

Числовая окружность на координатной плоскости: углы, координаты и тригонометрия



От угла к точке: на единичной окружности $\sin$ и $\cos$ читаются прямо по координатам.

Зачем числовая окружность в 10 классе



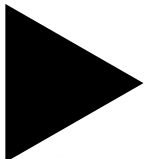
Числовая окружность — базовая модель школьной тригонометрии. Она помогает связать углы, повороты и координаты точек, потому что радиус фиксирован и равен 1. Благодаря этому геометрия, алгебра и графики работают как единая система.



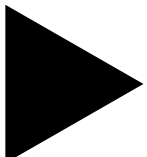
Определение числовой окружности и способ отсчёта углов



Числовая окружность — это окружность радиуса 1 с центром в начале координат $O(0;0)$. Она задаёт удобную геометрическую «сцену» для тригонометрии без лишних чисел.



Начальная точка отсчёта углов находится в точке $(1;0)$ на положительной полуоси Ox . От неё начинается поворот, который связывает геометрию с последующими вычислениями.



Положительное направление отсчёта углов — против часовой стрелки, отрицательное — по часовой стрелке. Каждому значению угла соответствует единственная точка на окружности.

Единичная окружность на координатной плоскости

Геометрическая разметка

На координатной плоскости отмечают оси Ox и Oy , центр окружности $O(0;0)$ и радиус 1. Также выделяются четыре четверти, чтобы проще определять знаки координат.

Координаты как тригонометрия

Если точка получена поворотом на угол α от начальной позиции $(1;0)$, то её координаты равны $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Поэтому x задаёт косинус, а y — синус, а по направлению видно, как меняется α .

Основные углы и их координаты на окружности

Для стандартных углов легко выписываются координаты точки на окружности и значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. Эти ориентиры удобно восстанавливать по симметрии и поворотам.

Базовые значения удобно запоминать блоками: четверть-оборот ($\pi/2$), половина (π) и полный оборот (2π) задают точные координаты без вычислений.

α (градусы)	α (радианы)	Точка ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$)
0°	0	(1;0)
30°	$\pi/6$	($\sqrt{3}/2$; $1/2$)
45°	$\pi/4$	($\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$)
60°	$\pi/3$	($1/2$; $\sqrt{3}/2$)
90°	$\pi/2$	(0;1)
180°	π	(-1;0)
270°	$3\pi/2$	(0;-1)
360°	2π	(1;0)

Школьный курс математики (10 класс), определение координат точки на единичной окружности

$$1^\circ = \pi/180$$

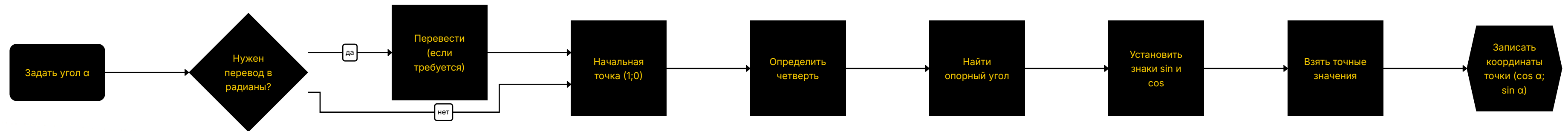
рад

Поэтому любой поворот на окружности можно переводить в радианы и сразу использовать в формулах тригонометрии.

На единичной окружности длина дуги совпадает по числу со значением центрального угла в радианах. Это делает радианы естественными для записи тригонометрических соотношений.

