



Выражения с радикалами в алгебре 8 класса

Корни и радикалы: от смысла записи до точных
вычислений.

От квадратов к корням



Квадратный корень — это обратное действие к возведению в квадрат: он помогает находить число, которое было возведено в степень 2. Если точного квадрата нет, запись становится радикальной и часто иррациональной, как $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$.

Что означает запись $\sqrt{a}$

Подкоренное выражение

Число или выражение под знаком корня называют подкоренным. В школьном курсе квадратный корень рассматривают только для неотрицательных значений, чтобы результат был определён однозначно.

Смысл записи

Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a . Поэтому $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, а $\sqrt{0} = 0$.

Особый случай

Запись $\sqrt{a^2}$ требует осторожности: корень из квадрата не равен просто a . Поскольку квадратный корень не бывает отрицательным, верно $\sqrt{a^2} = |a|$.

Почему это важно

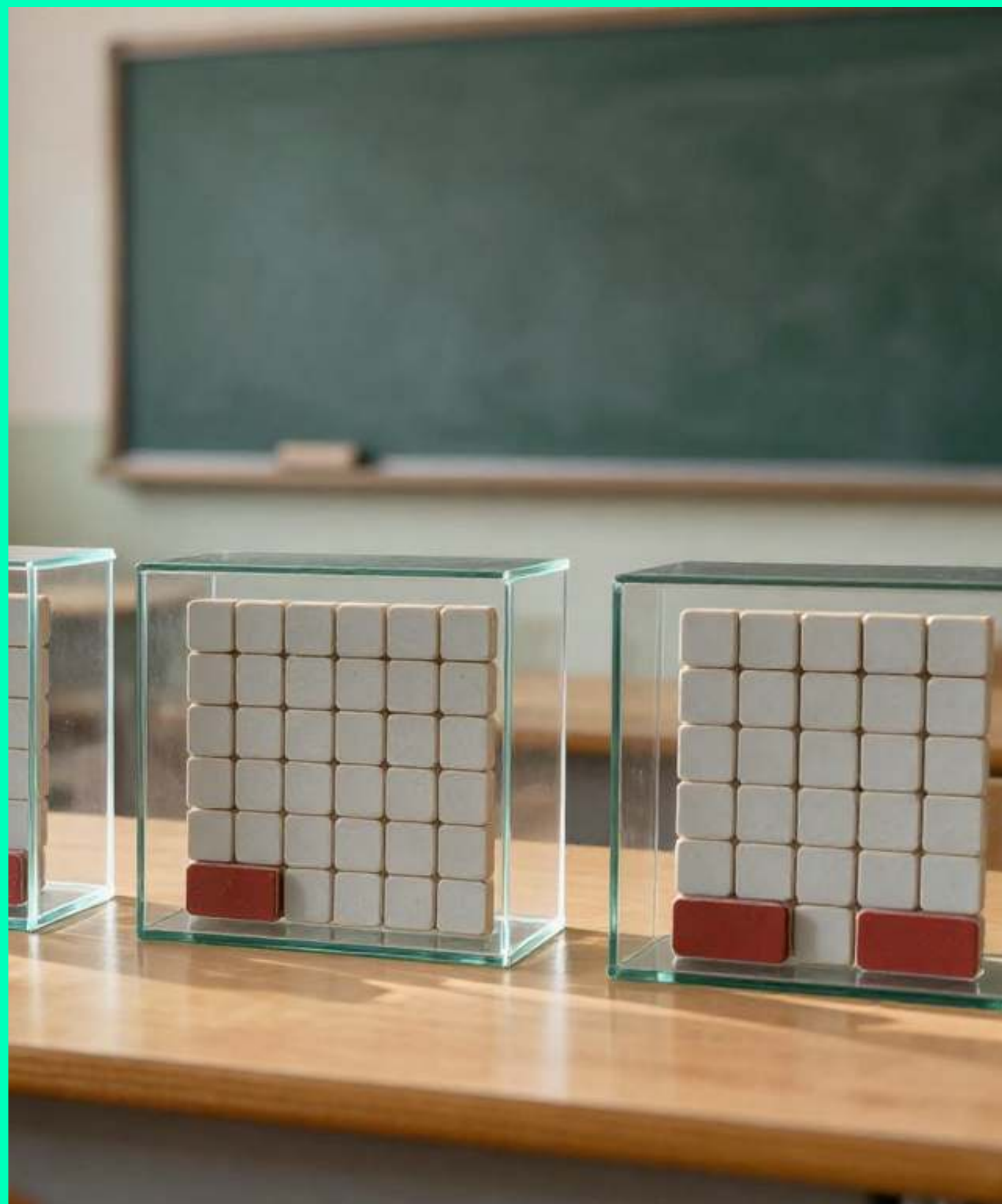
Это правило помогает избегать ошибок в преобразованиях, особенно когда буква может обозначать положительное или отрицательное число. Модуль сохраняет правильный ответ в любом случае.

