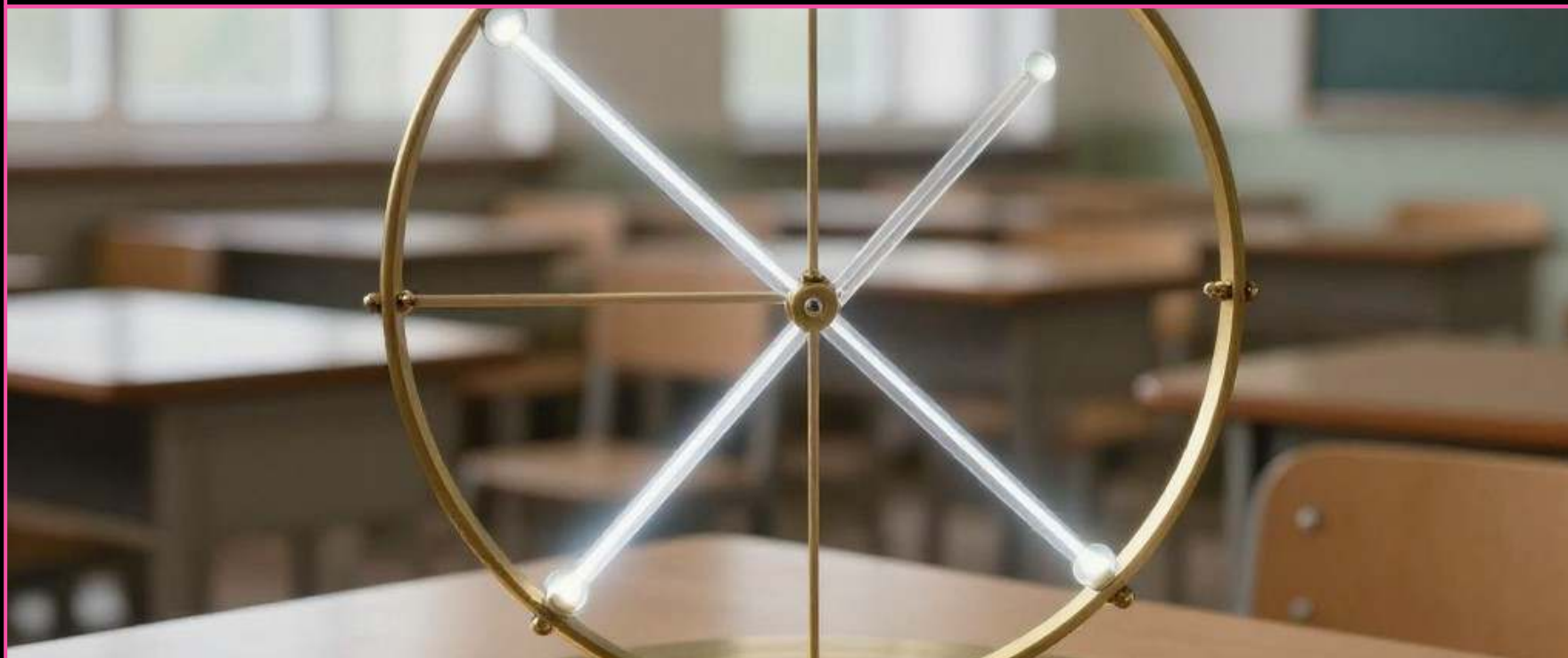


СУММА И РАЗНОСТЬ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ В ГЕОМЕТРИИ



На единичной окружности сумма и разность тригонометрических функций превращаются в удобные произведения.



ПОЧЕМУ ФОРМУЛЫ РАБОТАЮТ В ГЕОМЕТРИИ

Эти тождества изучают в 10 классе вместе с окружностью и координатами точек. Они связывают геометрический смысл ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$) с алгебраической записью и помогают решать задачи на длины, углы и доказательства.



ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ СИНУСОВ

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$. Здесь «сумма углов» переходит в полусумму, а «разность» – в полуразность, превращая сумму в произведение для быстрой оценки знаков.

01

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \sin((\alpha - \beta)/2)$. Важно не перепутать порядок: знак и структура произведения сразу показывают, когда выражение становится нулём.

02

Эти формулы особенно удобны для стандартных углов 30° , 45° , 60° : вычисления становятся точными и «короткими», а при доказательствах тождеств видно, к какой форме надо привести исходное выражение.

03

ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ КОСИНУСОВ

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$. Когда средняя часть углов одинакова по смыслу, выражение естественно сжимается до произведения косинусов.

01

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin((\alpha + \beta)/2) \sin((\alpha - \beta)/2)$. Минус перед произведением обязателен: он появляется из структуры тождества и часто «теряется» при записи.

02

Удобство особенно заметно, когда углы близки: полуразность мала, а одна из функций становится близкой к 1 или 0, поэтому упрощение получается «почти мгновенным».

