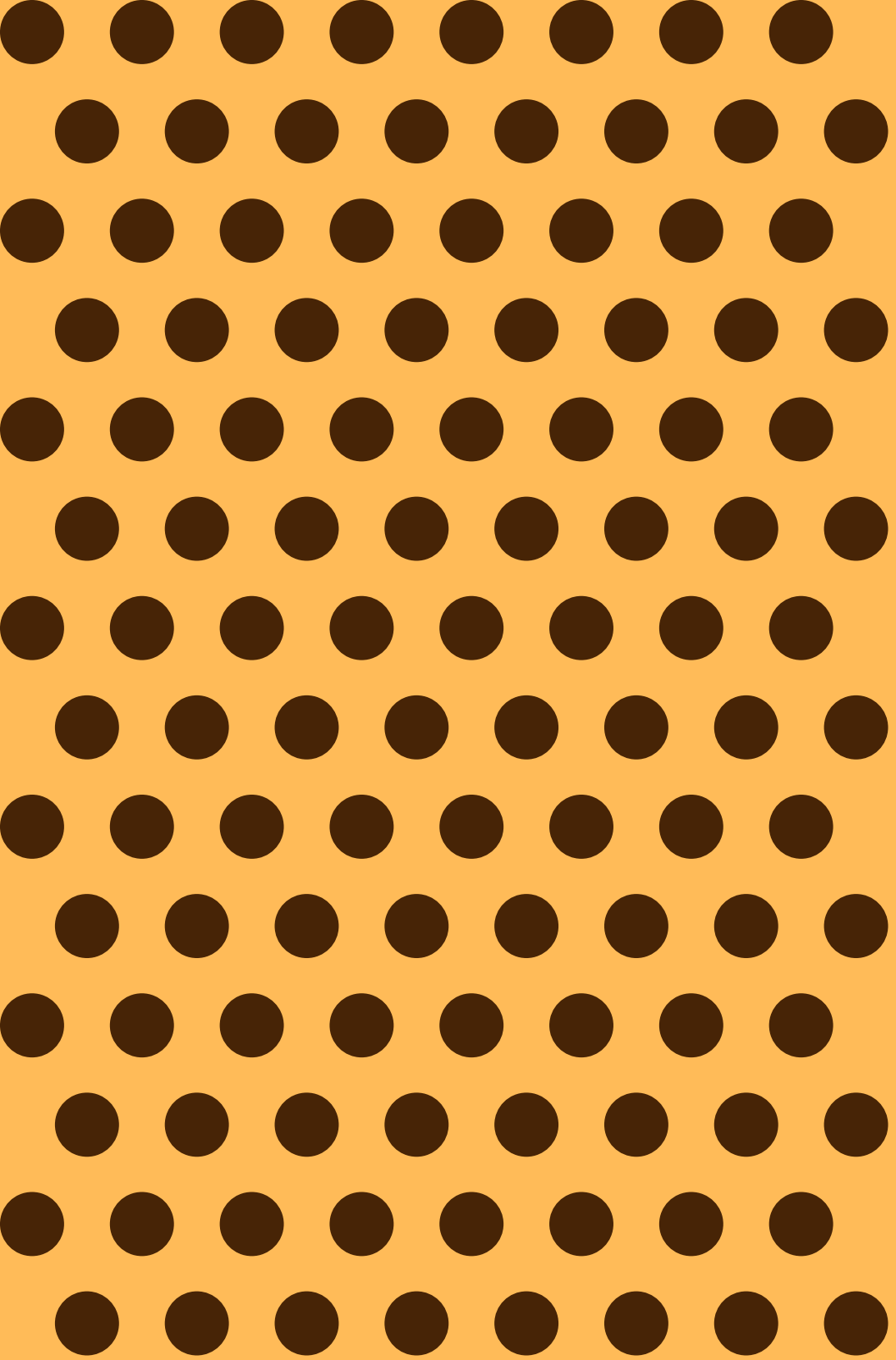
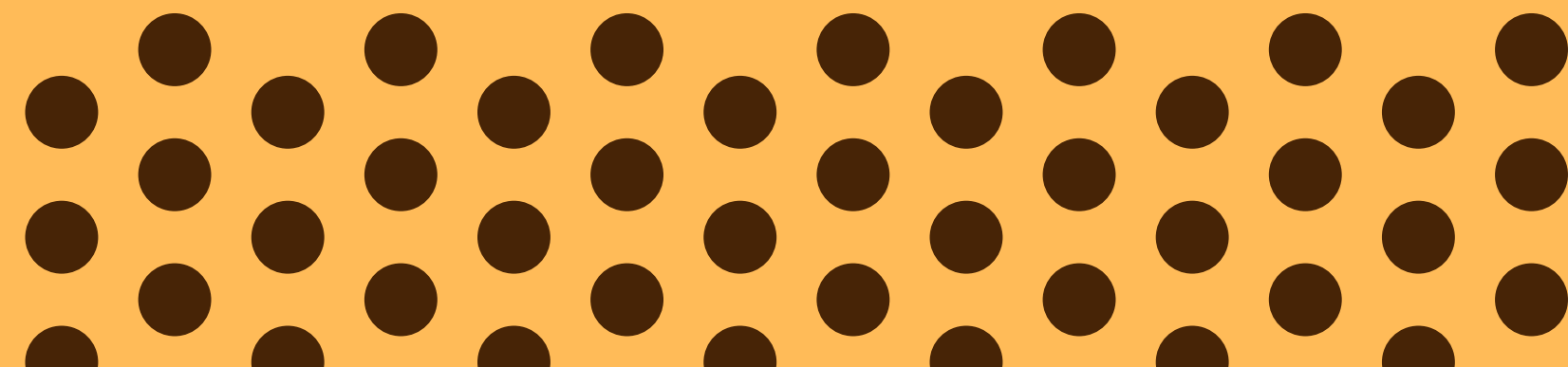