Основные свойства квадратных корней

Свойство	Запись
Произведение	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
Деление	$\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$
Квадрат	$\sqrt{a^2} = a $
Полный квадрат	Можно вынести наружу

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения с корнями быстрее и аккуратнее.

Все свойства работают только при выполнении условий на числа под корнем и помогают сокращать выражения без потери смысла.



Как упрощают радикалы на примерах

01. Ищем полный квадрат

В выражении $\sqrt{18}$ можно заметить множитель 9, потому что $18 = 9 \cdot 2$. Тогда $\sqrt{18} = \sqrt{(9 \cdot 2)} = 3\sqrt{2}$, и запись становится короче.

02. Повторяем приём

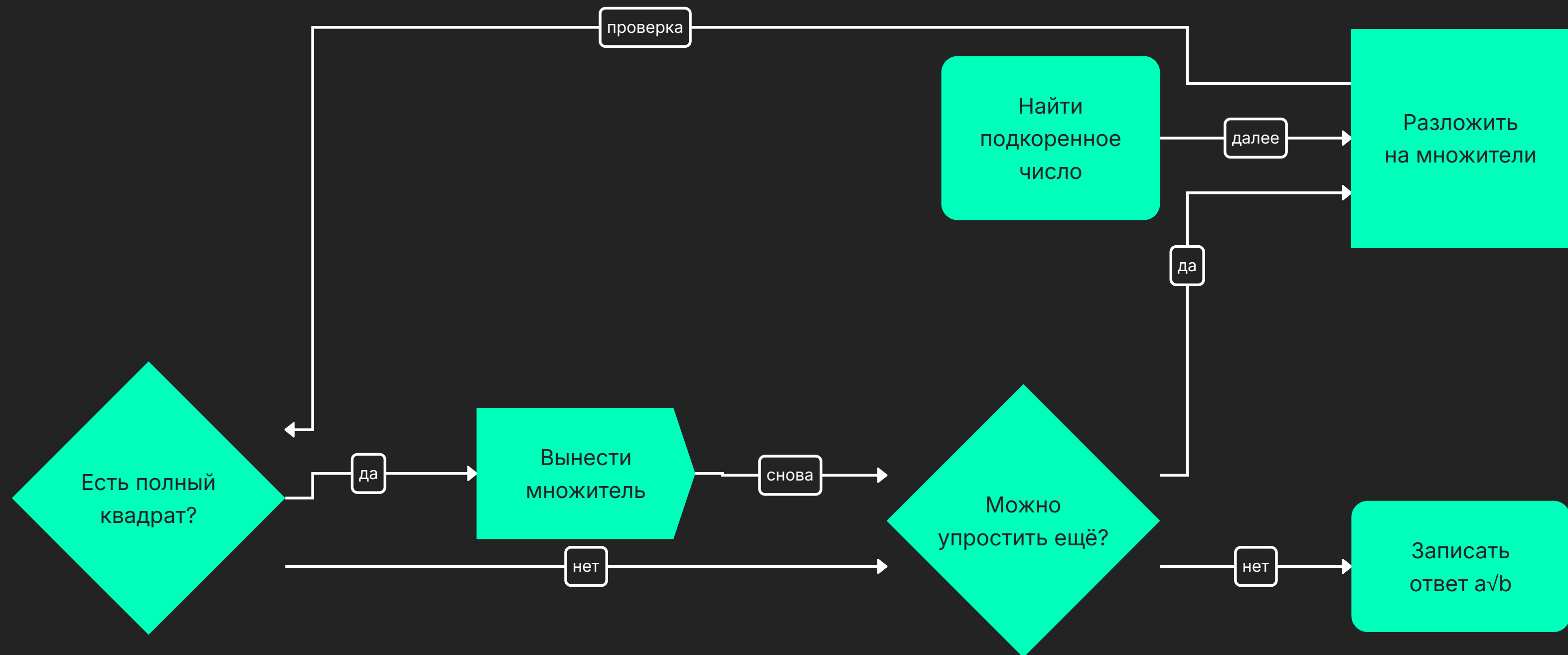
Для $\sqrt{50}$ удобно выделить 25: $50 = 25 \cdot 2$. После выноса полного квадрата получаем $\sqrt{50} = \sqrt{(25 \cdot 2)} = 5\sqrt{2}$. Это типичный способ упрощения.