Как по углу найти точку на числовой окружности

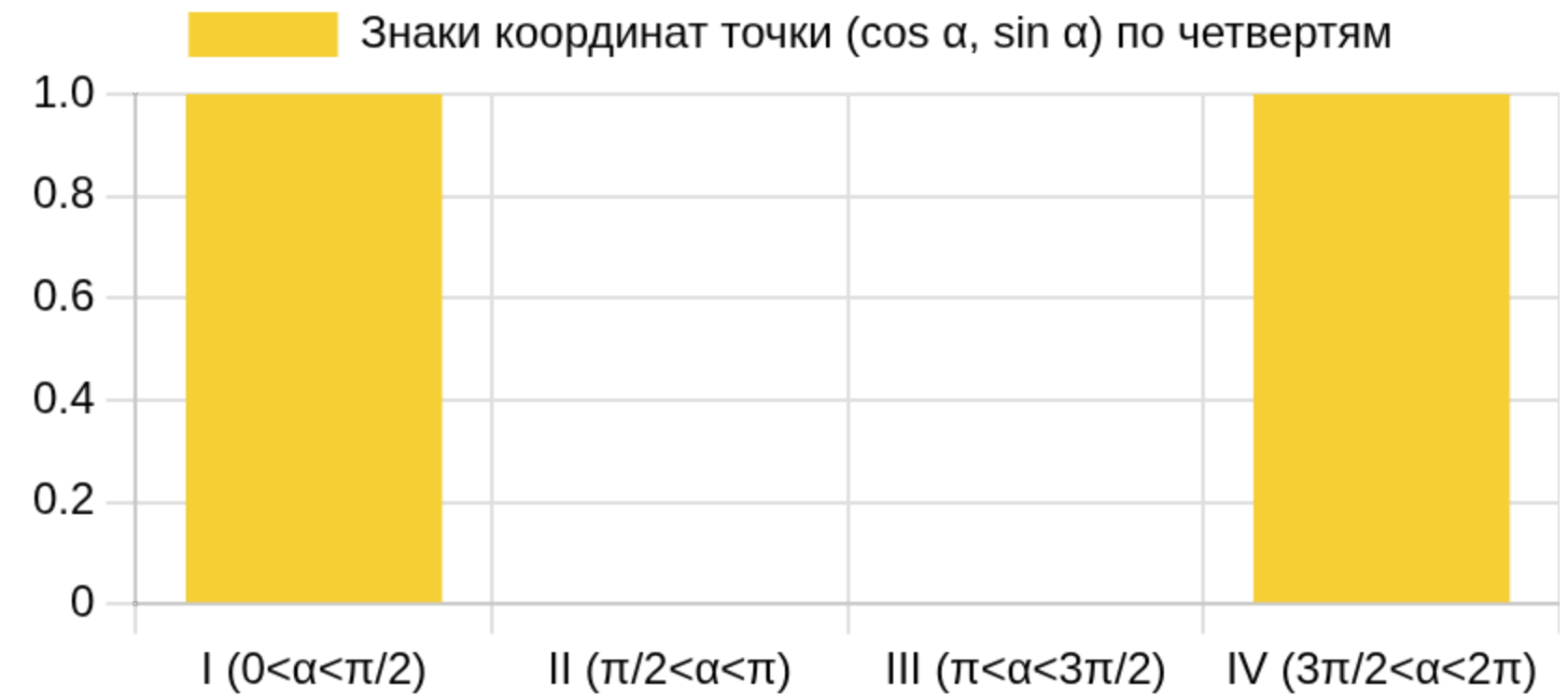
Алгоритм работы с координатами: угол $\rightarrow$ четверть $\rightarrow$ знаки $\rightarrow$ опорный угол $\rightarrow (\cos \alpha; \sin \alpha)$.



Знаки координат в разных четвертях

Для точек на окружности знаки определяются только четвертью: $\cos$ отвечает за x , $\sin$ — за y . На осях одна координата равна нулю.

Комбинации знаков строго чередуются по окружности, поэтому при чтении координат достаточно установить четверть и применить правило знаков.