Перестановки: порядок элементов и формула $n!$

Порядок меняет число вариантов: здесь работает факториал.



Почему порядок действительно важен

В перестановках одни и те же объекты дают разные ответы, если меняется их расположение. Это видно в рассадке, очереди выступлений, расстановке книг и составлении кодов.



Определение перестановки из n различных элементов

.1

Что называют перестановкой

Перестановка — это любое упорядочение всех элементов набора, в котором каждый объект используется ровно один раз. Главное здесь не состав, а последовательность расположения.

.2

Пример с тремя объектами

Если даны А, В и С, получаем шесть вариантов: АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ и СВА. Все они содержат одни и те же элементы, но в разном порядке.

.3

Почему число вариантов равно $n!$

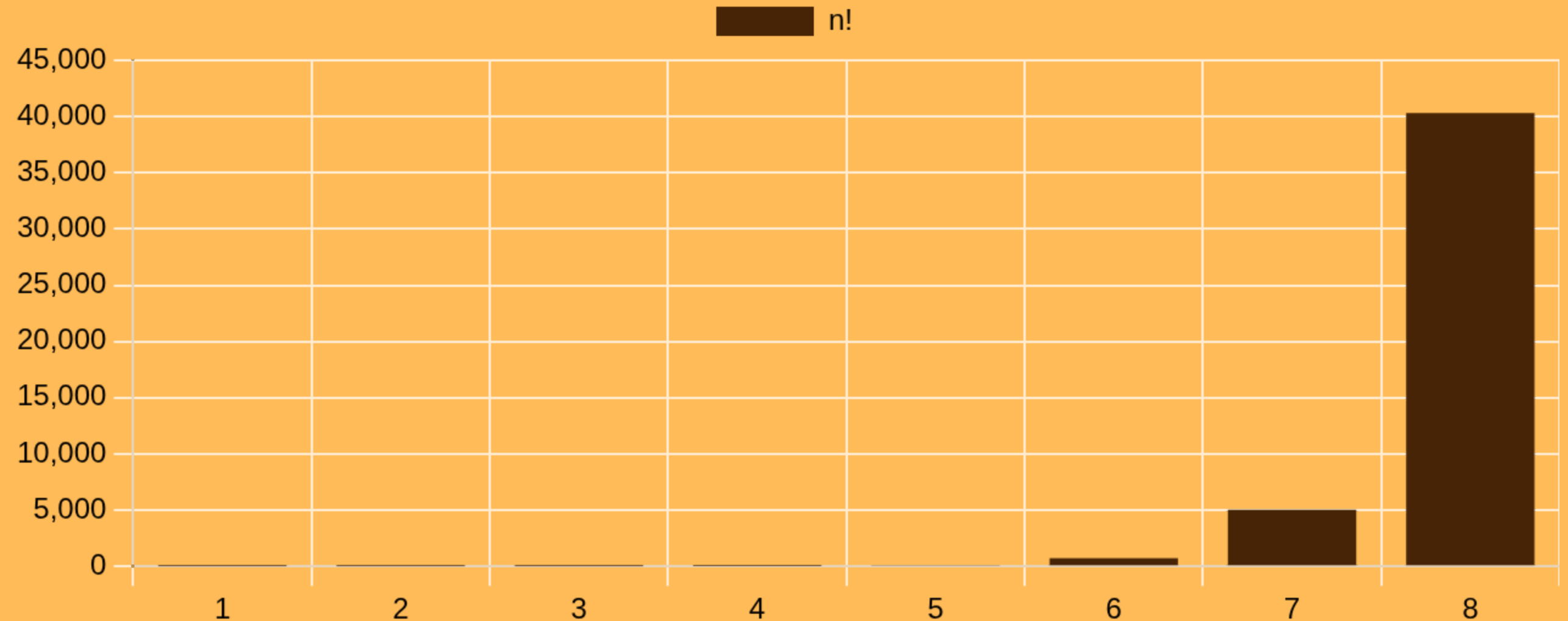
Для первого места есть n выборов, для второго — $n-1$, затем $n-2$ и так далее до 1. Поэтому общее число перестановок равно произведению всех этих чисел.