03. Закрепляем закономерность

Аналогично $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = 6\sqrt{2}$. Во всех примерах сначала ищут квадратный множитель, а затем оставляют под корнем число без полных квадратов.

Алгоритм упрощения выражений с корнями

Последовательность шагов для простых заданий по теме



Сложение и вычитание одинаковых радикалов

Только одинаковые корни

Складывать и вычитать можно лишь одинаковые радикалы, то есть выражения с одним и тем же подкоренным числом. Тогда работают обычные действия с коэффициентами перед корнем.

Простые примеры

Например, $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$, а $8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. Здесь меняется только число перед корнем, а сам радикал остаётся тем же.

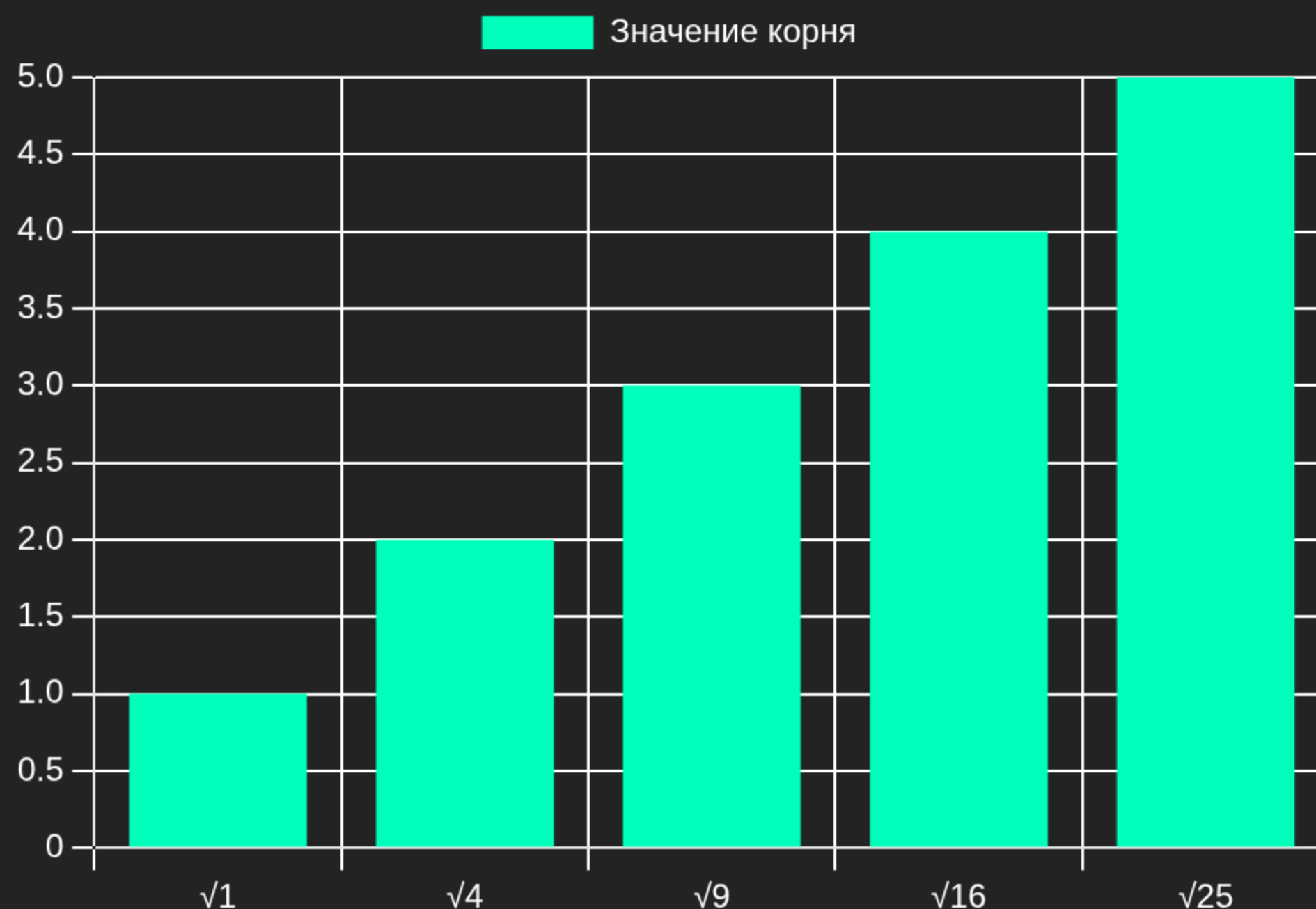
Разные радикалы не объединяют

Выражение $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ не упрощается до одного корня, потому что подкоренные числа различны. Такие слагаемые оставляют в записи отдельно, не смешивая их.