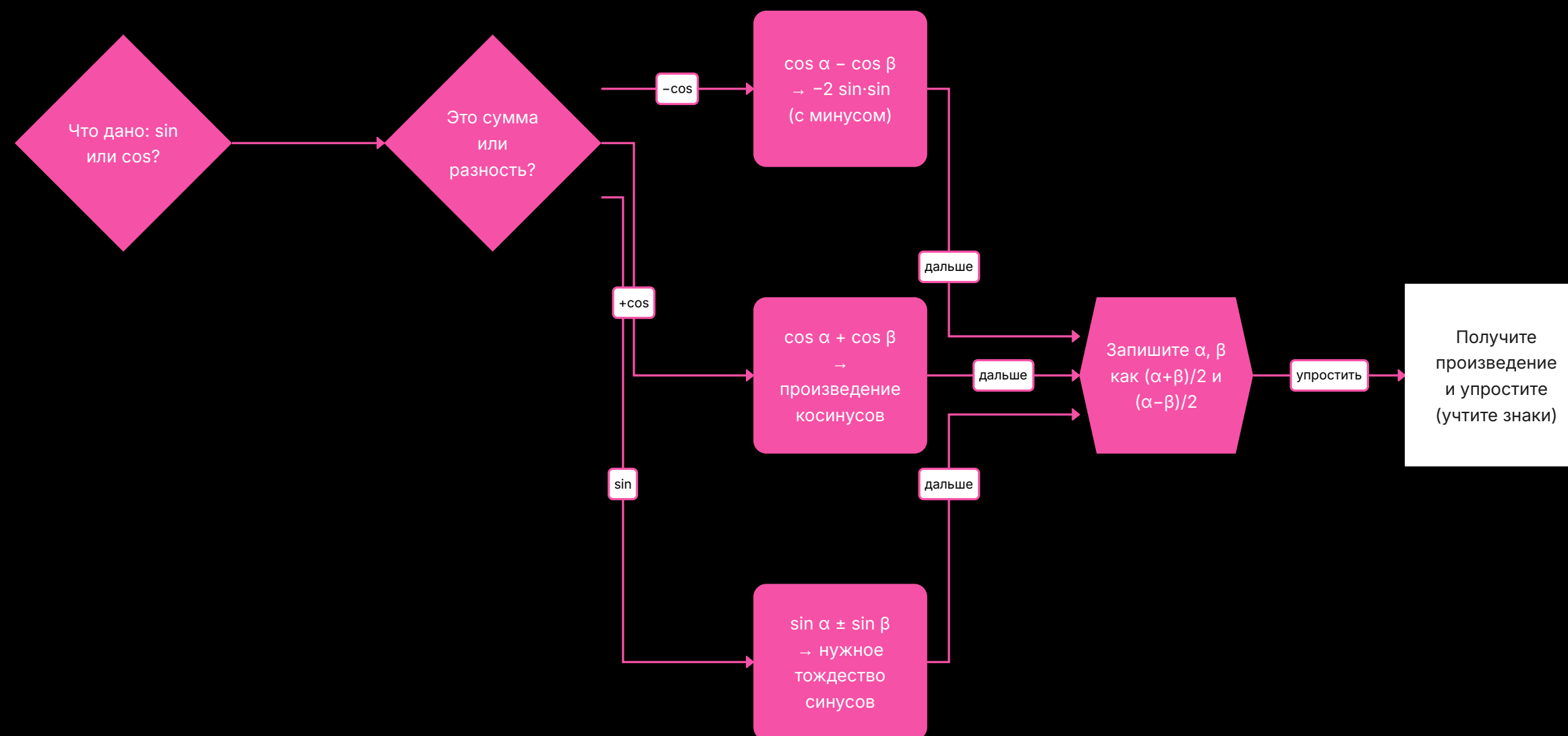
03

В задачах школьного уровня формулы применяют, чтобы перейти от суммы двух косинусов к произведению, а затем сократить выражения с симметричными углами без громоздких преобразований.

