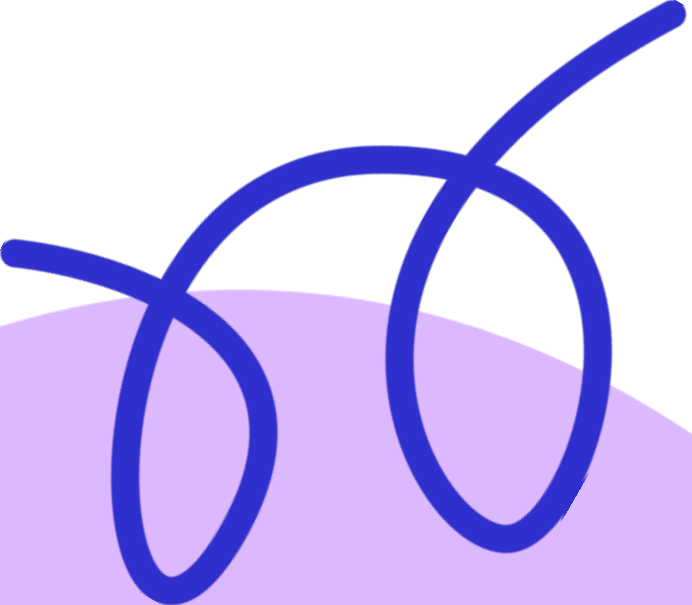
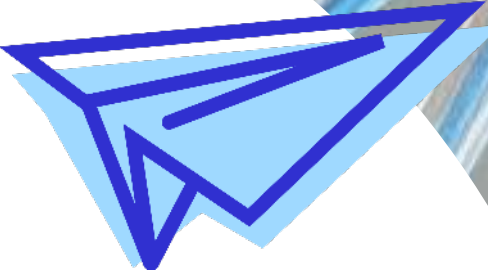
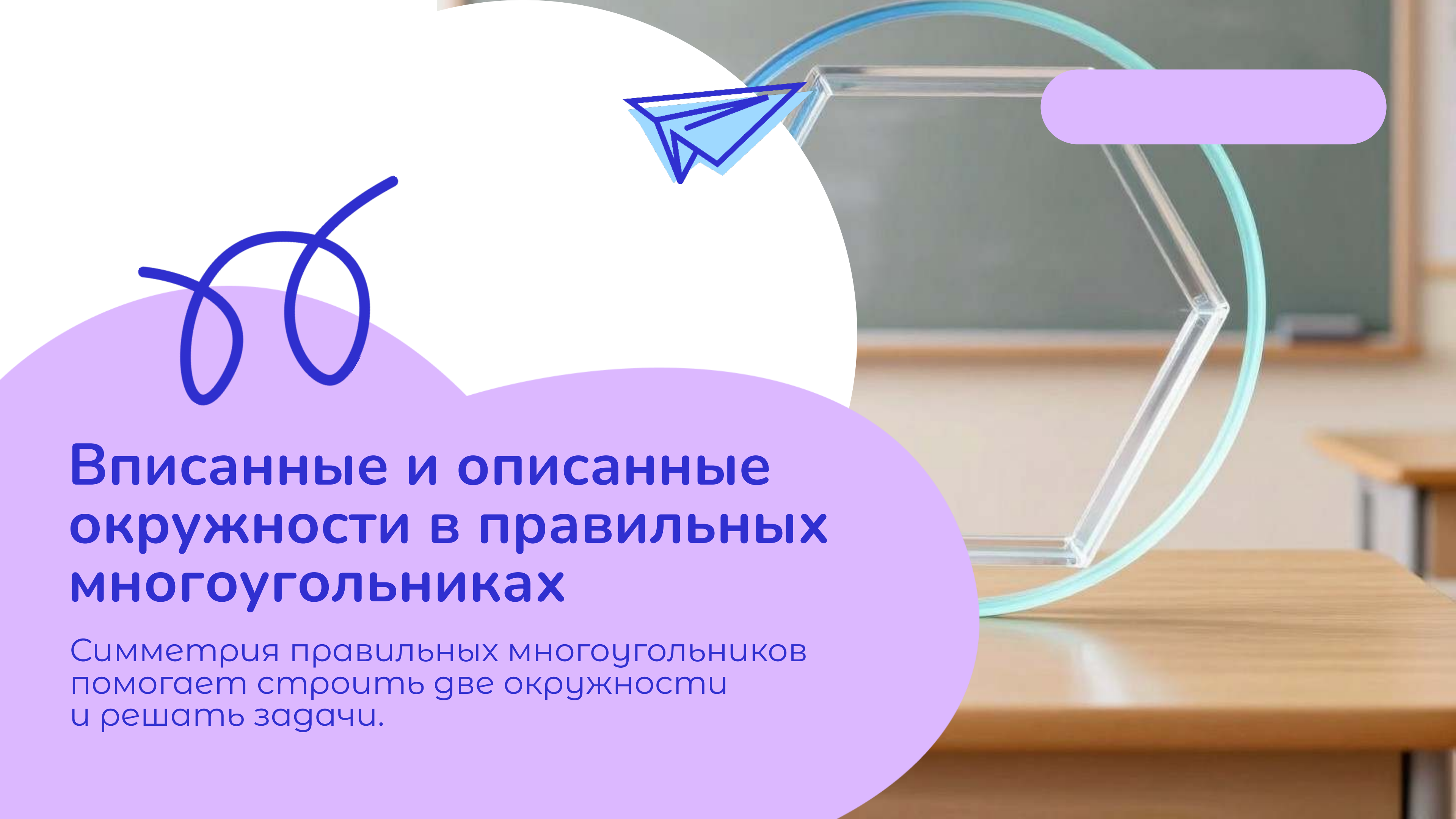