Сначала упрощение

Иногда радикалы становятся одинаковыми только после преобразования. Например, $3\sqrt{8} - \sqrt{2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, потому что $\sqrt{8}$ сначала нужно упростить.

Сравнение значений квадратных корней



Нулевых и отрицательных значений здесь нет: в школьном курсе рассматривают неотрицательные корни, поэтому сравнение удобно делать по возрастанию подкоренных чисел.

Чем больше точный квадрат под корнем, тем больше значение корня; рост происходит постепенно, а не скачком.

Школьные значения квадратных корней: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$

Умножение и деление выражений с корнями

01

Правило умножения

Если под корнями стоят неотрицательные числа, можно перемножать сами корни: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Этот приём особенно удобен, когда произведение внутри корня становится точным квадратом.

02

Удобные примеры

Например, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, а $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$. Сначала полезно проверить, не получится ли после перемножения полный квадрат.

03

Правило деления

Для деления используют формулу $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$, если $b > 0$. Так можно быстро получить более простую запись и уменьшить число под корнем.

04

Проверка перед ответом

В примере $\sqrt{12}/\sqrt{3} = \sqrt{4} = 2$ важно сначала убедиться, что деление допустимо. После этого ответ легко проверить обратным умножением.

Рационализация знаменателя

01. Зачем это нужно

В школьной записи обычно стараются не оставлять радикал в знаменателе дроби. Так выражение выглядит стандартно и его легче использовать в следующих преобразованиях.

02. Простой случай

Если внизу стоит один корень, дробь домножают на тот же корень. Например, $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$: корень исчезает из знаменателя, а значение дроби не меняется.

03. Сопряжённое выражение

Когда в знаменателе сумма или разность, используют сопряжённое выражение. Так, $1/(3+\sqrt{2})$ умножают на $(3-\sqrt{2})$, чтобы убрать радикал из знаменателя без изменения дроби.

Типичные ошибки при работе с радикалами

Таблица показывает самые частые ошибки и помогает сразу заметить, где нарушается правило работы с корнями.

Ошибка	Пример	Как надо
Сложение	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	Нельзя
Свойство суммы	$\sqrt{(a+b)}$	Не равно
Модуль	$\sqrt{a^2}$	$ a $

Корни нельзя складывать и преобразовывать по обычным правилам действий с суммой. Особенно важно помнить про модуль и проверять каждый шаг упрощения.

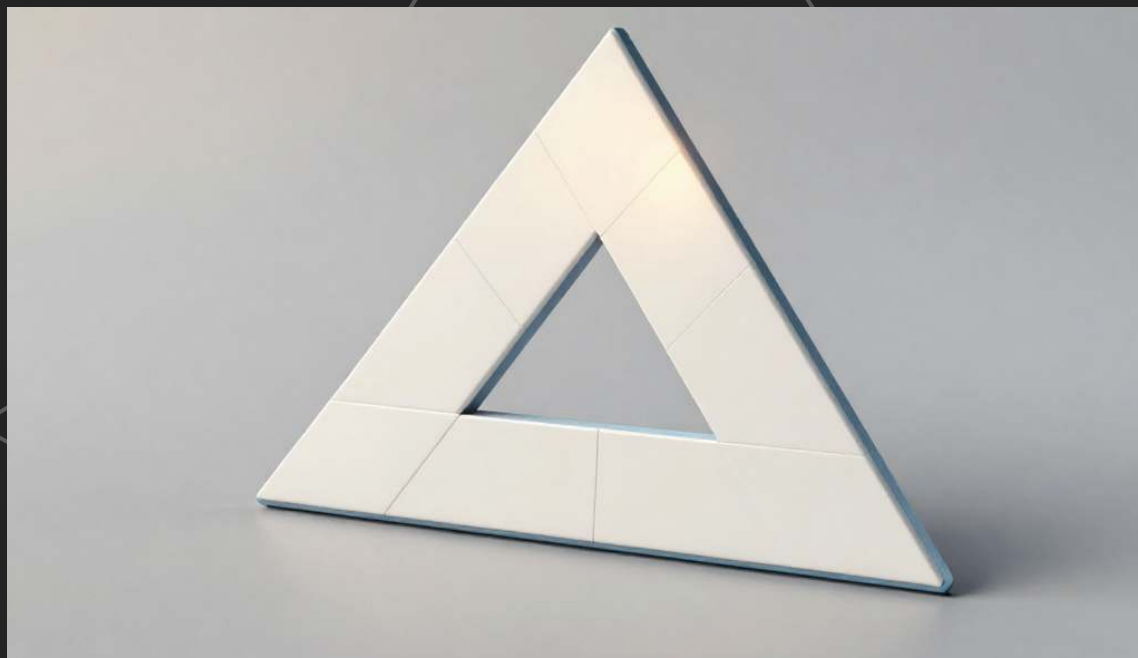
Школьные упражнения и правила темы «Квадратные корни»