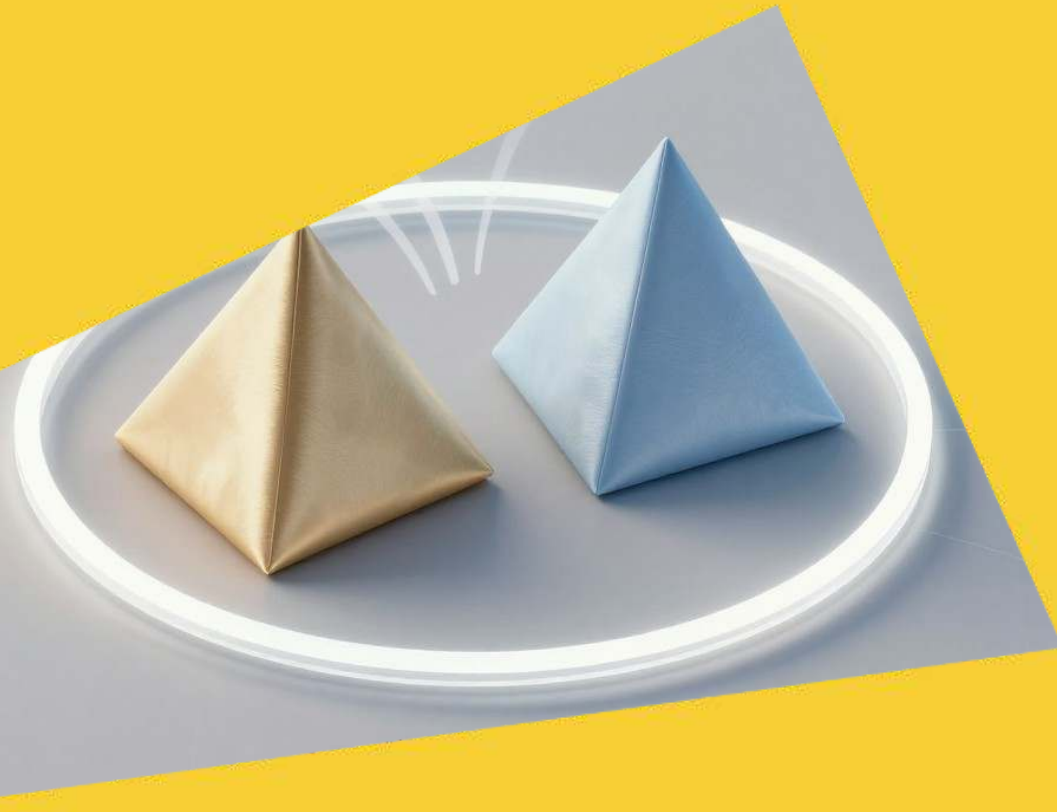


Самостоятельный расчёт по определению ($x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$) и разметке четвертей

Симметрия точек и изменение знаков

- ▶ Отражение относительно оси Oy меняет координаты так, что x меняет знак, а y сохраняет. Следовательно, для тригонометрии это означает смену знака косинуса при неизменном синусе.
- ▶ Если выполнить отражение относительно оси Ox , то меняется знак y , то есть меняется знак синуса, а косинус остаётся тем же. Этот приём помогает переносить известные значения между четвертями.
- ▶ При симметрии относительно начала координат точка переходит в противоположную: оба знака координат меняются одновременно. Поэтому одновременно меняют знак и $\sin$, и $\cos$.
- ▶ Используя эти соответствия, можно быстро восстановить значения функций и координаты точки на окружности, не повторяя вычисления заново.