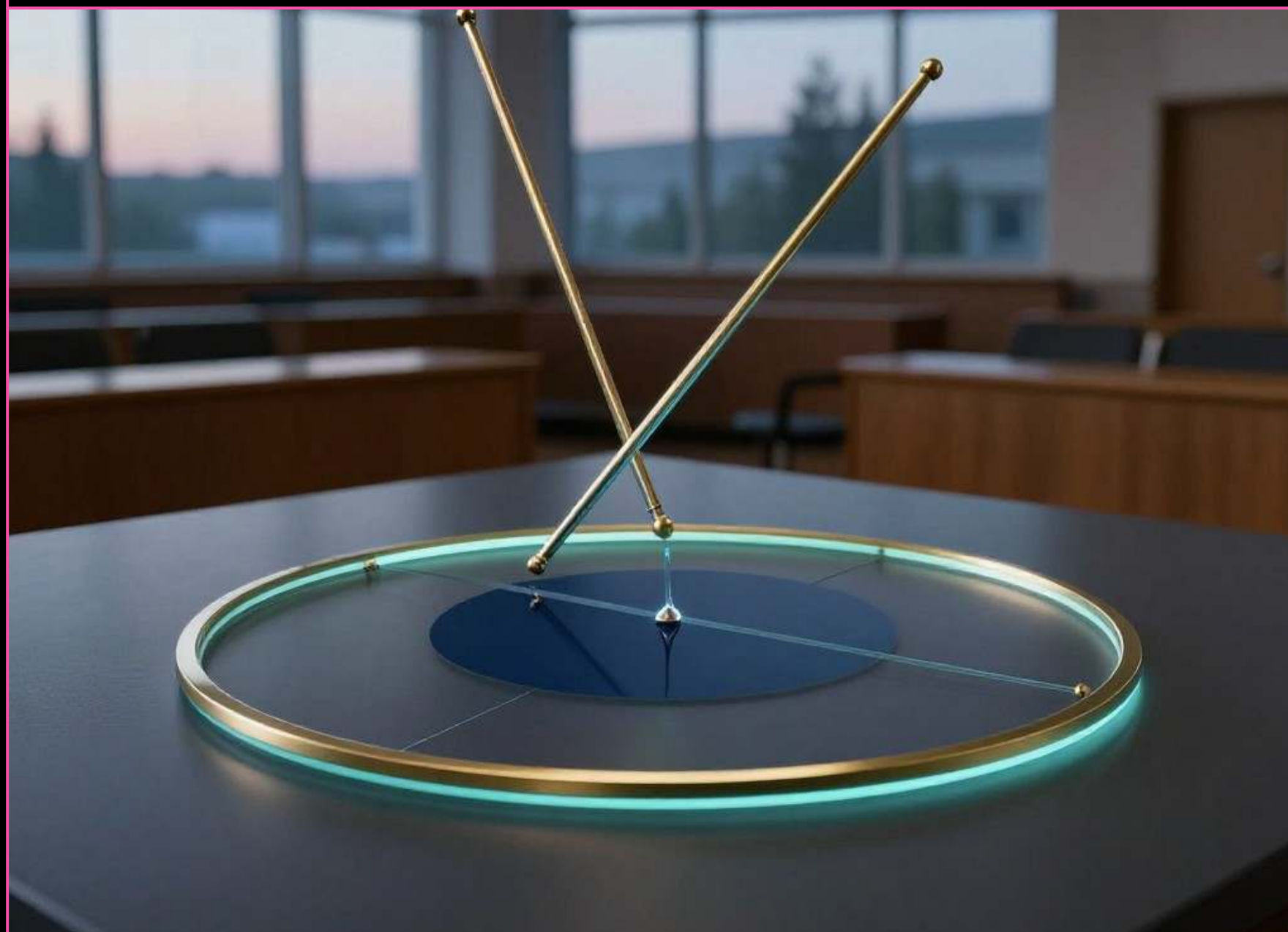
04

ВЫБОР ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРЕХОДА К ПРОИЗВЕДЕНИЮ

Определите тип выражения (сумма/разность и синусы/косинусы) – затем используйте соответствующее тождество и перейдите к полусумме и полуразности.



ЕДИНИЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОСНОВА



Координаты и поворот на угол

Точка, полученная поворотом радиуса на угол α , на единичной окружности имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Геометрический смысл тождеств связан с тем, как координаты меняются при сравнении двух углов.

Среднее направление и отклонение

Полусумма и полуразность углов естественно интерпретируются как «среднее положение» и «отклонение» между направлениями. Поэтому произведение в формулах возникает не случайно, а из симметрии точек и их проекций на оси.

ВЫВОД ФОРМУЛ ЧЕРЕЗ ФОРМУЛУ СЛОЖЕНИЯ

Начинают с более общей основы: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ и $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$. Это «родительские» тождества, из которых многое следует.