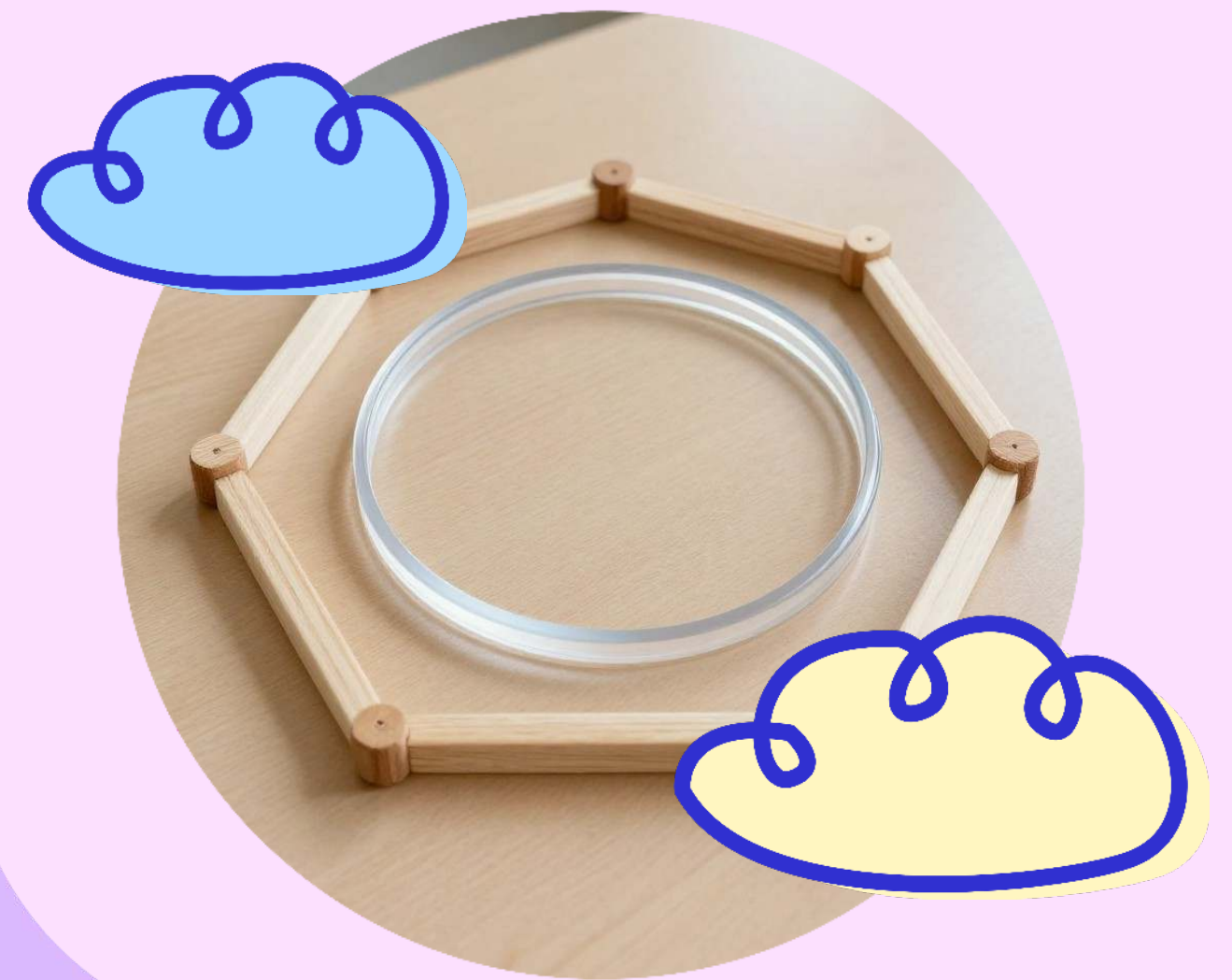


Вписанные и описанные окружности в правильных многоугольниках

Симметрия правильных многоугольников помогает строить две окружности и решать задачи.

Зачем это нужно в геометрии 7 класса

Эта тема соединяет симметрию, построения и измерения. Она помогает понимать окружность, радиус, перпендикуляр и углы, а также проверять чертежи и находить длины, площади и неизвестные элементы фигур.

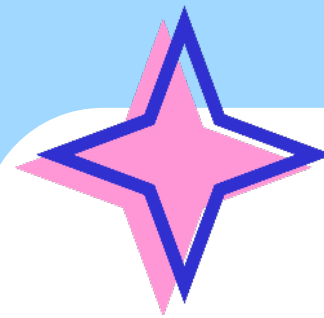


Что такое правильный многоугольник



Равные стороны

