

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°

Разберём тригонометрию
на координатной окружности
и особые углы.



> Зачем нужна тригонометрия в 9 классе

Тригонометрические функции связывают угол с координатами, длинами и расстояниями. Они помогают решать задачи по геометрии, а также нужны в физике, навигации и компьютерной графике.



> Координатная окружность и смысл синуса с косинусом

Единичная окружность

Это окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Именно на ней удобно отслеживать, как меняются

Как отсчитывают угол

Угол α откладывают от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Так одна и та же точка на окружности

Что показывают координаты

Для точки на окружности верна запись $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Значит, косинус задаёт абсциссу, а синус — ординату точки

тригонометрические функции при изменении угла.

получает строго определённое значение угла.

на координатной плоскости.

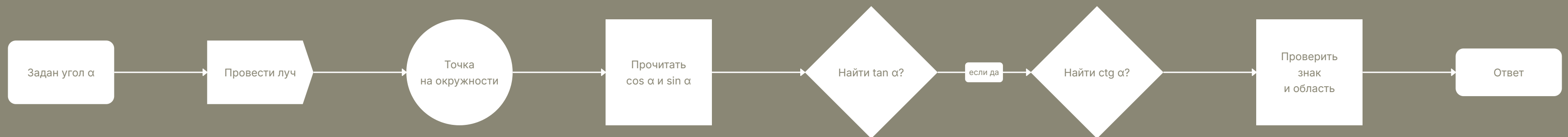
Почему синус не отрицателен сверху

На верхней полуокружности точки расположены выше оси Ox , поэтому их ордината не может быть меньше нуля. Следовательно, $\sin \alpha$ здесь всегда неотрицателен.



> Как находят тригонометрическую функцию угла

Путь от заданного угла к значению функции на координатной окружности.



> Значения функций для особых углов

Угол	Значения
0°	$\sin 0$; $\cos 1$; $\tan 0$; $\operatorname{ctg} \text{—}$
30°	$\sin \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\operatorname{ctg} \sqrt{3}$
45°	$\sin \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 1$; $\operatorname{ctg} 1$
60°	$\sin \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{1}{2}$; $\tan \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	$\sin 1$; $\cos 0$; $\tan \text{—}$; $\operatorname{ctg} 0$
180°	$\sin 0$; $\cos -1$; $\tan 0$; $\operatorname{ctg} \text{—}$

Таблица помогает быстро вспомнить значения для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90° и 180°.

Особые углы дают опорные значения, по которым удобно находить остальные случаи на полуокружности.

Таблица значений тригонометрических функций школьного курса

> Как изменяется синус на отрезке от 0° до 180°

Значения синуса удобно читать по точкам на верхней полуокружности: они симметричны относительно 90° .

Синус возрастает до 90° , затем убывает, но на всём промежутке остаётся неотрицательным.

Координатная окружность; школьные значения для 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 150° , 180°

> Как изменяется косинус на отрезке от 0° до 180°

Косинус показывает, как горизонтальная координата точки постепенно меняется при движении по полуокружности.

После 90° косинус становится отрицательным, поэтому его график непрерывно убывает от 1 до -1.

Координатная окружность; школьные значения для 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 150° , 180°

> Знаки функций в I и II четвертях



I четверть

При углах от 0° до 90° обе координаты точки положительны. Поэтому $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ положительны, а $\tan \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ тоже положительны, если они определены.



II четверть

При углах от 90° до 180° точка остаётся выше оси Ox , поэтому $\sin \alpha$ положителен. Но абсцисса отрицательна, значит $\cos \alpha$ отрицателен.



Поворот через 90°

На границе четвертей синус равен 1, а косинус обращается в 0. Из-за нуля в знаменателе $\tan 90^\circ$ не определён, а $\operatorname{ctg} 90^\circ$ равен 0.