Опорные углы 30° , 45° и 60°



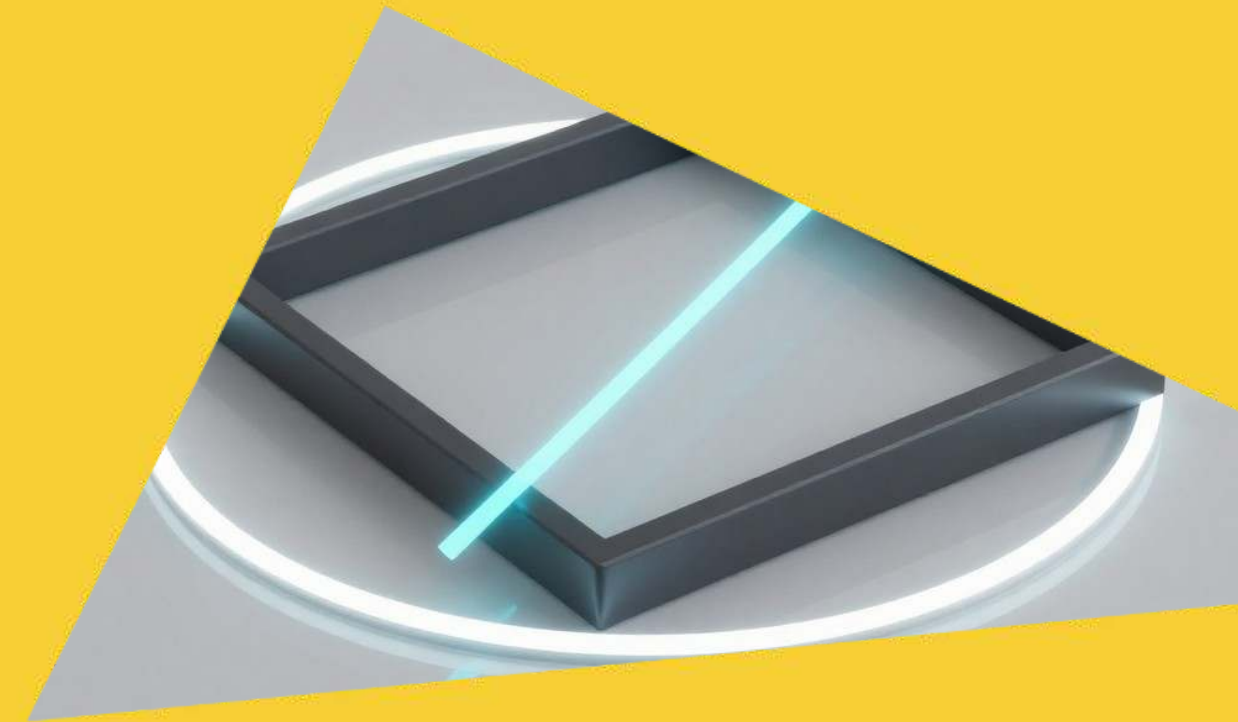
Треугольники-опоры внутри окружности

Внутри единичной окружности удобно «посадить» равнобедренный и равносторонний треугольники. Их свойства подсказывают точные координаты точек, полученных поворотами на 30° , 45° и 60° . Так рисунок превращается в готовые значения $\sin$ и $\cos$.



От 30° к $\sqrt{3}$ без калькулятора

Угол 30° связан с соотношениями в равнобедренном треугольнике: появляется дробь и корень $\sqrt{3}$. В результате точка на окружности получает координаты $(\sqrt{3}/2; 1/2)$. Этот «шаблон» дальше применяют по симметрии.



45° как половина диагонали квадрата

Для 45° естественный образ — квадрат, диагональ которого пересекает единичную окружность. Тогда координаты становятся равными: $\sin 45^\circ$ и $\cos 45^\circ$ выражаются одним корнем $\sqrt{2}/2$. Понимание этой геометрии ускоряет решения на окружности.

Точные значения синуса, косинуса и тангенса для основных углов

Угол α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	не опр.
180°	0	-1	0
270°	-1	0	не опр.
360°	0	1	0

Таблица сводит точные значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ для ключевых углов школьной тригонометрии. Для углов 90° и 270° тангенс не определён, так как соответствующая точка имеет $\cos \alpha = 0$.

Точные значения удобно читать как координаты точки на единичной окружности: $\sin \alpha$ отвечает за y , $\cos \alpha$ — за x ; $\operatorname{tg} \alpha$ существует только там, где $\cos \alpha \neq 0$.

Переход от градусов к радианам

► Связь градусной и радианной мер задаётся равенством $180^\circ = \pi$ рад. Поэтому перевод можно выполнять через одну пропорцию: $1^\circ = \pi/180$ рад.