У правильного многоугольника все стороны имеют одинаковую длину. Благодаря этому фигура выглядит аккуратно и повторяет одну и ту же форму по всему периметру, без заметных искажений.



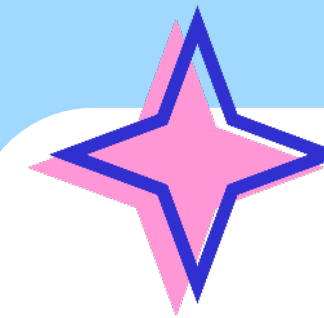
Равные углы

Все внутренние углы правильного многоугольника тоже равны. Это свойство делает фигуру симметричной и позволяет предсказать, как будут расположены её вершины и стороны относительно центра.



Примеры фигур

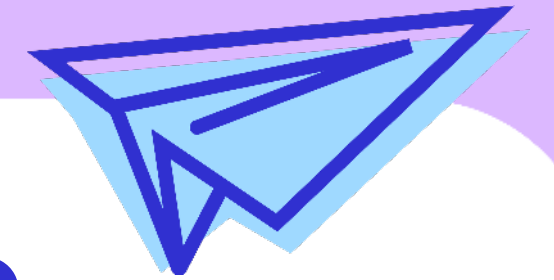
К таким фигурам относятся равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник и правильный шестиугольник. Каждая из них имеет одинаковый принцип построения и общий центр.