Радикалы в геометрии



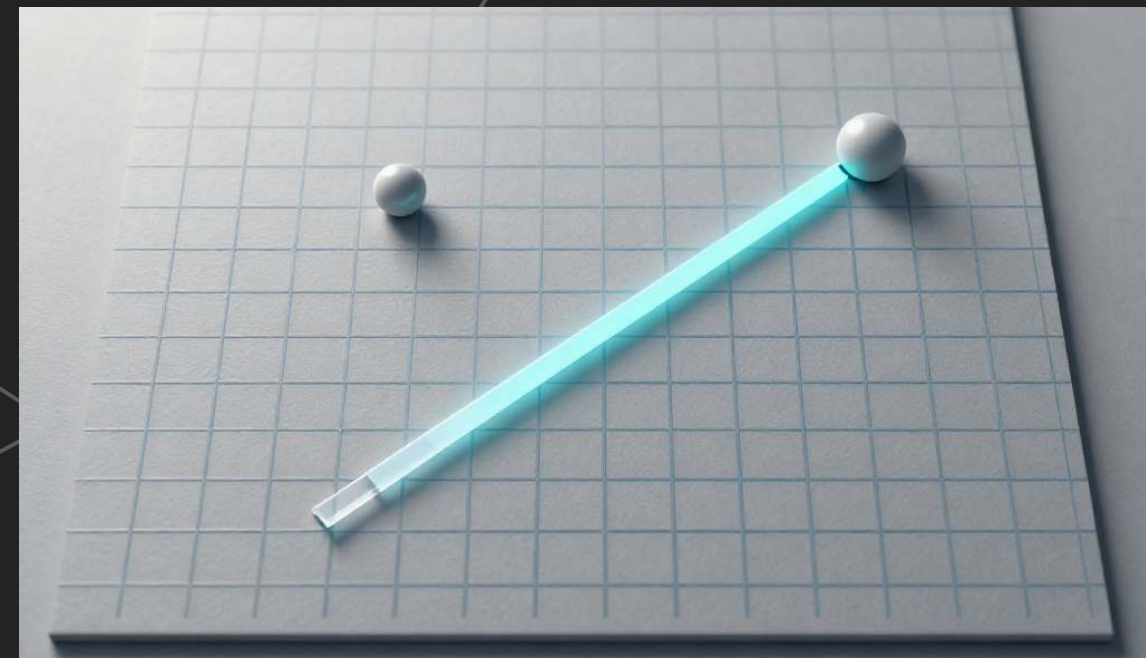
Диагональ квадрата

Если у квадрата сторона равна a , его диагональ выражается как $a\sqrt{2}$. Это удобно записывать в задаче, когда нужно быстро найти длину без громоздких вычислений. На рисунке хорошо показать квадрат и проведённую диагональ.



Пифагор и корни

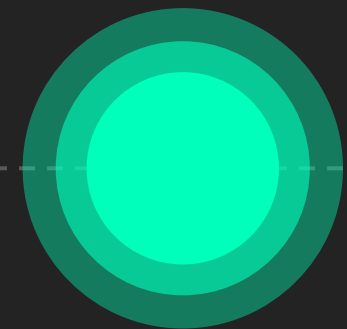
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, поэтому рядом с ответами часто появляются $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ или $\sqrt{17}$. Такой чертёж помогает увидеть, откуда берётся радикал и какие стороны нужно подписать.



Точки на координатной плоскости

При вычислении расстояния между двумя точками тоже возникают квадратные корни. Здесь особенно полезна схема с координатной сеткой, где можно отметить отрезок, прямоугольный треугольник и нужные длины сторон для сравнения.