◄ Отсюда сразу следуют основные соответствия: $30^\circ = \pi/6$, $45^\circ = \pi/4$, $60^\circ = \pi/3$. Такие замены часто требуются при вычислениях в формулах тригонометрии.

▼ Радианная мера особенно помогает в преобразованиях выражений и при работе с производными: в дифференциальном исчислении естественно появляются именно радианы.

Периодичность синуса и косинуса на окружности

При увеличении угла на 2π точка на окружности возвращается в то же положение, поэтому координаты x и y повторяются без изменений.

Период 2π означает, что значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ повторяются через полный оборот, а экстремумы ± 1 и нули появляются регулярно.



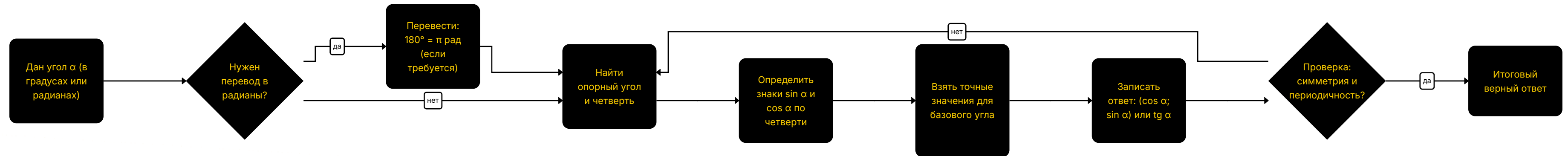
Единичная окружность ($x=\cos \alpha$, $y=\sin \alpha$), закономерности следуют из геометрии точки на окружности.

Типичные ошибки при работе с числовой окружностью

- ▶ Самая распространённая ошибка — путаница между градусами и радианами: при неверном переводе меняется положение точки и, как следствие, знаки и значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.
- ▶ Встречается и обратная подмена координат: x ошибочно принимают за $\sin \alpha$, а y — за $\cos \alpha$. Из-за этого даже при правильном угле ответ может получиться «почти правильным», но неверным по сути.
- ▶ Часто ошибаются с четвертью: если неверно определить, в каком секторе лежит точка, то один из признаков координат x или y окажется противоположным истинному.
- ▶ Наконец, путают направление отсчёта и отрицательные углы. Например, углы, измеренные от точки $(1;0)$ в одну сторону, нельзя считать теми же, что при отсчёте в противоположном направлении.

Алгоритм решения задач на числовой окружности

Порядок действий опирается на единичную окружность и связь координат с формулами $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$.