Основа для окружностей

Именно симметрия делает возможным построение и описанной, и вписанной окружности. Оба круга связаны с одной точкой — центром многоугольника, одинаково удалённым от вершин и сторон.

Описанная окружность правильного многоугольника



✦ Проходит через вершины

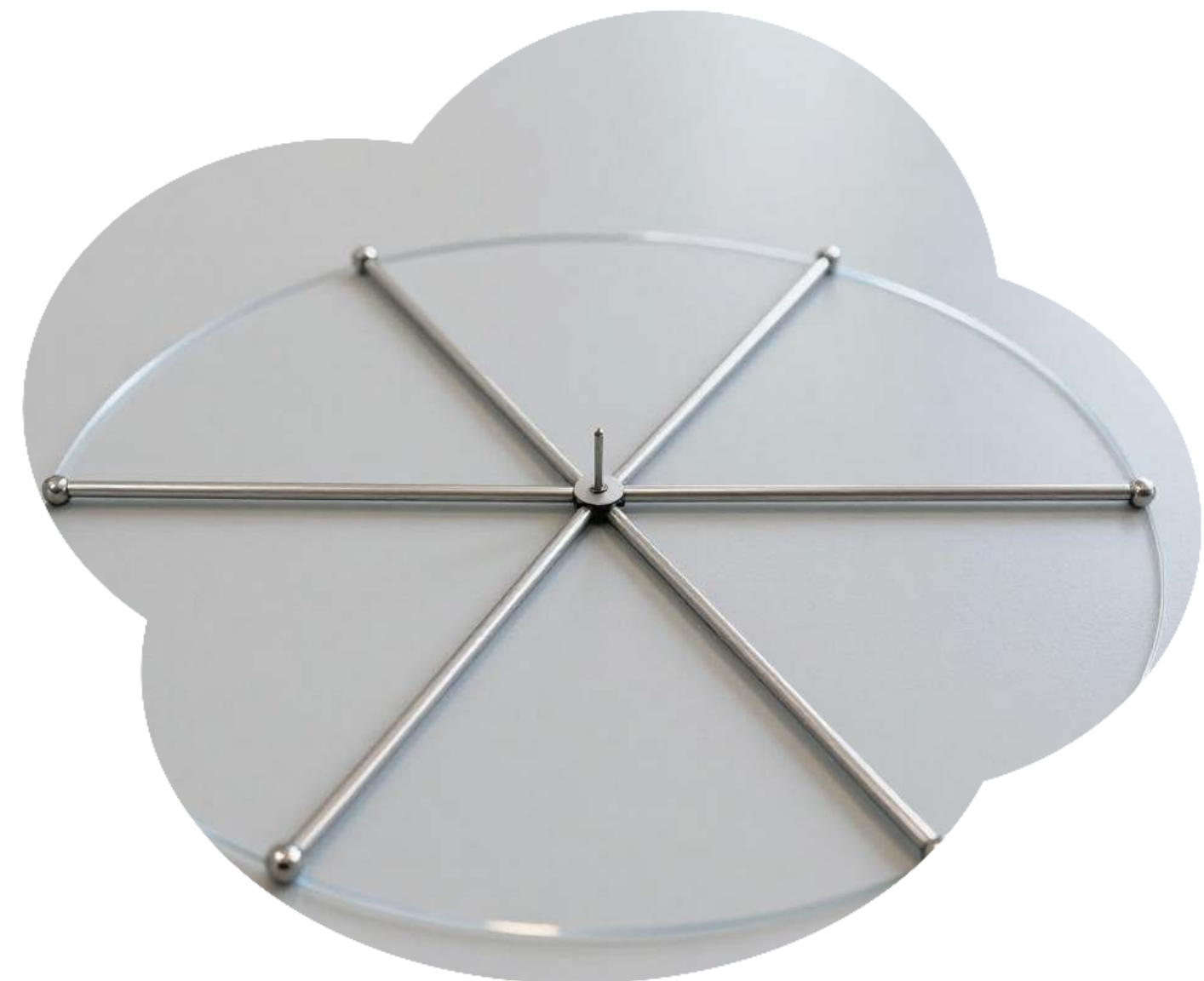
Описанная окружность проходит через все вершины правильного многоугольника. Это значит, что каждая вершина лежит на одной и той же окружности, а не только одна или две из них.