Как сравнивать корни без калькулятора



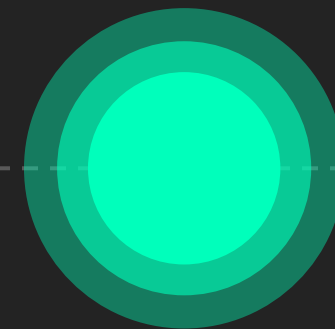
Найти соседние квадраты

Сначала выбирают два ближайших полных квадрата, между которыми лежит число под корнем. Это сразу задаёт границы для ответа.



Сравнить значения

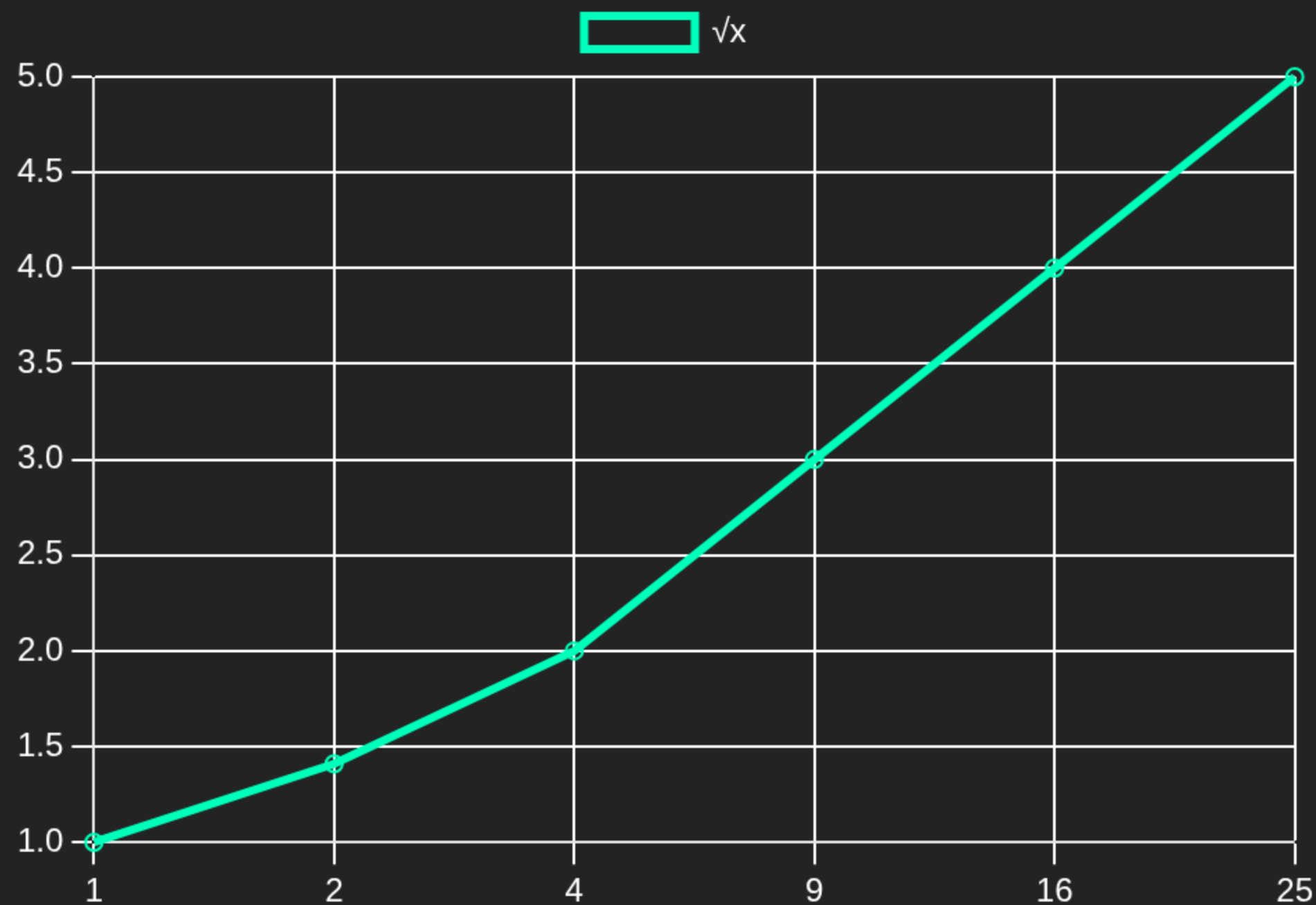
Например, 7 находится между 4 и 9, значит $\sqrt{7}$ — между 2 и 3. Аналогично 20 лежит между 16 и 25.