Типовые задания по теме в 10 классе

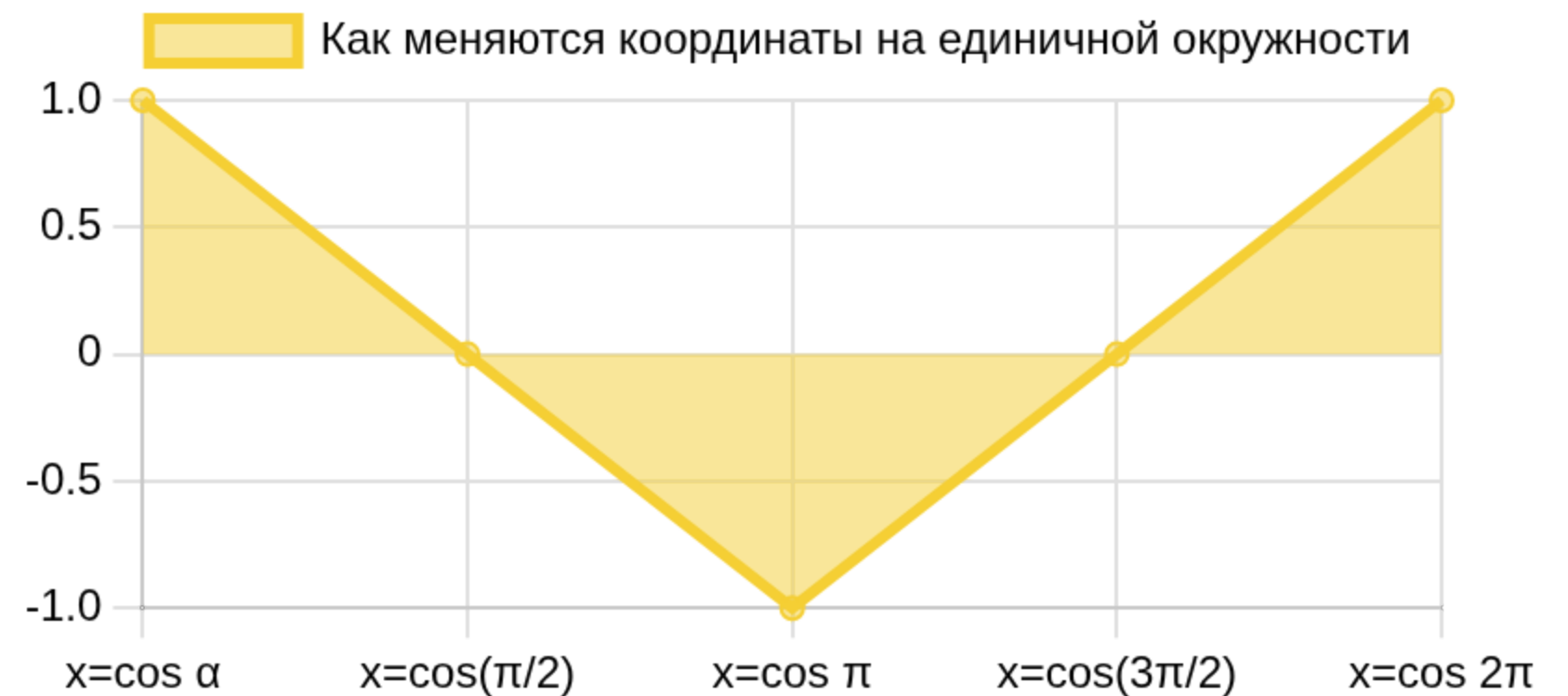
- 1 Встречаются задачи на нахождение координат точки на единичной окружности по заданному углу: требуется определить $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, а затем записать пару $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Часто углы берутся из набора $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, π и их симметричные положения.
- 2 Также просят определять значение тригонометрической функции по отмеченной точке или, наоборот, восстанавливать угол по координатам. На рисунках обычно показан фрагмент единичной окружности с отмеченной точкой и подписью угла.



Связь координат точки и значений тригонометрических функций

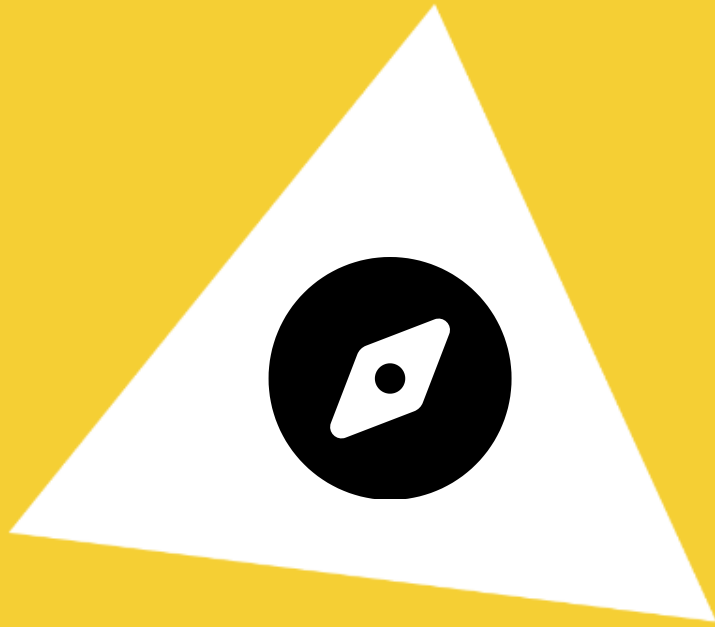
Если рассматривать движение точки по окружности, то x сразу читается как $\cos \alpha$, а y — как $\sin \alpha$, причём смена знаков совпадает с переходом между четвертями.