✦ Общий центр

Центр описанной окружности совпадает с центром самого многоугольника. От него до каждой вершины проведены одинаковые отрезки, поэтому окружность получается единственной и строго симметричной.

✦ Радиус к вершине

Радиус описанной окружности — это расстояние от центра до любой вершины. Для правильного многоугольника все такие расстояния равны, поэтому радиус можно брать к любой вершине без исключения.



Вписанная окружность правильного многоугольника



Касается сторон

Вписанная окружность касается всех сторон правильного многоугольника. В точке касания она не пересекает сторону, а лишь касается её, оставаясь внутри фигуры.



Тот же центр

У вписанной окружности центр тоже совпадает с центром многоугольника. Это удобно: одна и та же точка помогает строить обе окружности и сравнивать их радиусы.



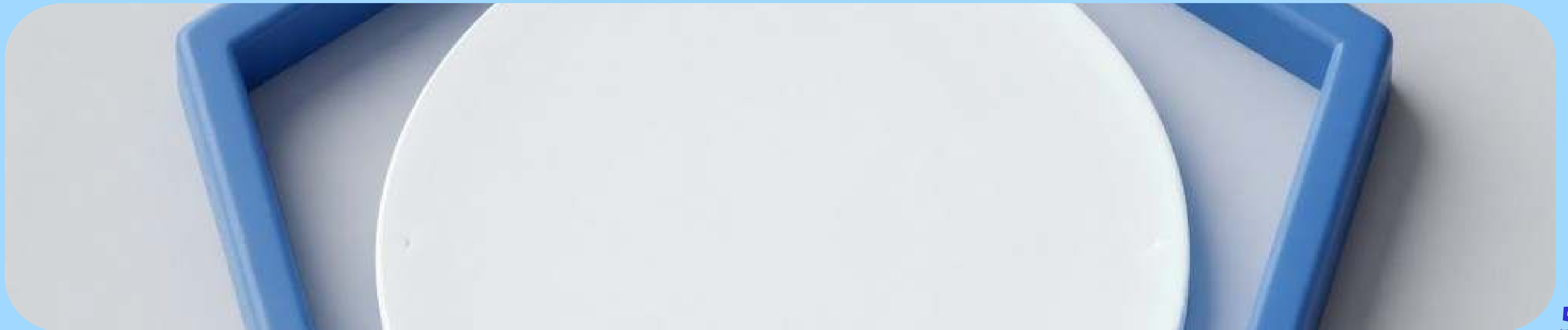
Апофема

Радиус вписанной окружности называют апофемой. Он равен кратчайшему расстоянию от центра до стороны и всегда проводится к стороне под прямым углом.