Следствие для отношений

Когда числитель и знаменатель имеют разные знаки, $\tan \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ становятся отрицательными. Это удобно проверять прямо по знакам $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

> Знаки и определённость тригонометрических функций

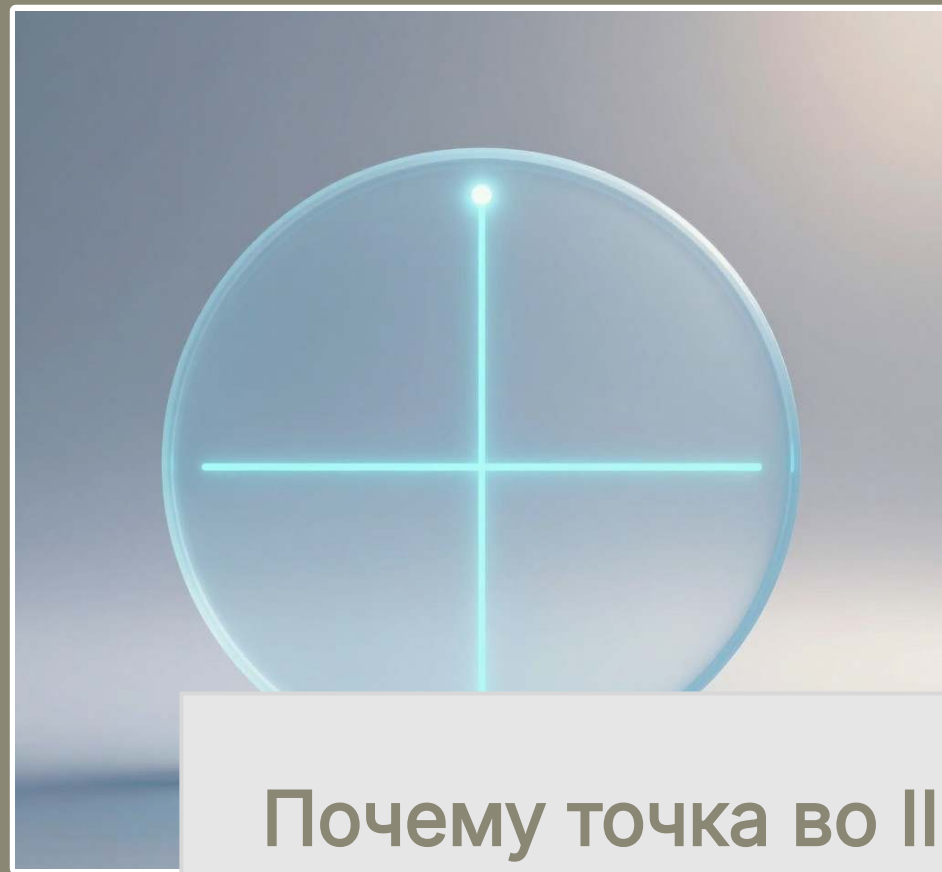
Участок	sin	cos	tan	ctg
0°–90°	+	+	+	+
90°	1	0	—	0
90°–180°	+	-	-	-
180°	0	-	0	—

Таблица показывает, где функции положительны, где меняют знак и в каких точках не определены.

Нули синуса и косинуса сразу показывают, где отношения tan и ctg теряют смысл из-за деления на ноль.