Как быстро растёт число перестановок

Даже небольшое увеличение числа объектов резко расширяет пространство вариантов, поэтому задачи на полный перебор быстро становятся громоздкими.

Рост носит взрывной характер: уже при восьми объектах вариантов десятки тысяч, и ручной перебор теряет практический смысл.

Базовые значения факториала: $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$, $6!$, $7!$, $8!$.



Факториал как формула подсчёта



● Определение

Факториал натурального числа n обозначают $n!$ и понимают как произведение всех чисел от 1 до n . Это удобная запись для краткого описания растущих комбинаторных величин.

● Нулевой факториал

По соглашению $0! = 1$. Это значение необходимо, чтобы формулы комбинаторики работали согласованно и не нарушались на границах случаев с пустым набором.

● Связь с перестановками

Для n различных объектов число перестановок совпадает с факториалом: $P_n = n!$. Формула отражает последовательный выбор места для каждого элемента без повторного использования.

● Наглядный смысл

Если одинаковые предметы разложить в разном порядке, изменится только расположение. Именно поэтому перестановки — это задача на упорядочение, а не на выбор набора.

Значения факториала для малых n

Таблица показывает, как быстро возрастают значения $n!$ уже на первых шагах.

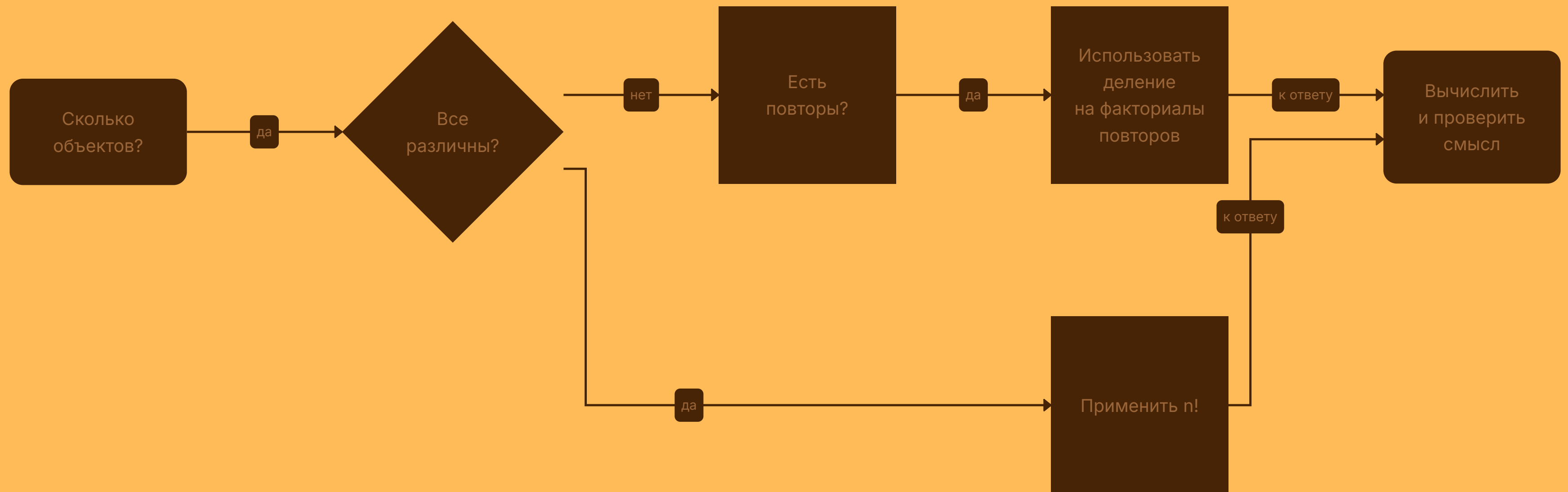
Даже при малых n число перестановок растёт очень быстро: шесть объектов уже дают 720 вариантов упорядочения.