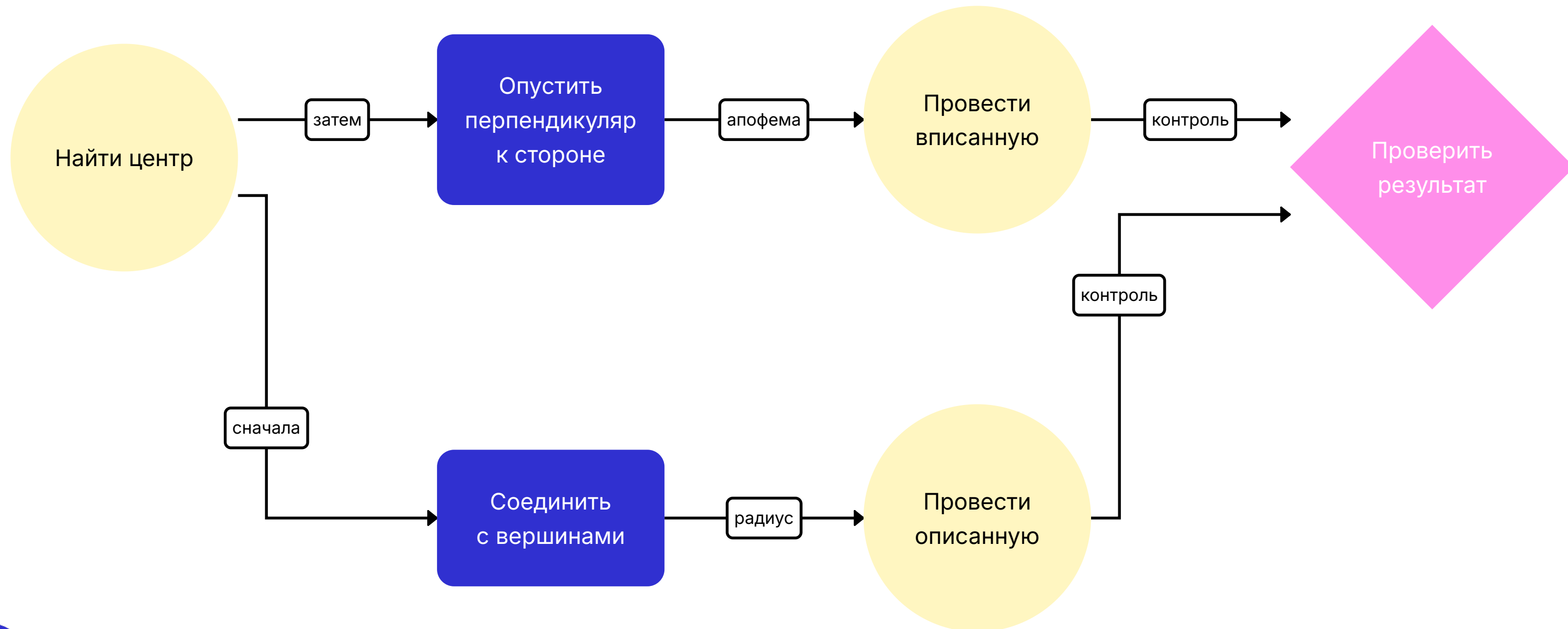
Перпендикуляр к стороне

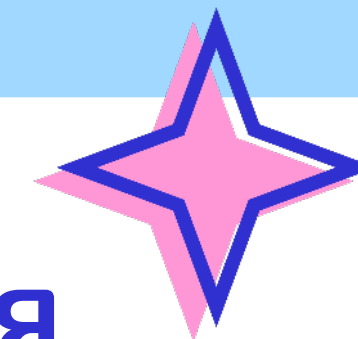
В точке касания радиус вписанной окружности перпендикулярен стороне. Поэтому он показывает не только расстояние до стороны, но и направление самого кратчайшего отрезка от центра.



Построение двух окружностей в правильном многоугольнике

Последовательность построения по оси симметрии, вершинам и сторонам





Чем отличаются описанная и вписанная окружности

Сравнение двух окружностей по основным признакам в правильном многоугольнике.