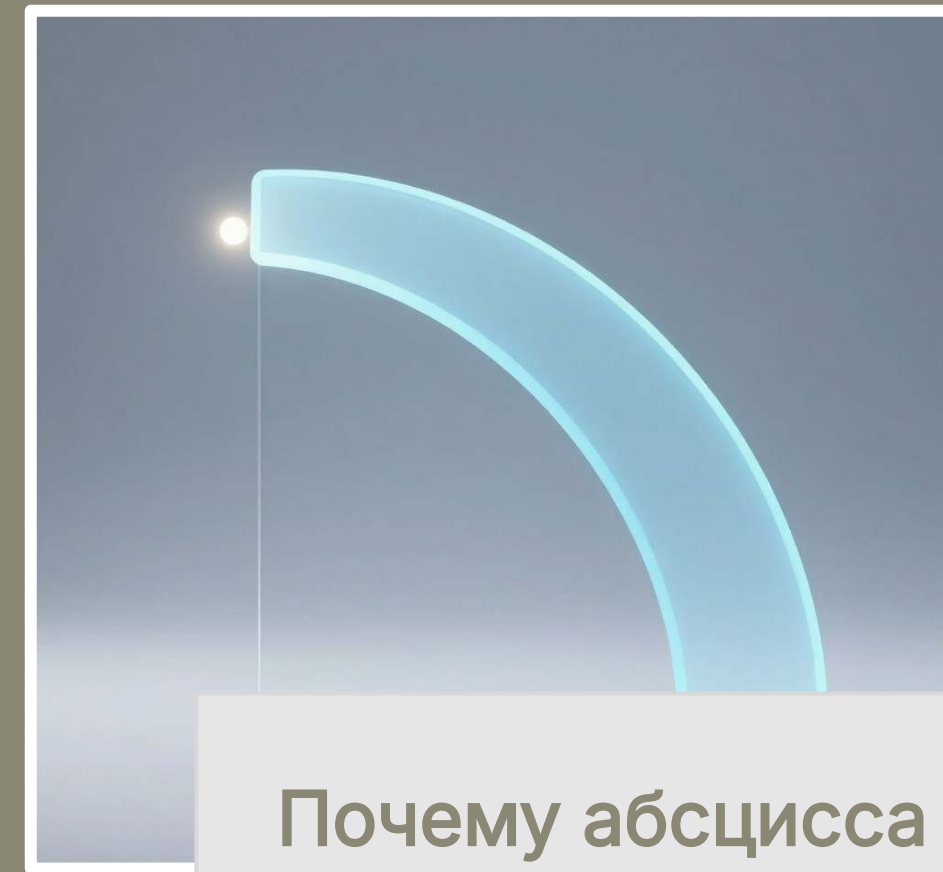
Знаки на координатной окружности и значения особых углов школьного курса

> Точка на верхней полуокружности и знаки координат



Почему точка во II четверти выше оси Ox

Если угол больше 90° , луч попадает во вторую четверть, а точка на окружности остаётся над осью Ox. Поэтому её ордината положительна, и $\sin \alpha$ больше нуля. На рисунке это видно по вертикальной проекции точки на ось Oy.