Базовая формула комбинаторики $P_n = n!$

n	n!
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Алгоритм решения задач на перестановки

Последовательность проверки условий помогает выбрать нужную формулу без путаницы.



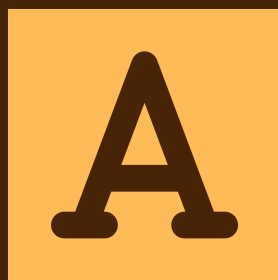
6

**различных перестановок
получается для слова «мама».**

**Повторы уменьшают число
уникальных упорядочений,
потому что одинаковые
элементы не создают новых
вариантов.**

Формула перестановок с повторениями: $n! / (k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!)$.

Почему одинаковые элементы сокращают число вариантов



Буквы неразличимы

Если элементы одинаковы, перестановки, которые выглядят по-разному на записи, фактически совпадают. Поэтому формальное число перестановок нужно уменьшать, чтобы не считать одни и те же варианты дважды.



Пример без повторов

В слове «кот» все буквы различны, поэтому каждый порядок уникален. Здесь работает обычная формула $3! = 6$, и ни одна перестановка не дублирует другую.



Повтор снижает счёт

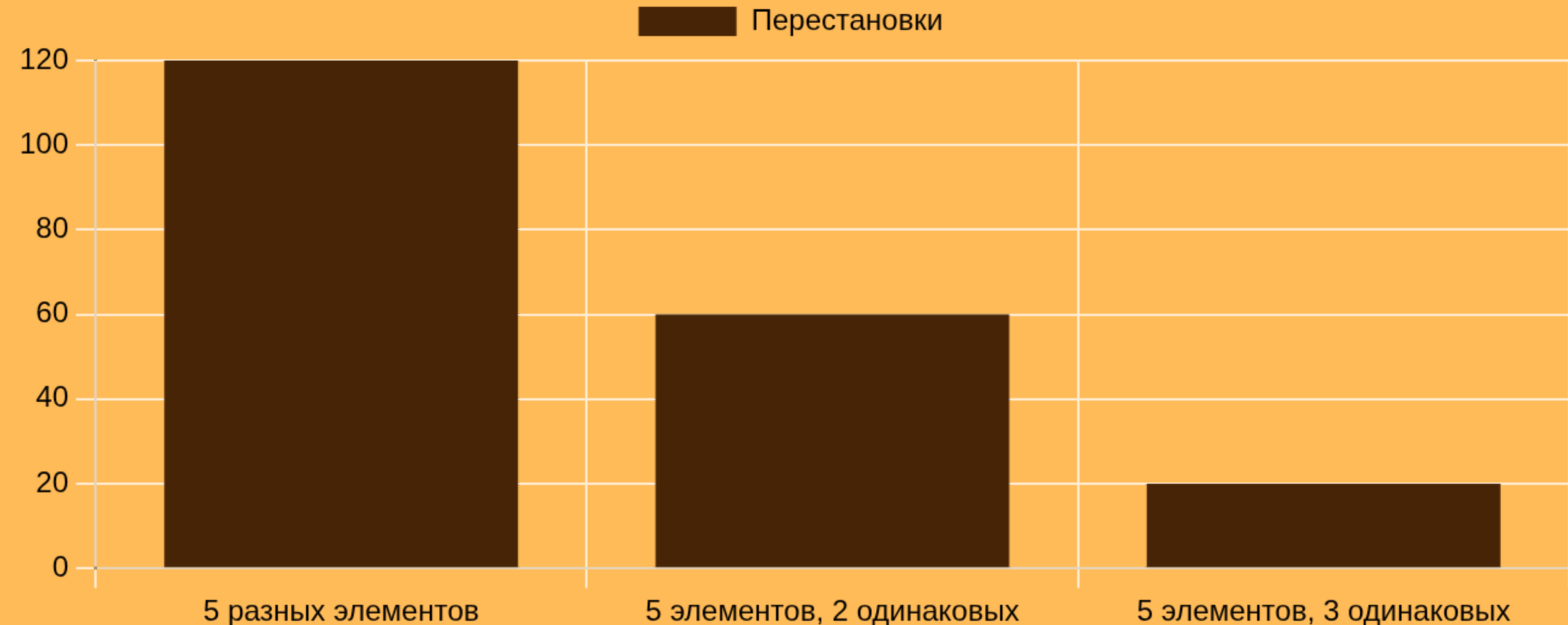
В слове «тетрадь» буква «т» повторяется, поэтому некоторые перестановки становятся неотличимыми. Из-за этого число уникальных упорядочений меньше, чем у набора из семи разных букв.