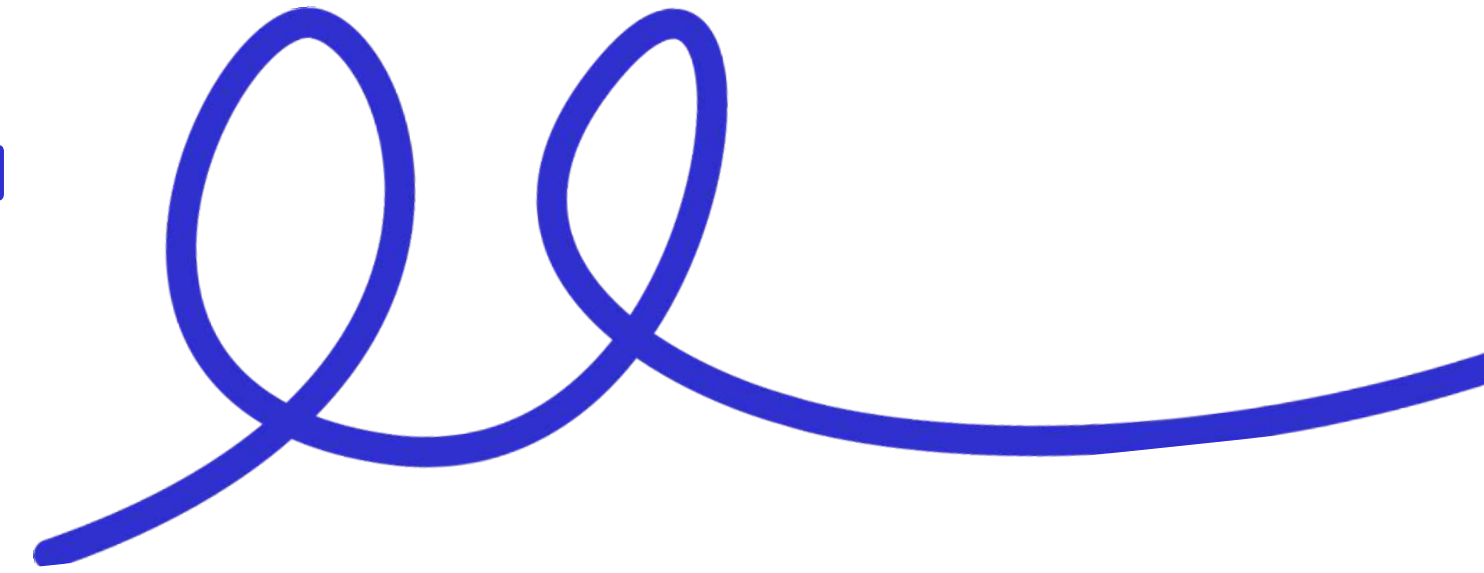
Обе окружности имеют общий центр, но одна связана с вершинами, а другая — со сторонами.

Признак	Описанная	Вписанная
Где проходит	через вершины	внутри фигуры
Что касается / что соединяет	соединяет центр с вершиной	касается сторон
Как называется радиус	радиус описанной	апофема
Где центр	в центре многоугольника	в центре многоугольника



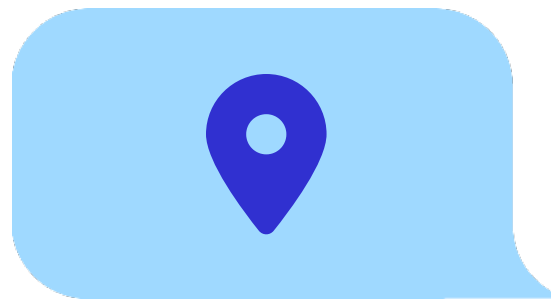
Свойства правильных многоугольников и окружностей

Как связаны центр, вершины и стороны



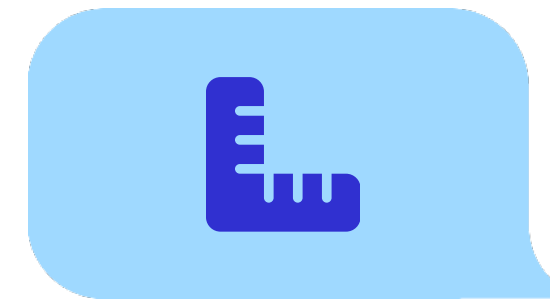
Центр фигуры

От центра правильного многоугольника можно провести равные отрезки к вершинам и одинаковые перпендикуляры к сторонам. Это и есть основа для двух окружностей.



Связь с вершинами

От центра до вершины проводится радиус описанной окружности. Все такие отрезки внутри одной фигуры равны, поэтому окружность проходит через каждую вершину.