Геометрическая интерпретация объясняет вычисления: значения функций — это координаты точки, поэтому симметрия на окружности автоматически даёт соответствующие изменения знаков.



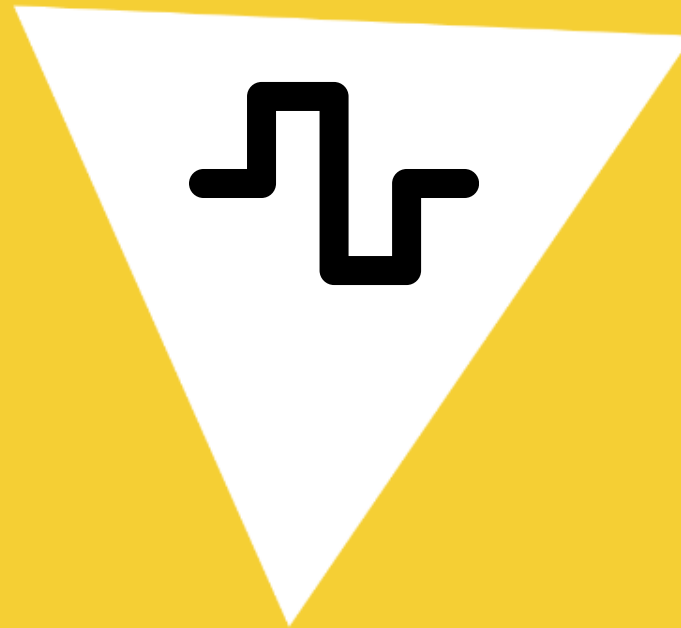
Единичная окружность: $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$; закономерности вытекают из положения точки при повороте.

Практическое значение числовой окружности



Навигация и ориентация

Положение «направления» задаётся углом, а его компоненты получают как координаты: косинус и синус дают проекции на оси, что удобно для задач курса и маршрутов.



Колебания и сигналы

Во многих моделях колебаний период задаётся повторением по углу, а амплитуда и фаза выражаются через $\sin$ и $\cos$. Единичная окружность помогает быстро анализировать форму графика.



Повороты фигур

При поворотах на плоскости удобно понимать изменение координат через угол: именно поэтому тригонометрия числовой окружности напрямую связана с преобразованиями в геометрии.



Компьютерная графика и анимации

Для движения объектов по траекториям используют параметры угла. Представление точки на окружности помогает получать координаты траектории без лишних вычислений.

Памятка по основным соответствиям

Краткая таблица помогает быстро связать угол с точкой на единичной окружности и сразу вспомнить значения $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Это ускоряет решение и проверку ответов без повторных построений.

Запоминание пяти опорных направлений (0° , 90° , 180° , 270° , 360°) позволяет быстро восстанавливать знаки и значения функций в соседних четвертях.

Угол α	Точка ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$)	Формула	Заметка
0°	(1;0)	$x=\cos \alpha$	$y=\sin \alpha$
90°	(0;1)	$x=\cos \alpha$	$y=\sin \alpha$
180°	(-1;0)	$x=\cos \alpha$	$y=\sin \alpha$
270°	(0;-1)	$x=\cos \alpha$	$y=\sin \alpha$
360°	(1;0)	$x=\cos \alpha$	возврат

Единичная окружность (радиус 1) и определение координат точки: $x=\cos \alpha$, $y=\sin \alpha$.

Числовая окружность связывает геометрию и тригонометрию в одном образе

Числовая окружность объединяет угол, координаты точки и значения тригонометрических функций: $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Она помогает находить знаки, точные значения, симметрии и периодичность без громоздких вычислений, закладывая фундамент для дальнейших тем.