Сравнение перестановок без повторений и с повторениями

Повторы не просто немного уменьшают результат — они радикально сокращают число различных порядков даже при одинаковом размере набора.

Чем больше одинаковых элементов, тем меньше уникальных перестановок; именно поэтому повторяемость нужно проверять до выбора формулы.

Вычисления по формулам перестановок без повторений и с повторениями.



.1

Случайный порядок

Во многих вероятностных задачах важно не событие само по себе, а его место в последовательности: кто первым стартует, какой ответ прозвучит раньше, в каком порядке выпадут карты.

.2

Равновозможные варианты

Если все варианты порядка одинаково вероятны, то каждый конкретный порядок занимает одну долю из общего числа перестановок. Для n объектов эта доля равна $1/n!$.

.3

Как считать вероятность

Сначала находят общее число возможных упорядочений, затем выделяют благоприятные. Такой подход позволяет получить точный ответ без ручного перечисления всех вариантов и уменьшает риск ошибки.

.4

Практический смысл

Перестановки особенно полезны в жеребьёвке, определении порядка финиша и очередности действий. Комбинаторный счёт превращает вероятностную задачу в понятную формулу, которую можно применить сразу.

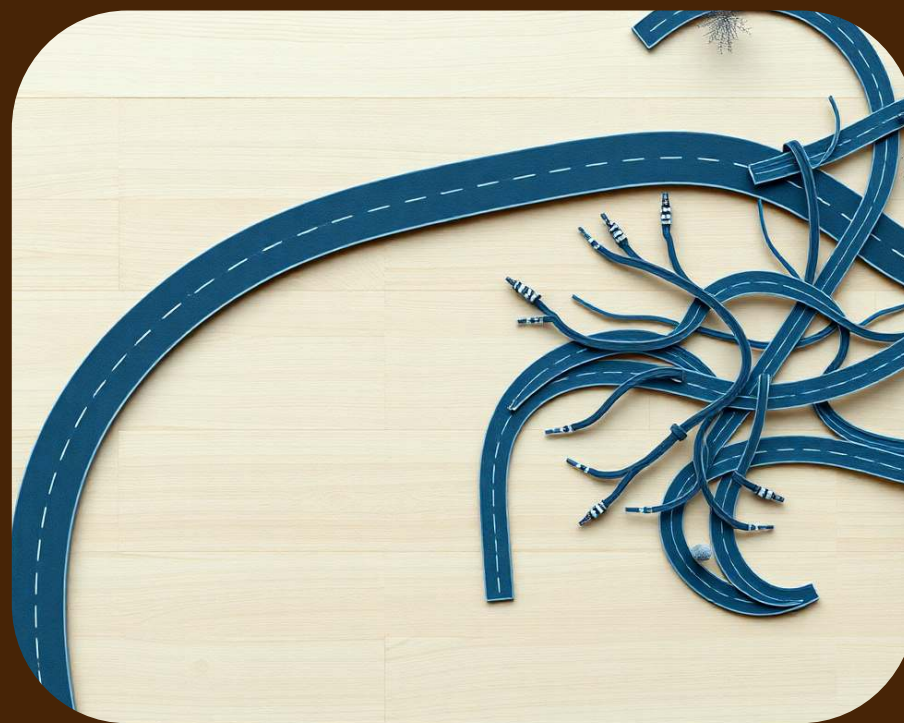
Перестановки в задачах на вероятность

Перестановки и вычислительные задачи в информатике



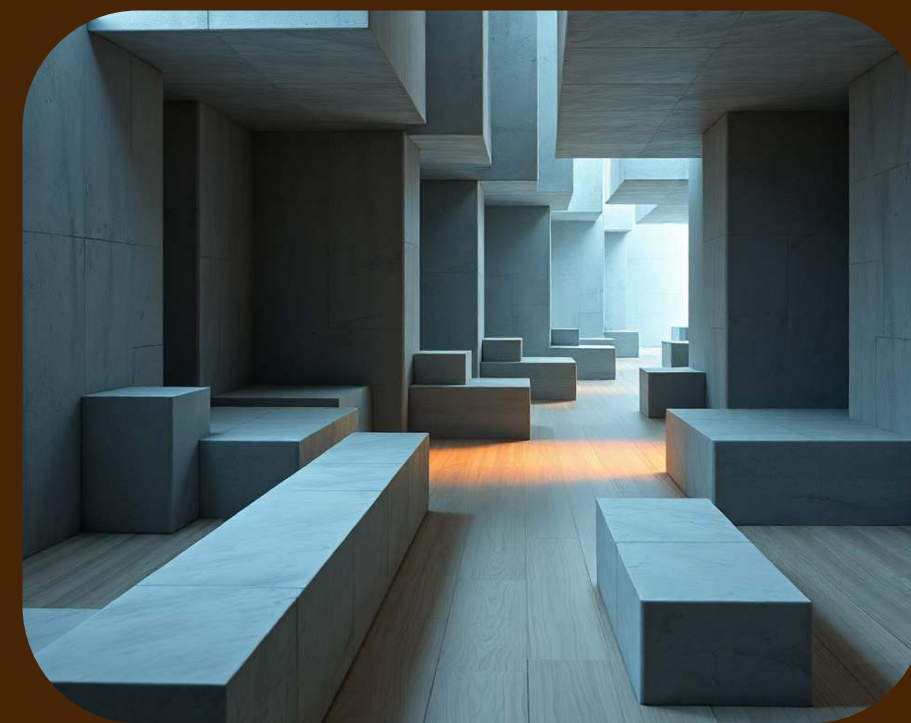
Когда вариантов слишком много

В информатике перебор перестановок часто появляется в задачах, где нужно проверить все возможные порядки объектов. Уже для десяти элементов получается 3 628 800 вариантов, поэтому прямой перебор быстро становится слишком долгим. Именно здесь комбинаторный счёт помогает оценить сложность задачи заранее.



Маршруты и тестирование

При поиске лучшего маршрута программа может сравнивать разные последовательности посещения точек. В тестировании и анализе шифров также приходится рассматривать множество вариантов, чтобы не пропустить важную конфигурацию. На схеме это удобно показывать деревом перебора или набором маршрутов.



Алгоритм важнее полного перебора

Если число перестановок растёт слишком быстро, программисту нужны не только вычисления, но и умные ограничения: отсечение лишних ветвей, проверка условий и выбор более короткого пути поиска. Поэтому знание факториала полезно не только в математике, но и при разработке алгоритмов.

Слова как перестановки букв

Примеры показывают, как повторяющиеся буквы уменьшают число различных упорядочений.