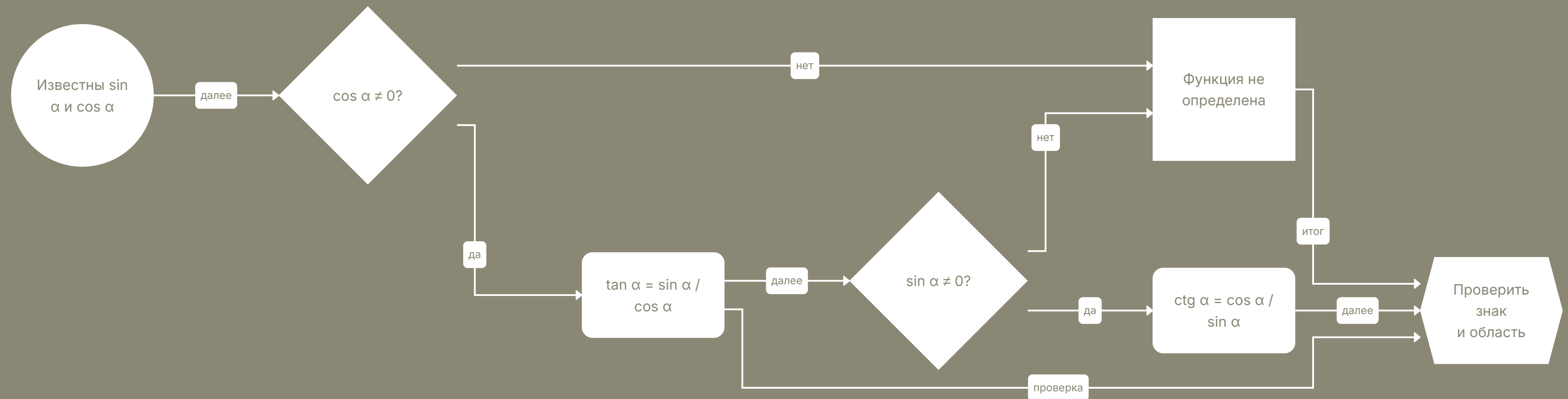


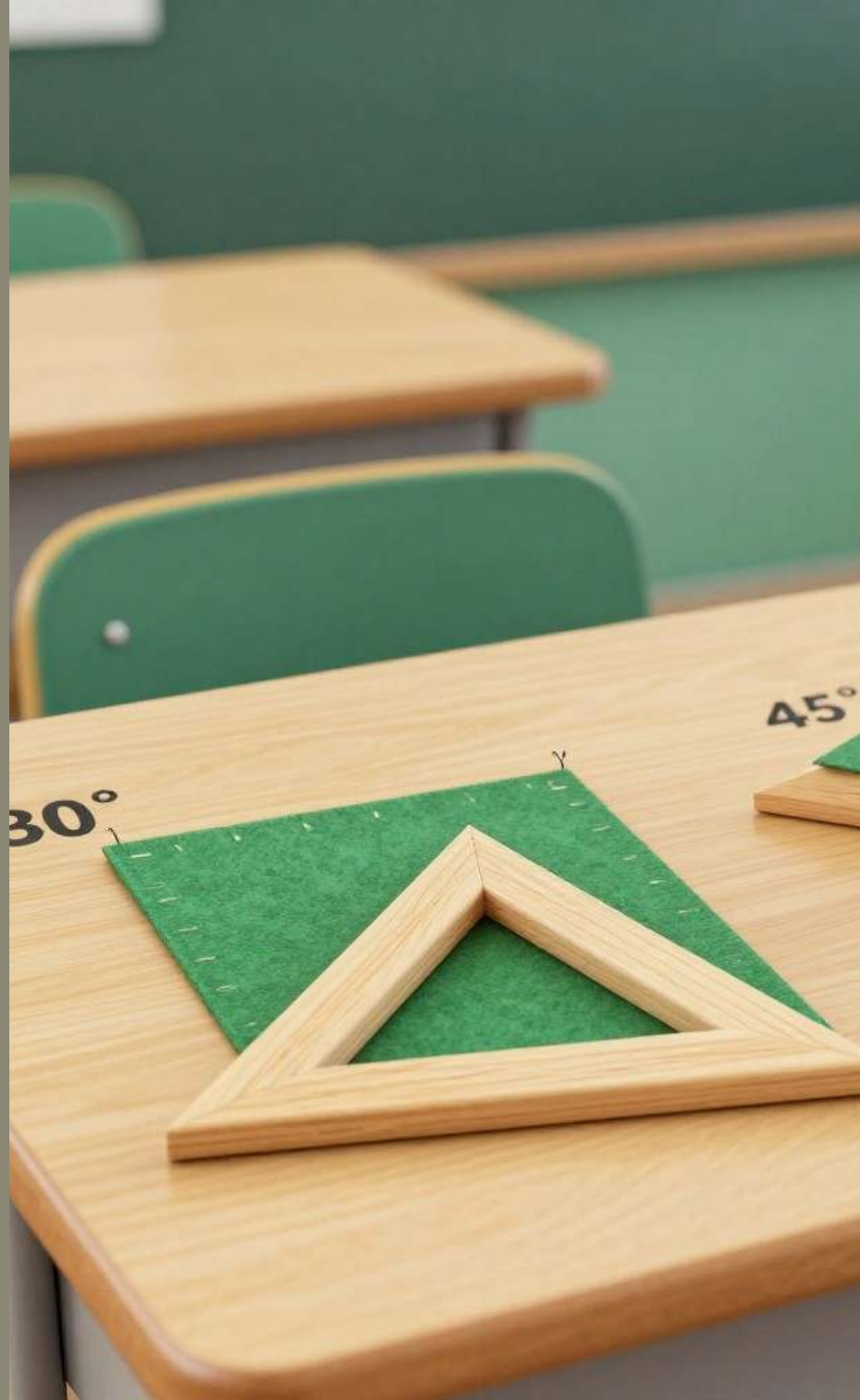
Почему абсцисса становится отрицательной

Во второй четверти точка расположена левее оси Oy. Её горизонтальная проекция направлена в отрицательную сторону, значит $x = \cos \alpha$ принимает отрицательное значение. Именно так знак косинуса объясняется через положение точки на окружности.