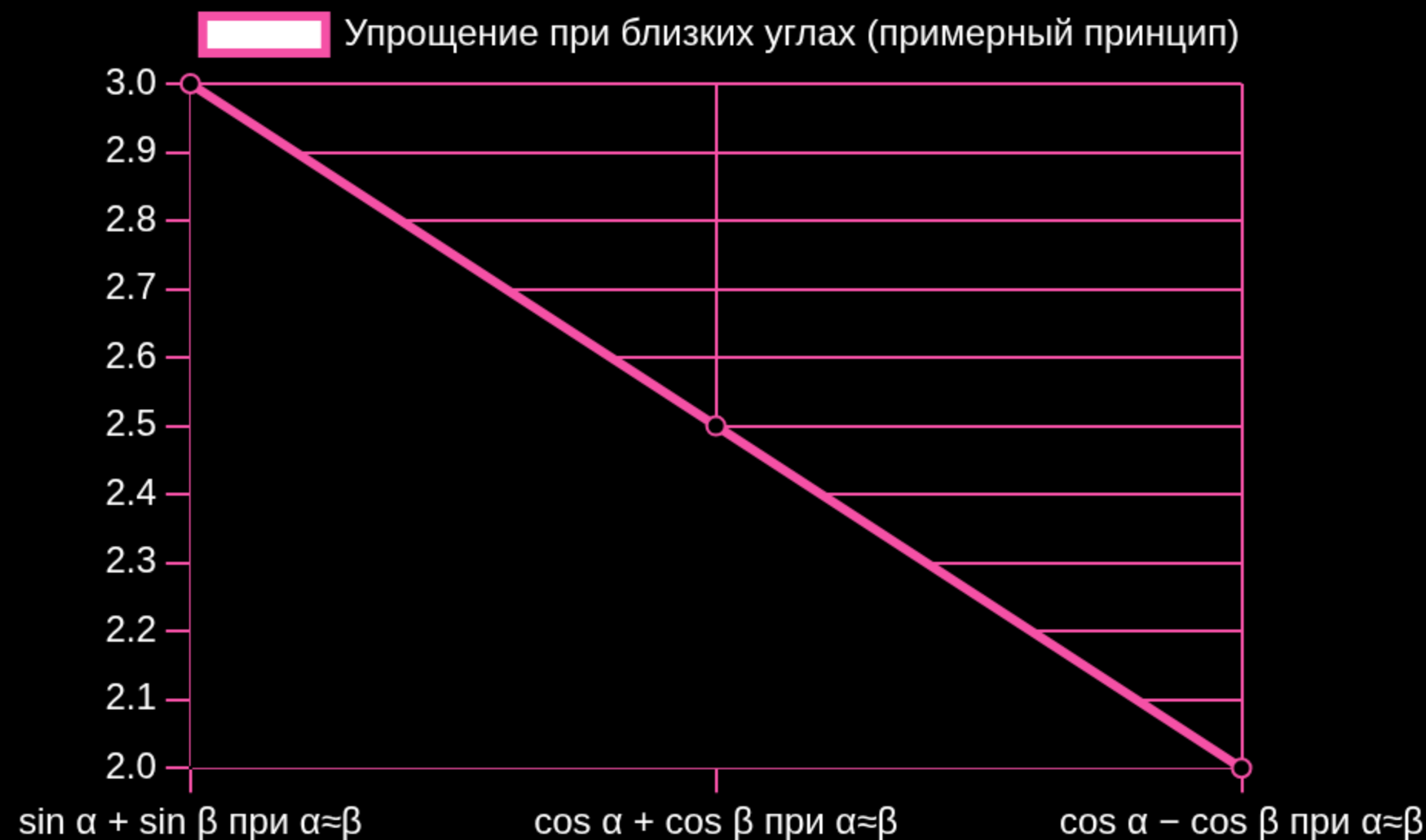
Далее вводят обозначения: $\alpha = (u + v)/2$ и $\beta = (u - v)/2$. Тогда выражения $\sin u$ и $\sin v$ (или $\cos u$ и $\cos v$) раскладываются через синусы и косинусы половинных сумм и разностей.

Так становится ясно, что формулы суммы и разности – не отдельные правила для запоминания. Они логически выводятся из формулы сложения, что особенно ценно при понимании и доказательствах.

КОГДА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАЁТ НАИБОЛЬШЕЕ УПРОЩЕНИЕ

В большинстве задач на преобразование выгодно искать полуразность $(\alpha - \beta)/2$: чем она меньше, тем проще итоговая форма произведения.

Идея диаграммы: при малом различии углов один множитель становится близким к 0 или 1, поэтому запись сокращается быстрее всего.



Собственный учебный разбор на основе примера $\alpha=50^\circ$, $\beta=40^\circ$ (без внешних данных).

СРАВНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Выражение	Произведение	Где полусумма/полуразность
$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \cdot \sin((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos((\alpha - \beta)/2)$	$\sin$ при полусумме; $\cos$ при полуразности
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cdot \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \sin((\alpha - \beta)/2)$	$\cos$ при полусумме; $\sin$ при полуразности
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cdot \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos((\alpha - \beta)/2)$	$\cos$ при полусумме и полуразности
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \cdot \sin((\alpha + \beta)/2) \cdot \sin((\alpha - \beta)/2)$	$-$ и $\sin$ при обоих (с полусуммой и полуразностью)

Таблица помогает не путать тип выражения и нужное тождество: структура произведения и знаки перед ним выбираются по виду исходной суммы или разности.

Ключевой вывод: сумма косинусов даёт произведение косинусов, а разность косинусов – обязательно отрицательное произведение двух синусов; это предотвращает типичные ошибки со знаками.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, КОТОРЫЕ УДОБНО ПРОВЕРЯТЬ

Если $\alpha = \beta$, то $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \alpha$ и $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \alpha$. Одновременно $\sin \alpha - \sin \beta = 0$ и $\cos \alpha - \cos \beta = 0$ – это быстрый тест корректности.

Если $\beta = -\alpha$, то $\sin \alpha + \sin \beta = 0$. А $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \alpha$, потому что косинус – чётная функция: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, и тождество сразу упрощается.

Когда углы симметричны относительно 45° или 30° , часто появляются корни из 2 или 3. Такие частные значения помогают «проверить себя» в стандартных задачах и быстрее увидеть ошибку.

$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) = \sqrt{6}/2$. ТАКИЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ СОХРАНЯЮТ ТОЧНОСТЬ ТАМ, ГДЕ КАЛЬКУЛЯТОР СКРЫВАЕТ СТРУКТУРУ.

$$\sqrt{6}/2$$

Это значение получается после последовательного применения формулы суммы и разности подстрочных функций, без десятичных приближений.

Собственные вычисления по формулам суммы синусов и известным точным значениям.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ В ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Когда в записи встречается сумма или разность двух синусов, формулы переводят выражение к виду произведения. Это сокращает длину алгебраической записи и делает преобразования более управляемыми.