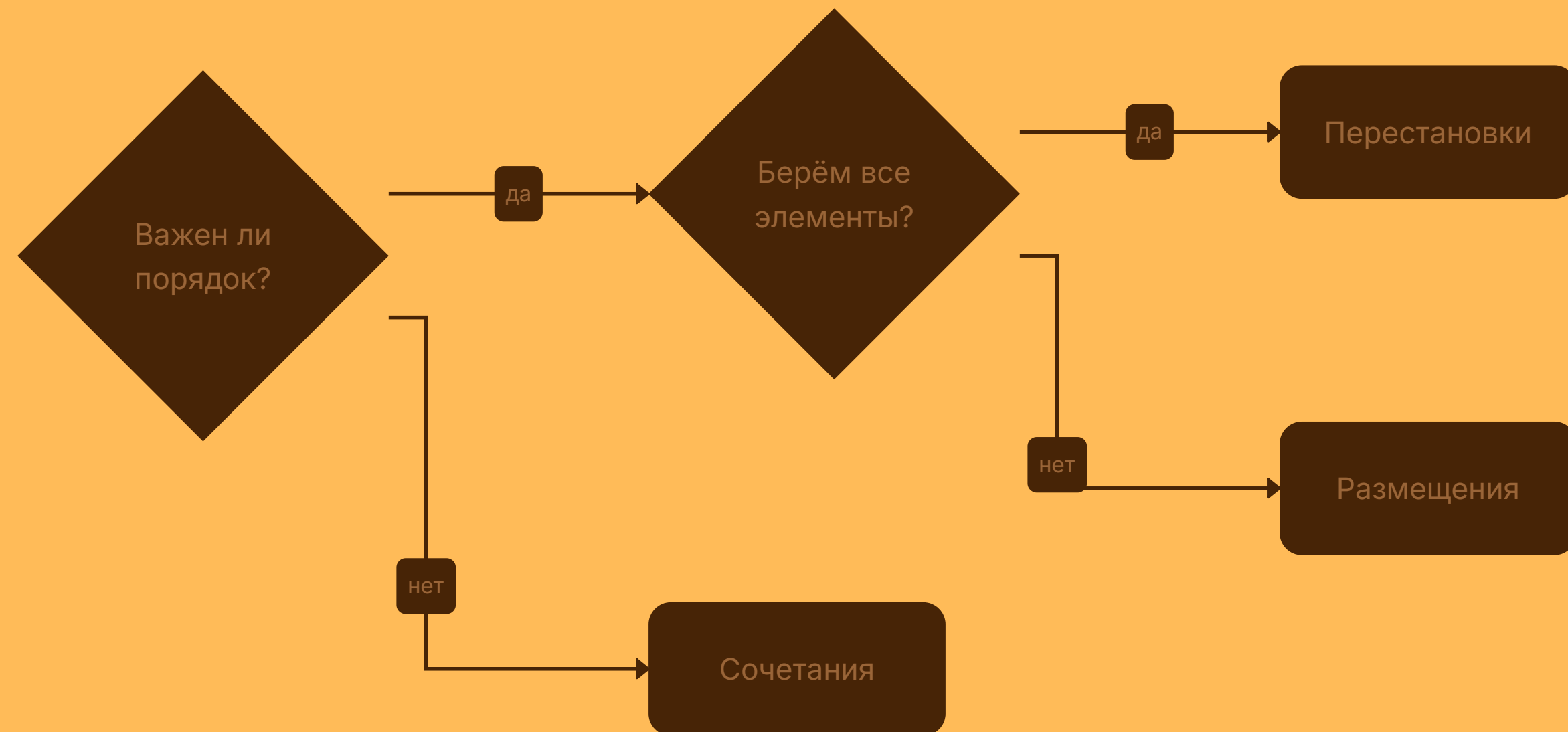
При одинаковом числе букв результат может сильно отличаться: решающим становится наличие повторов, а не только длина слова.

Формулы перестановок без повторений и с повторениями

Слово	Букв	Повторы	Перестановки
КОТ	3	нет	6
мама	4	м, а	6
компас	6	нет	720
математика	10	есть	меньше 10!

Как отличить перестановки, размещения и сочетания

Схема выбора формулы по двум признакам: важен ли порядок и используются ли все элементы набора.



Типичные ошибки при решении задач

.1

Игнорирование повторов

Нередко формулу $n!$ применяют автоматически, даже когда в наборе есть одинаковые элементы. В таких случаях нужно делить на факториалы повторяющихся букв или предметов, иначе ответ окажется завышенным.

.2

Путаница с сочетаниями

Ещё одна ошибка — не заметить, что порядок либо важен, либо нет. Если меняется только состав группы, а не очередность, формула перестановок уже не подходит.