> Связь тангенса и котангенса с синусом и косинусом

Если известны $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, то тангенс и котангенс находят через их отношение. При нулевом знаменателе функция не определена, а знак легко определить по знакам $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.





Угол 30° 01

Для угла 30° синус равен $\frac{1}{2}$, косинус — $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а тангенс — $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Эти значения удобно запоминать через половину равностороннего треугольника.

Угол 45° связан с равнобедренным прямоугольным треугольником: синус и косинус одинаковы и равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому тангенс этого угла равен 1.

Угол 60° 03

Для угла 60° синус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, косинус — $\frac{1}{2}$, а тангенс — $\sqrt{3}$. Это значение дополняет набор опорных чисел для школьной тригонометрии.

Особые углы 30°, 45° и 60°

> Сравнение значений для 30° , 45° и 60°

Три опорных угла показывают одну закономерность: при увеличении угла синус растёт, косинус убывает, а тангенс быстро увеличивается.

Чем больше угол в этом наборе, тем больше $\tan \alpha$ и тем меньше $\cos \alpha$. Значения удобно сравнивать без лишнего запоминания.

> Как применять формулы в геометрических задачах

Через гипотенузу

Если в прямоугольном треугольнике известны гипотенуза и острый угол, нужный катет находят через $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$, выбирая формулу по расположению стороны.

Координаты точки

Для точки на единичной окружности используют записи $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$. Так можно сразу определить положение точки и знаки координат.

Через два катета

Когда известны оба катета, удобно использовать $\tan \alpha$: он равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Это помогает быстро находить угол или проверять ответ.

Проверка результата

После вычислений полезно оценить, подходит ли знак и примерная величина. Для углов от 0° до 180° синус не бывает отрицательным, а косинус меняет знак после 90° .

> **Мини-практика: значения основных углов**

Угол	sin	cos	tan
0°	0	1	0
90°	1	0	не опр.
180°	0	-1	0

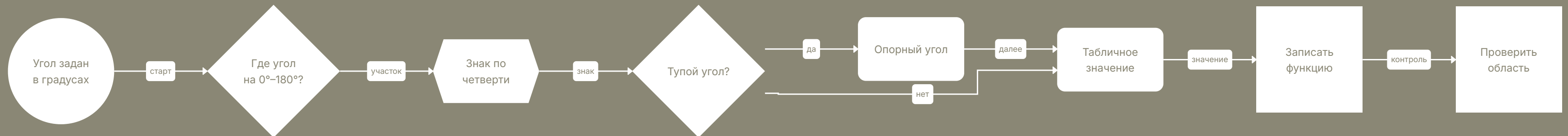
Проверьте опорные углы и сравните знаки функций в начале, середине и конце промежутка от 0° до 180°.

На концах промежутка синус равен нулю, а в точке 90° косинус обращается в ноль, поэтому тангенс там не определён.

Таблица тригонометрических значений для школьного курса

> Алгоритм нахождения значения функции по углу

Пошаговый способ для углов от 0° до 180° : сначала определяют участок промежутка, затем знак, опорный угол и табличное значение.



> Ключевые точки координатной окружности

Точки на верхней полуокружности помогают увидеть, как меняются координаты при увеличении угла и где начинается смена знаков.

До 90° обе координаты неотрицательны, а после 90° абсцисса становится отрицательной. Это объясняет знак косинуса во II четверти.

> Типичные ошибки при работе с функциями угла

Путаница функций

Часто путают синус и косинус, особенно в точках 0° и 90° . Полезно помнить: косинус отвечает за горизонтальную

координату, а синус

Область определения

Нельзя писать $\tan 90^\circ$ или $\operatorname{ctg} 0^\circ$, потому что в этих случаях знаменатель обращается в ноль. Перед ответом всегда нужно проверять, определена ли функция.