Сделать вывод

После сравнения становится ясно, где расположен корень на числовой прямой и какое из двух значений ему ближе.

Как меняется значение корня при росте числа под корнем



Точка для $x = 2$ показывает, что корень может быть нецелым числом, даже если подкоренное значение простое.

Чем больше x , тем больше $\sqrt{x}$, но рост замедляется. Квадратный корень уменьшает разницу между большими числами.

Точные значения для полных квадратов и приближённое значение $\sqrt{2} \approx 1,41$

Оценка корней по соседним квадратам

$\sqrt{20}$

Число 20 лежит между 16 и 25, поэтому корень находится между 4 и 5. Такой приём помогает быстро понять порядок ответа без вычислителя.

$\sqrt{45}$

Здесь удобны квадраты 36 и 49: между ними находится 45. Значит, $\sqrt{45}$ больше 6, но меньше 7, и это легко проверить в уме.

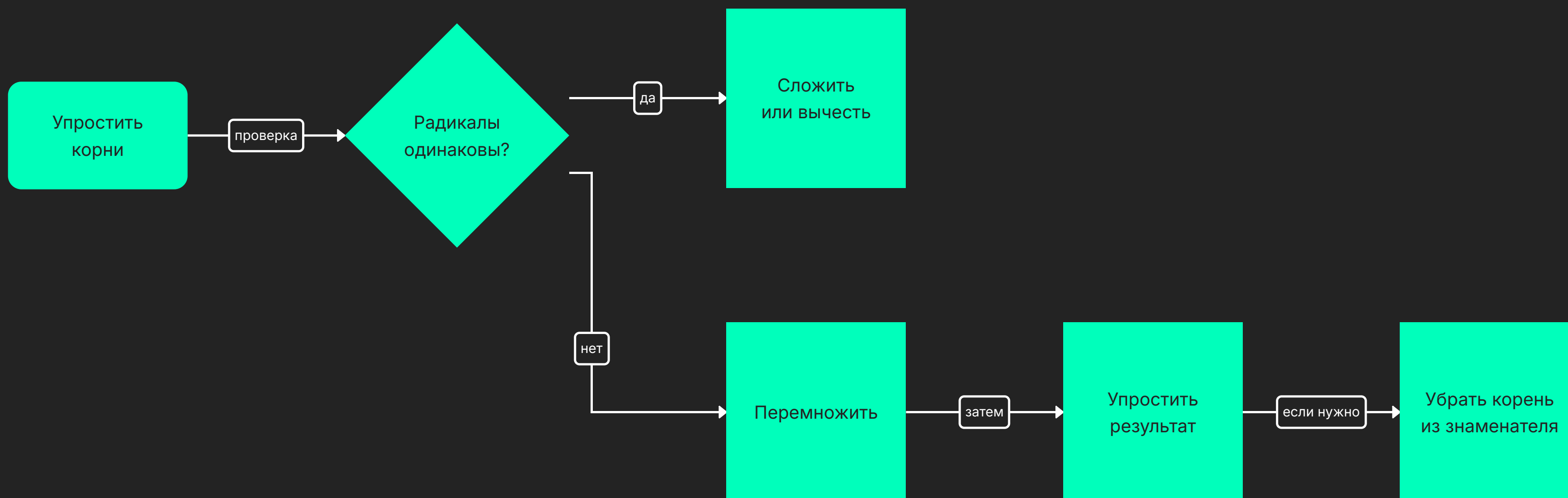
$\sqrt{80}$

Поскольку $64 < 80 < 81$, значение корня больше 8 и меньше 9. Близость к 81 подсказывает, что ответ почти равен 9.



Как решать выражения с несколькими радикалами

Порядок действий по школьным правилам 8 класса



Связь радикалов со степенями и дробями



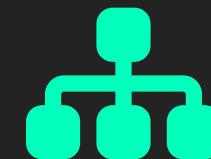
Проверка на примерах

Если взять $16^{(1/2)}$ или $81^{(1/2)}$, получаются 4 и 9. В выражении $(a^2)^{(1/2)}$ появляется модуль, потому что корень не бывает отрицательным.