01

Для дробей и выражений с корнями произведение часто удобнее, чем исходная сумма: проще сокращать общие множители и проверять, где знак влияет на итог. Ошибок становится заметно меньше.

02

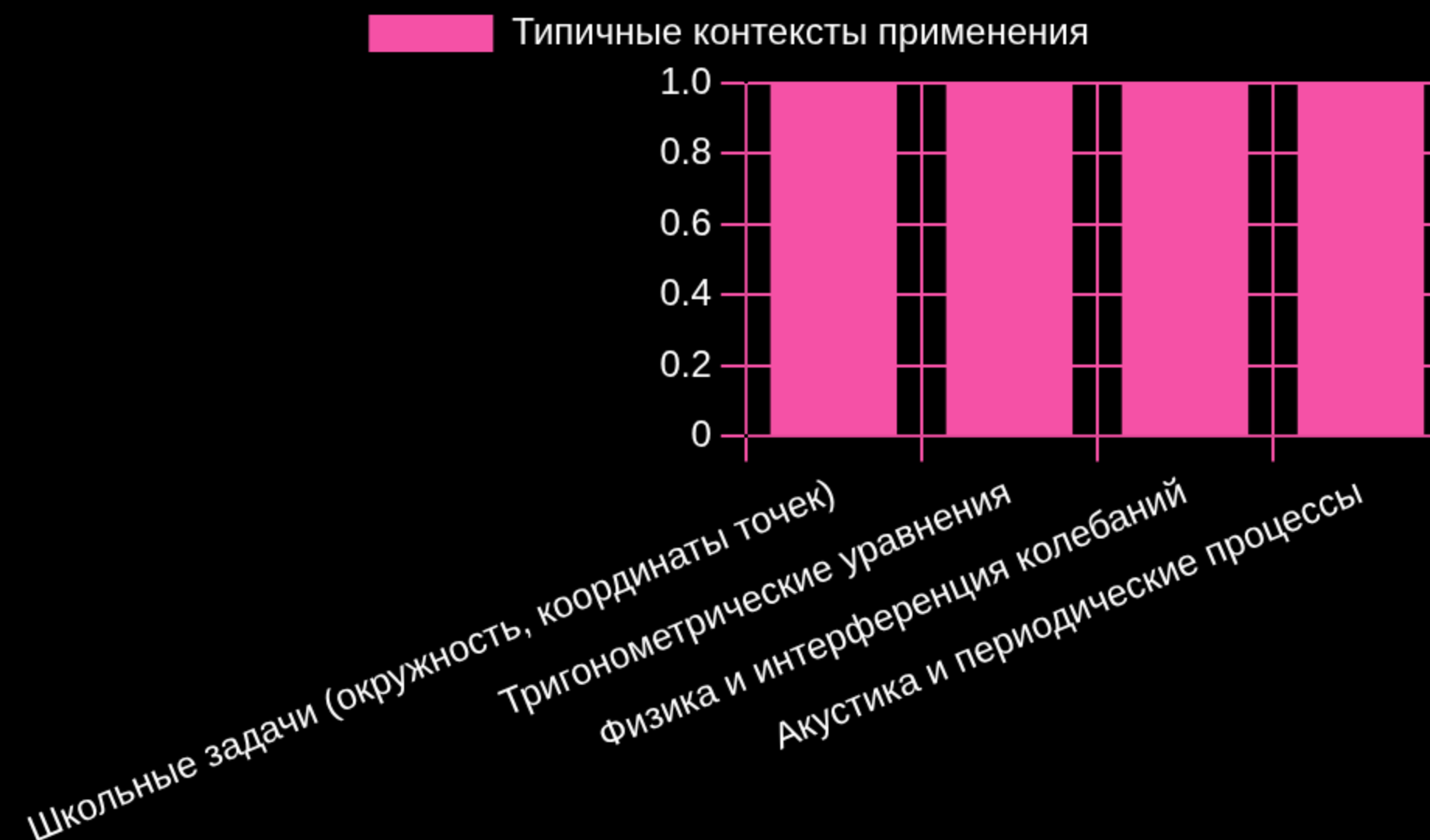
Особенно удачно работает подход, когда углы отличаются на 10° , 15° , 20° , 30° или 45° : тогда в полусуммах и полуразностях появляются стандартные значения, и вычисления выполняются почти автоматически.