.3

Неверное обращение с нулём

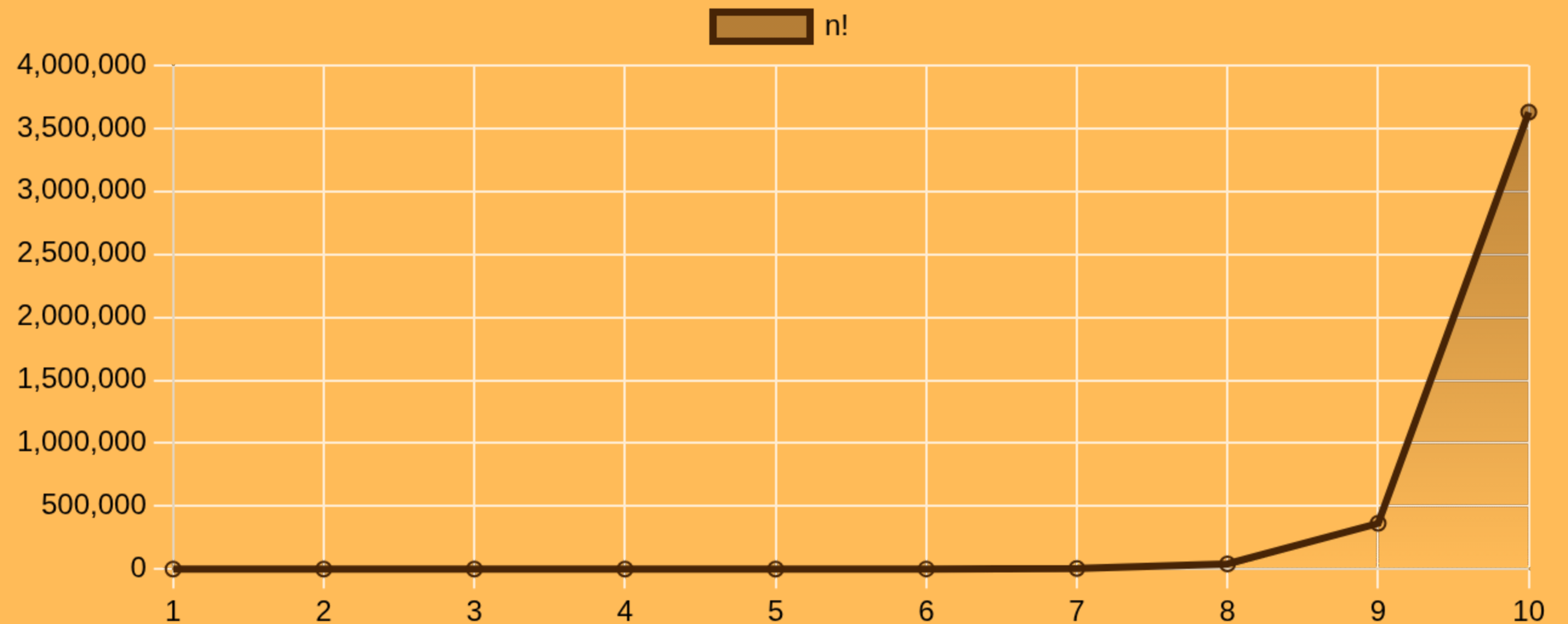
Иногда забывают, что $0! = 1$, хотя это значение необходимо в формулах комбинаторики. Проверка смысловой модели задачи помогает избежать механического счёта и неверного результата.

Взрывной рост факториала

Даже небольшое увеличение n резко расширяет пространство перебора, поэтому в реальных задачах часто нужны оценки и сокращающие алгоритмы.

После 7 элементов рост становится особенно стремительным; полный перебор быстро выходит за рамки практического времени вычислений.

Значения факториала для $n = 1 \dots 10$ по определению $n!$



Историческое развитие комбинаторики



От игр к точному счёту

В XVII–XVIII веках интерес к перестановкам усилился вместе с развитием теории вероятностей. Математики искали способы точно считать исходы в азартных играх и распределять объекты без перебора. Так возникла потребность в общих правилах подсчёта, которые затем вошли в комбинаторику.



Идеи, пережившие эпоху

Методы подсчёта вариантов быстро оказались полезны не только в задачах о костях и картах. Они стали инструментом для шифрования, анализа последовательностей и описания симметрии. На старинных гравюрах и рукописях эта тема обычно связана с первыми работами по вероятности.

Мини-практикум: вычисление числа перестановок

Вычислите ответы и сравните, насколько быстро растёт число упорядочений.

Добавление всего одного объекта заметно увеличивает число вариантов, поэтому факториал быстро приводит к большим значениям даже в коротких задачах.

Базовые формулы перестановок и перестановок с повторениями

Задача	Формула	Ответ
4 книги	$4!$	24
6 учеников	$6!$	720
рамка	$5! / 2!$	60
7 значков	$7!$	5040

Практическое значение перестановок



Расписание и очередность

Перестановки помогают упорядочивать уроки, выступления и дежурства. В таких задачах важно не просто выбрать участников, а определить точную последовательность действий.



Маршруты и оптимизация

При планировании маршрутов перебирают разные порядки посещения пунктов. Комбинаторный подход позволяет оценить число вариантов и понять, почему нужен умный поиск, а не случайный перебор.



Коды и криптография

В анализе кодов и шифров порядок символов имеет решающее значение. Поэтому перестановки помогают описывать структуру сообщений и оценивать количество возможных комбинаций.

Итоги урока: главное о перестановках

Перестановка — это упорядочение всех элементов набора. Для различных объектов работает формула $n!$, а при повторениях нужно учитывать одинаковые элементы. Главный ориентир — важен ли порядок.