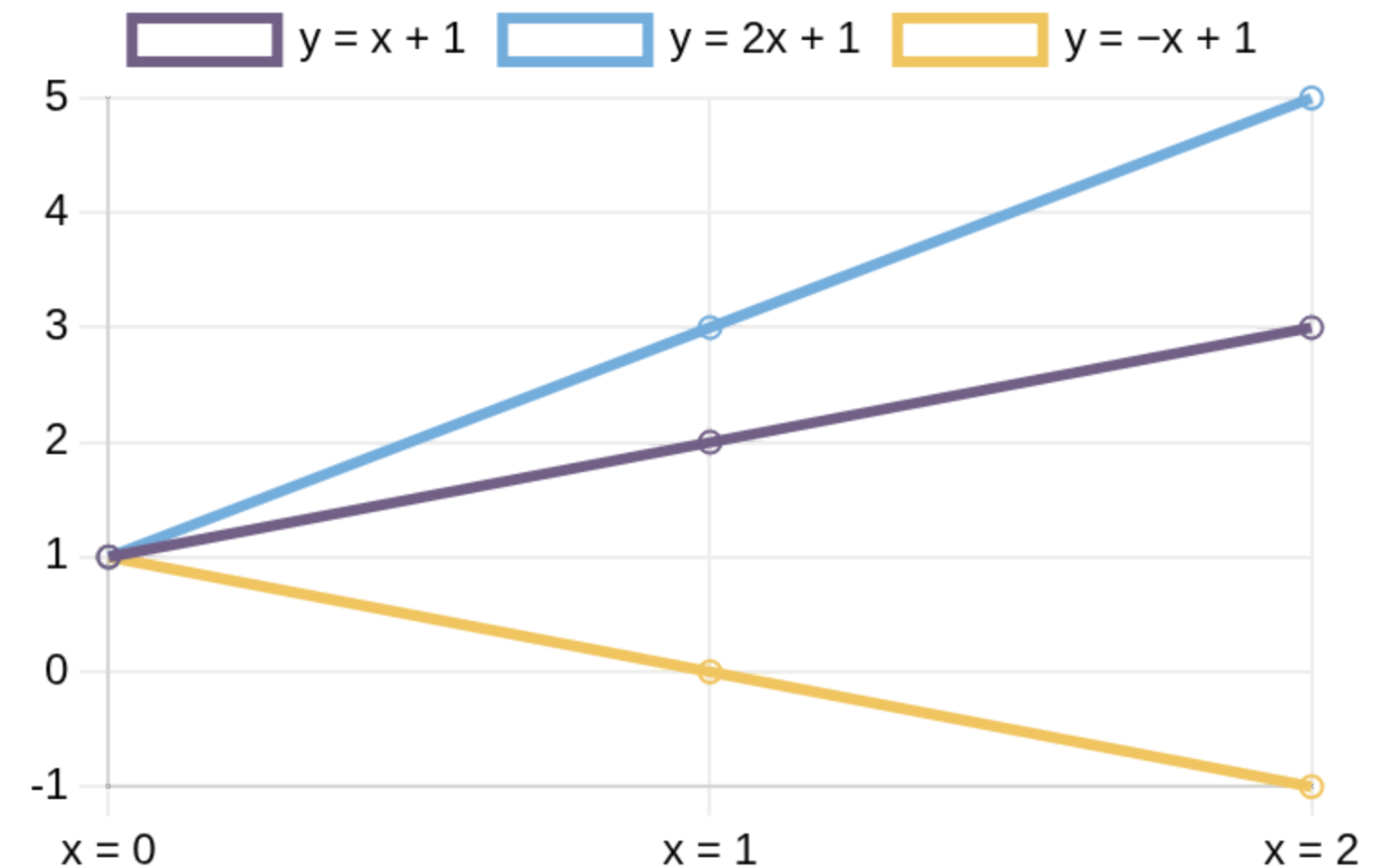
Путь от словесного условия к координатной плоскости и изображению решения



Как меняется график при изменении коэффициента

Во всех трёх уравнениях прямая проходит через одну и ту же точку на оси y , но её наклон меняется вместе с коэффициентом k .

Положительный k делает график возрастающим, большее значение — более крутым; отрицательный k меняет направление наклона, не изменяя точку пересечения с осью y .



Составлено по уравнениям $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = -x + 1$

Краткие правила и типичные ошибки

Таблица помогает запомнить, как правильно работать с уравнениями и чего избегать при проверке пар чисел и построении графика.

Большинство ошибок связано не со сложностью вычислений, а с невнимательностью: порядок координат, знаки и полная проверка равенства обязательны.

Правила работы с уравнениями с двумя переменными в школьном курсе

Правило	Ошибка	Чем опасна
Проверять обе части	Считать только одну	Ответ становится неверным
Писать (x; y)	Путать порядок	Точка ставится не туда
Следить за знаками	Ошибка в знаке	Меняется решение

Что важно запомнить

Уравнение с двумя переменными задаёт множество решений в виде пар чисел. Каждая пара соответствует точке на плоскости, а график помогает увидеть все решения и понять поведение линейного уравнения.