03

ГДЕ ВСТРЕЧАЮТСЯ ТАКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

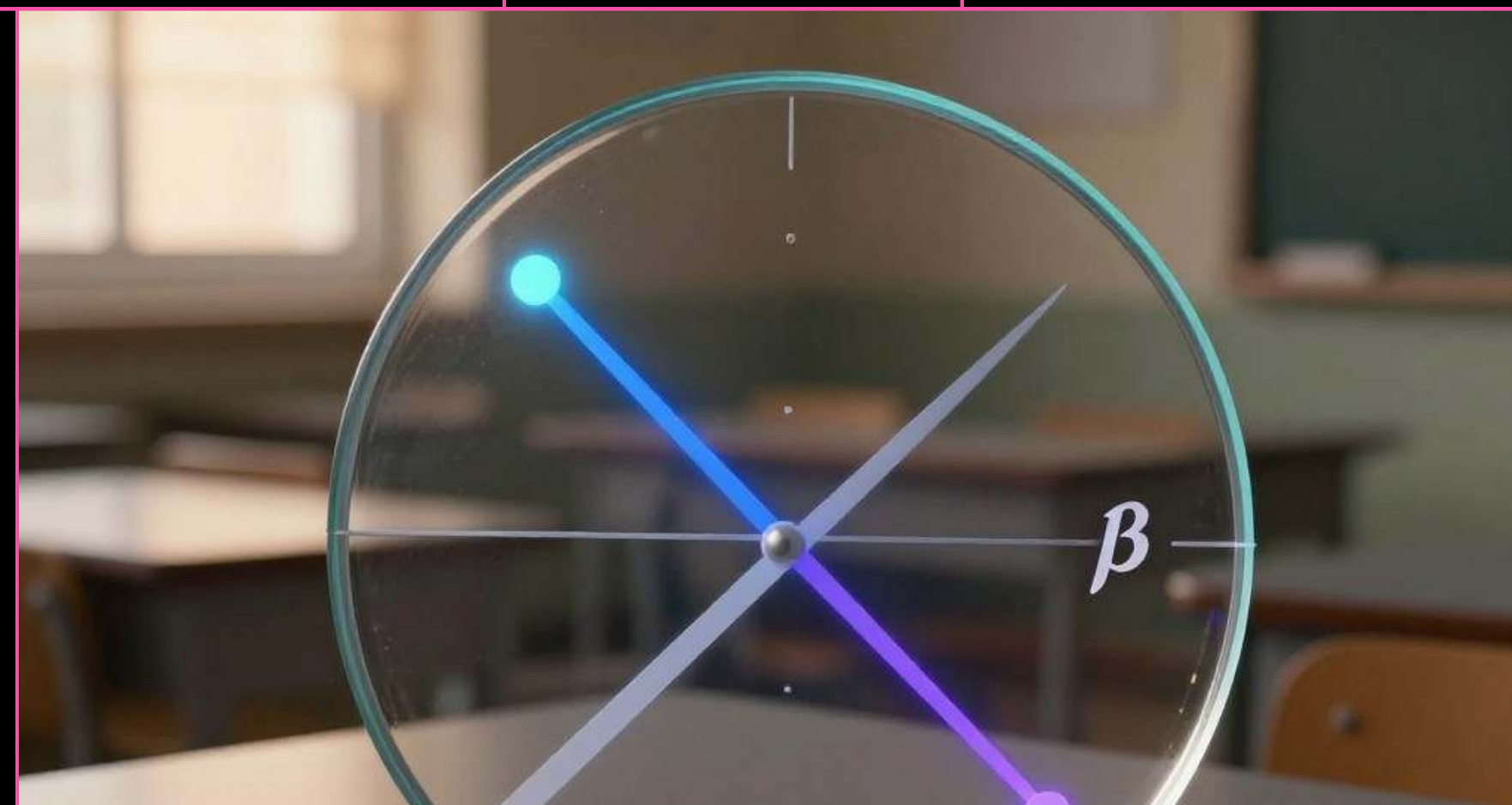
В каждом контексте идея одинакова: сумма тригонометрических выражений заменяется более простой формой, что облегчает анализ и вычисления.

Так как формулы переводят сумму в произведение, они помогают как в алгебраических преобразованиях, так и в геометрической интерпретации углов.



Обобщение областей применения из школьной программы и базовых физических моделей колебаний (без внешних статистических

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧЕРЕЗ ХОРДЫ И ПРОЕКЦИИ



ПРОЕКЦИИ ТОЧЕК НА ОСЯХ

Рассмотрим две точки на единичной окружности, соответствующие углам α и β . Их координаты дают множители $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \beta$, а хорды между точками связывают эти координаты с расстояниями.

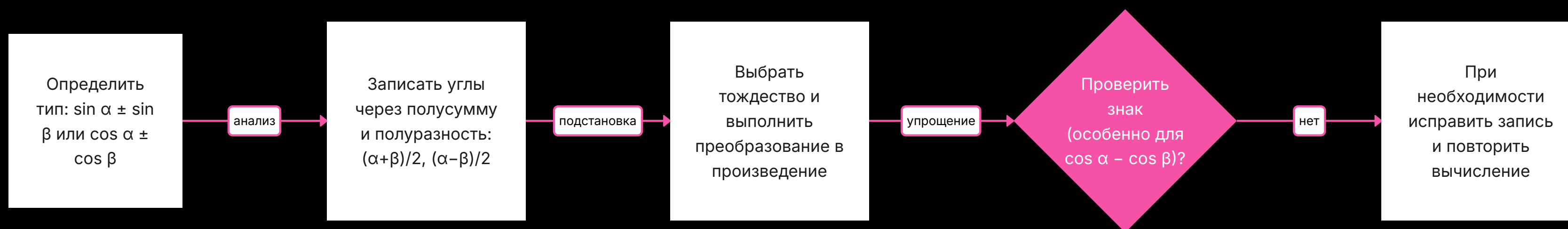
ПОЛУСУММА И ПОЛУРАЗНОСТЬ КАК «СРЕДНЕЕ» И «ОТКЛОНЕНИЕ»

Если мысленно «усреднить» направления двух радиусов, получится полусумма углов. Если же оценить, насколько одно направление отклоняется от среднего, появится полуразность — отсюда и возникают произведения и различающиеся знаки в тождествах.



АЛГОРИТМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ

Логика работы: классифицируйте выражение, перейдите к полусумме/полуразности, примените нужное тождество и проверьте знак.



Типичные ошибки при применении формул

Самая частая ловушка – перепутать полусумму и полуразность: вместо $(\alpha + \beta)/2$ использовать $(\alpha - \beta)/2$. Тогда меняется структура произведения, и тождество уже не сходится.

Вторая ошибка связана с формулой разности косинусов: знак «минус» перед произведением нужно сохранять. Пропуск приводит к тому, что итог получается с противоположным знаком.

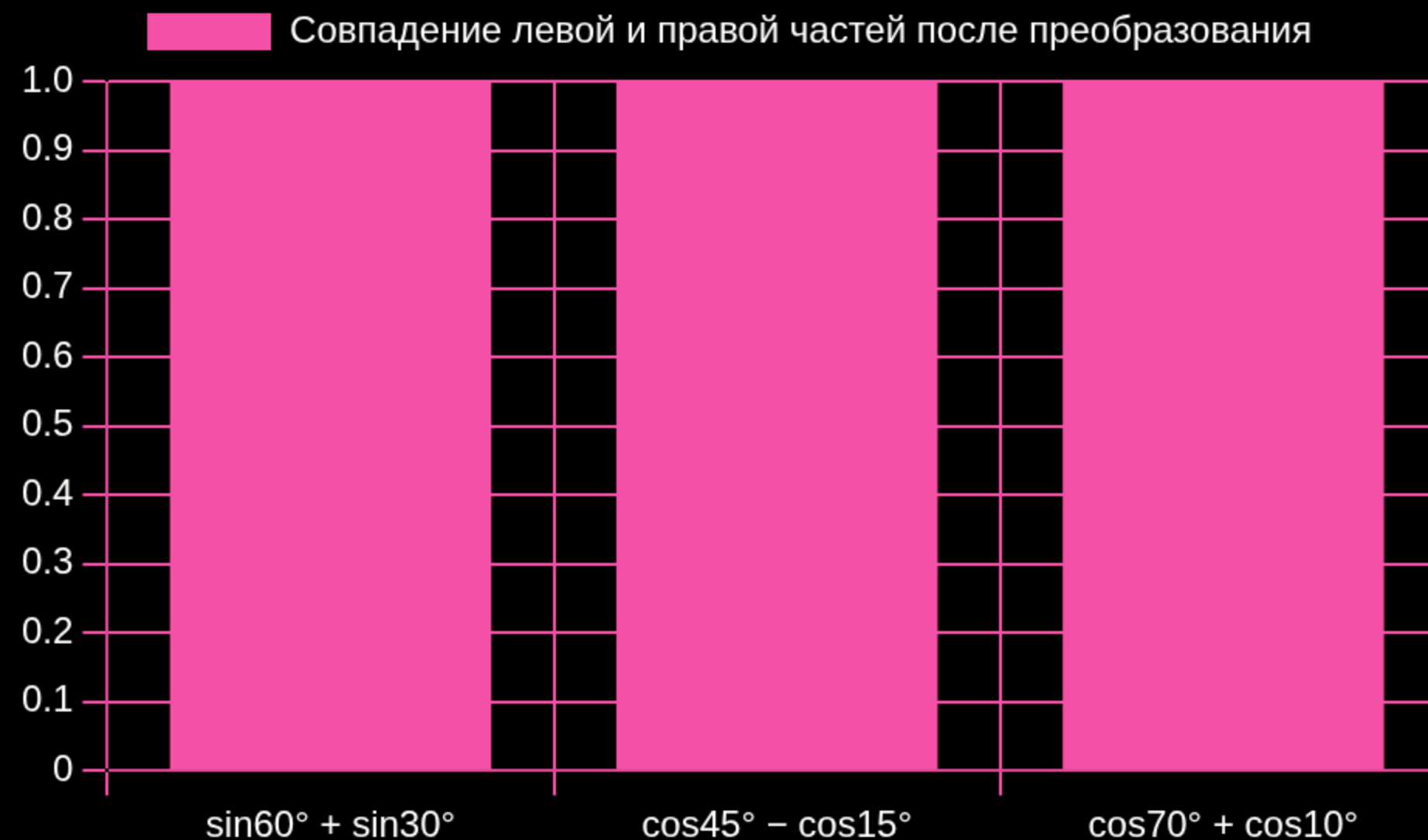
Третья проблема возникает при подстановке отрицательных углов: важно помнить чётность косинуса и нечётность синуса, иначе «правильная» формула даст неверный числовой результат.

Быстрая самопроверка – рассмотреть частные случаи $\alpha = \beta$ и $\beta = -\alpha$. Если при них получается не ноль там, где он ожидается, или не удвоение там, где оно должно быть, значит, запись сделана неверно.