Неверный знак

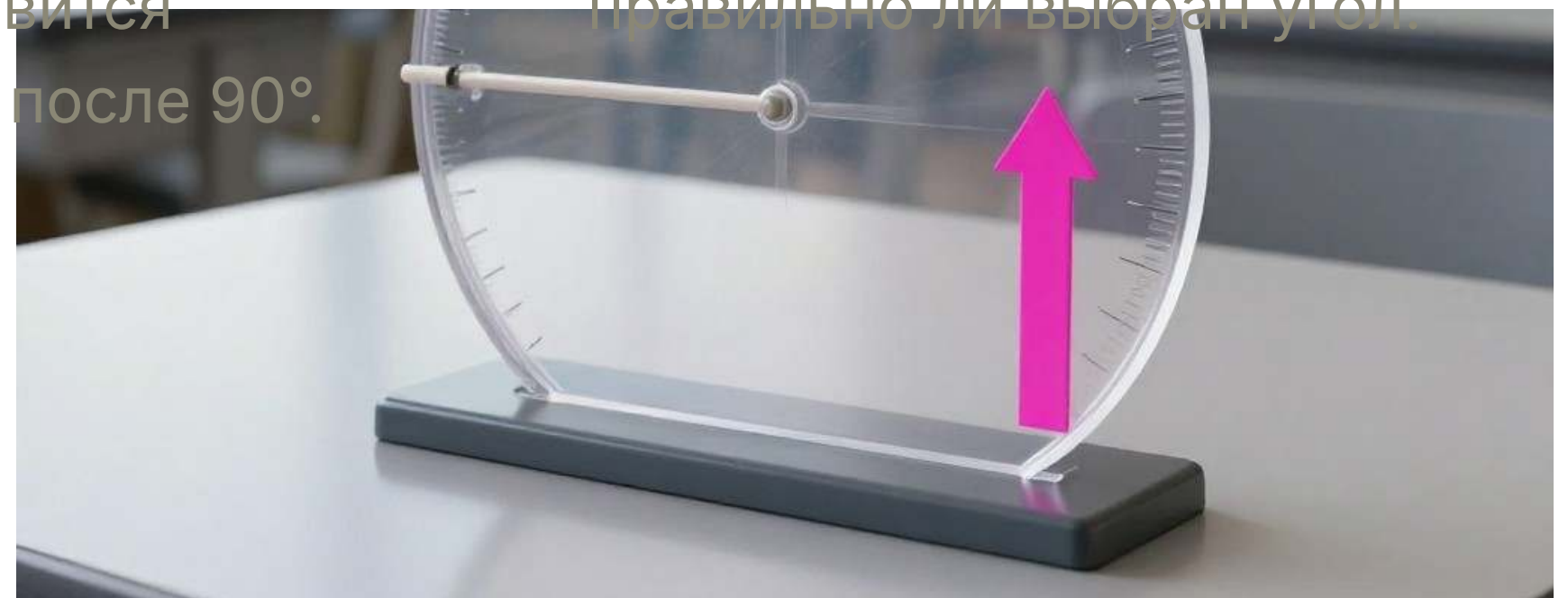
Во II четверти многие по ошибке ставят положительный косинус. На самом деле синус остаётся положительным,

а косинус становится отрицательным после 90° .

Нулевые значения

Иногда забывают, что при 90° и 180° некоторые функции равны нулю. Именно эти значения помогают быстро проверить,

правильно ли выбран угол.



> Где встречаются синус, косинус, тангенс и котангенс



Движение по окружности

Синус и косинус описывают положение точки на окружности и помогают понимать, как меняются координаты при вращении и движении по дуге.



Колебания и ритм

В физике эти функции используют для описания колебаний, например маятника или волны. Они помогают показывать повторяющиеся изменения величины во времени.



Высоты и наклоны

Тангенс особенно удобен в геометрии: с его помощью находят углы наклона, высоту предмета или расстояние, если известны элементы прямоугольного треугольника.



Проверка вычислений

Котангенс связывает те же величины в обратном отношении. Его используют как дополнительную проверку, когда нужно убедиться, что ответ согласуется с известными сторонами.

> Тригонометрия на полуокружности: что важно запомнить

Синус и косинус читаются как координаты точки на единичной окружности, а тангенс и котангенс выражаются через их отношение. Это основа для уверенных вычислений.