Корень как степень

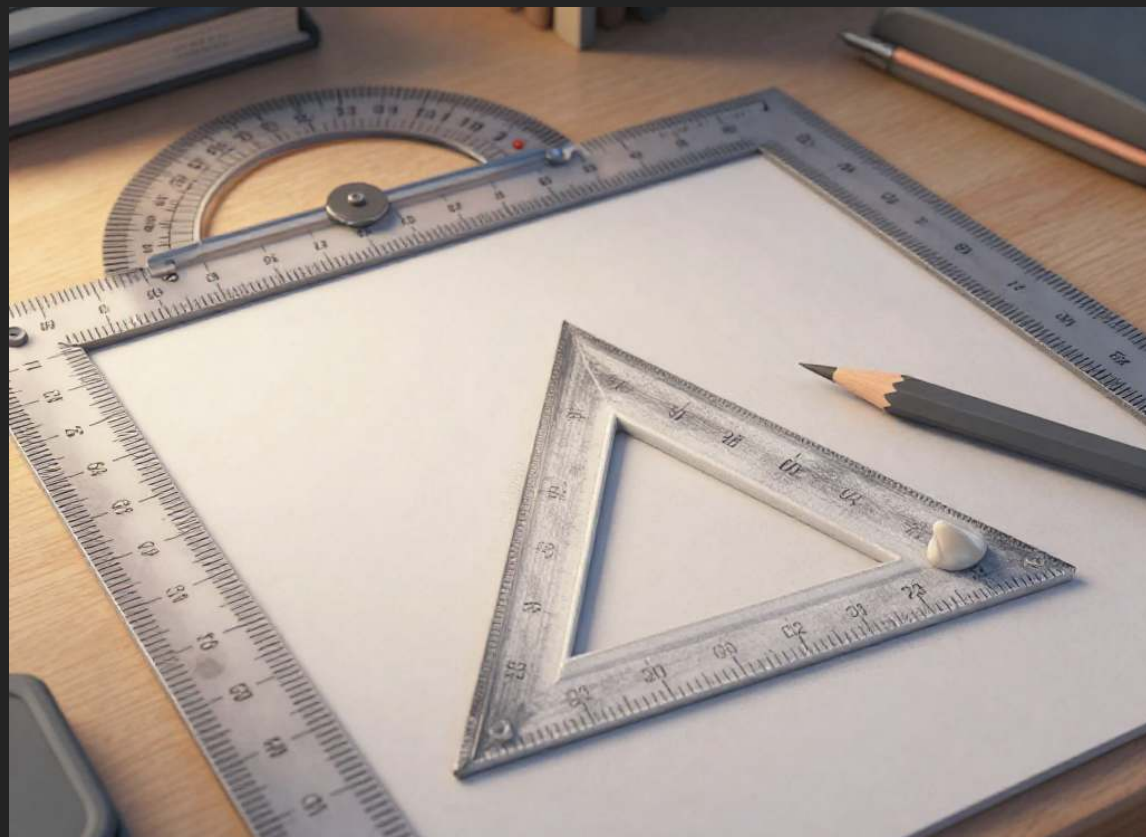
Запись $\sqrt{a} = a^{(1/2)}$ показывает, что квадратный корень можно рассматривать как степень с дробным показателем. Это связывает две важные темы алгебры и делает формулы короче.



Переход к старшим классам

Такая запись помогает понимать общие правила преобразований и позже работать со степенями увереннее. Она часто встречается в более сложных темах и упрощает запись решений.

Где встречаются радикалы в жизни и науке



Измерения и чертежи

Квадратные корни часто нужны, когда считают диагональ, длину отрезка или размер фигуры на чертеже. В школьной геометрии это помогает получить точный ответ, а не только приблизительную оценку. На рисунке удобно показать измерения и подписи к сторонам.



Физика и движение

В физических формулах радикалы появляются при расчётах, где важны расстояния, скорость или время. Они помогают записывать зависимость величин компактно и точно, особенно когда задача связана с координатами и геометрическими построениями.



Компьютерная графика

На экране компьютера тоже используют корни: они помогают находить расстояние между точками и размещать объекты правильно. Поэтому координатная сетка и схема экрана хорошо показывают, что математика работает в цифровых технологиях.

Мини-практикум по теме выражений с радикалами

Задание	Ответ
$\sqrt{18}$	$3\sqrt{2}$
$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$	10
$1/\sqrt{5}$	$\sqrt{5}/5$
$\sqrt{7}$	между 2 и 3

Короткая таблица помогает проверить, насколько уверенно применяются основные правила: упрощение, сложение, умножение, деление и оценка корня.

Все ответы получаются из одного из базовых правил работы с радикалами. Если правило выбрано верно, решение можно быстро проверить без калькулятора.

Типовые задания по алгебре 8 класса

Главная идея темы «Выражения с радикалами»

Радикалы помогают точно записывать и сравнивать числа, которые не выражаются обычным целым значением. Если помнить основные правила, вычисления становятся короче, понятнее и надёжнее.