ПРОВЕРКА ТОЖДЕСТВ НА КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРАХ

Для каждого примера сравниваются значения исходного выражения и результата после замены суммы на произведение.

Если все три столбца показывают совпадение, значит формула выбрана верно и знак при произведении не потерян.



Учебные примеры с преобразованием по формулам суммы синусов и косинусов (дата не применима, без внешних данных).



КРАТКАЯ ПАМЯТКА ПО ФОРМУЛАМ

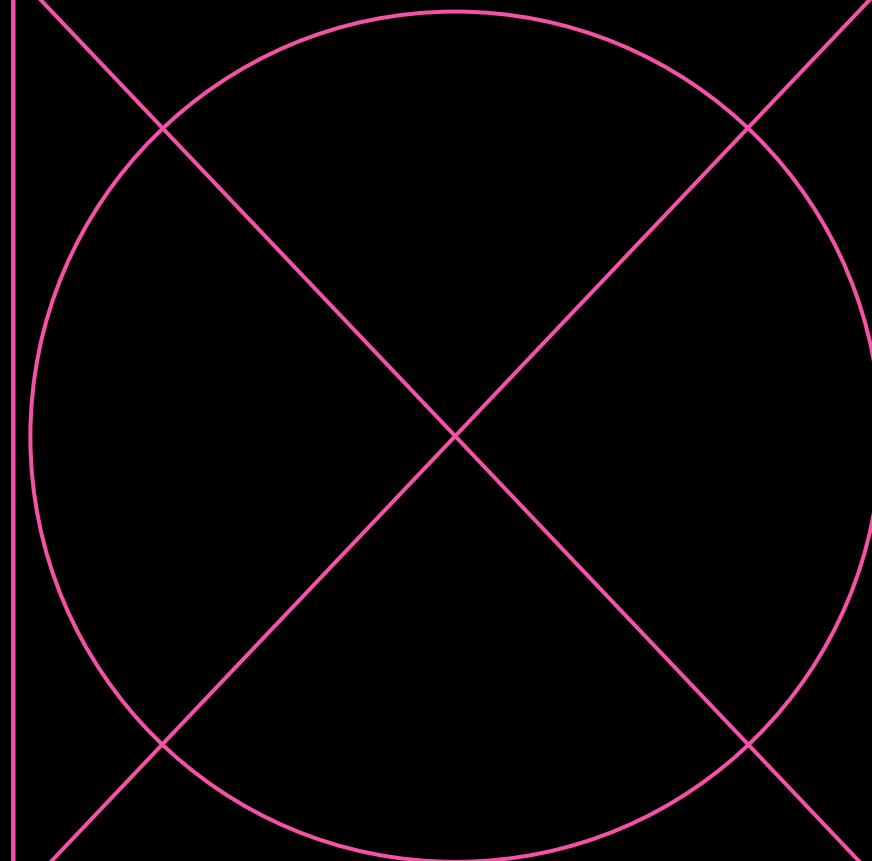
Используйте таблицу как быстрый справочник: по типу выражения выбирается тождество, а дальше результат автоматически записывается в виде произведения.

Ключевой принцип таблицы: знак и выбор функций с полусуммой/полуразностью полностью определяются тем, сумма или разность стоит между исходными тригонометрическими выражениями.

Исходное выражение	Тождество	Полусумма/полуразность
$\sin \alpha + \sin \beta$	$2 \cdot \sin((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos((\alpha - \beta)/2)$	$\sin$ и $\cos$ соответственно
$\sin \alpha - \sin \beta$	$2 \cdot \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \sin((\alpha - \beta)/2)$	$\cos$ и $\sin$ соответственно
$\cos \alpha + \cos \beta$	$2 \cdot \cos((\alpha + \beta)/2) \cdot \cos((\alpha - \beta)/2)$	$\cos$ и $\cos$ соответственно
$\cos \alpha - \cos \beta$	$-2 \cdot \sin((\alpha + \beta)/2) \cdot \sin((\alpha - \beta)/2)$	минус и $\sin \cdot \sin$

Сводка тождеств суммы и разности синусов и косинусов, используемых в школьном курсе тригонометрии.

СВЯЗЬ С ДРУГИМИ ТЕМАМИ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ



Окружность и координаты (10 класс)

Формулы суммы и разности связывают координаты точек на единичной окружности и «геометрию углов» с алгебраическими преобразованиями.

01

Преобразование произведений в суммы и тождественные преобразования

В дальнейшем эти тождества дополняют систему равенств: удобно переходить между произведениями и суммами, упрощая выражения перед решением задач.

02

Уравнения и анализ периодических процессов

При решении тригонометрических уравнений и исследовании периодических функций формулы помогают разложить сложные выражения на более простые множители.

03

ИТОГ УРОКА: ТОЧНОСТЬ И «ЧИТАЕМАЯ» СТРУКТУРА



Формулы суммы и разности синусов и косинусов переводят сложные выражения в более удобную форму и имеют ясный геометрический смысл на единичной окружности: точность вычислений, экономия времени и развитие структурного мышления.