Связь со сторонами

От центра к стороне опускают перпендикуляр — это радиус вписанной окружности. Он показывает кратчайшее расстояние до стороны и в точке касания образует прямой угол.

Как меняются радиусы у разных правильных многоугольников



Для сравнения взяли одинаковой длины стороны, чтобы увидеть только влияние числа сторон.

При увеличении числа сторон оба радиуса растут, а фигура всё ближе становится к окружности.



Вычисления по формулам радиусов для правильного n-угольника

Формулы радиусов для правильного n-угольника

1 Радиус описанной окружности

Если сторона правильного n-угольника равна a , то радиус описанной окружности находят по формуле $R = a / (2 \sin 180^\circ/n)$. Она показывает расстояние от центра до вершины.

2 Радиус вписанной окружности

Радиус вписанной окружности вычисляют по формуле $r = a / (2 \tan 180^\circ/n)$. Этот радиус равен расстоянию от центра до стороны и называется апофемой.

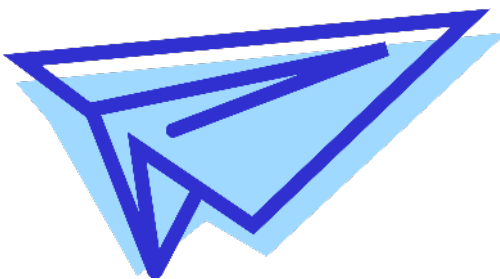
3 Что связывают формулы

Обе формулы соединяют число сторон, длину стороны и расстояние до центра. Поэтому по ним можно находить неизвестные элементы фигуры, если известны другие данные.

4 Как понимать результат

Для 7 класса важно помнить смысл, а не только вид формулы: одна формула даёт расстояние до вершины, другая — до стороны. Так легче не перепутать радиусы.

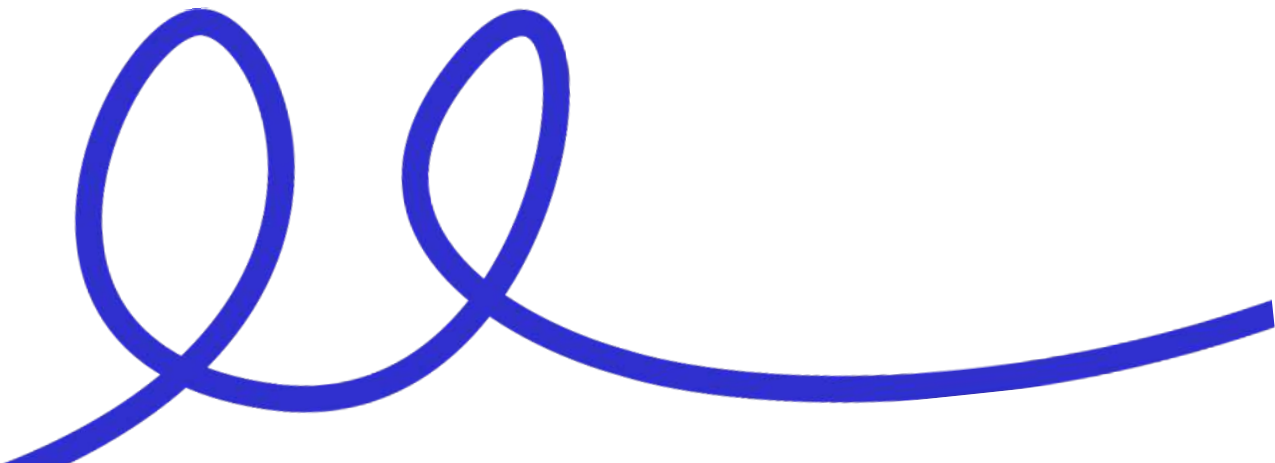
Примеры для основных правильных многоугольников



- Сравнение трёх часто встречающихся правильных многоугольников показывает, как по-разному выражаются их радиусы, но сохраняется один и тот же принцип построения окружностей.
- У всех правильных фигур центр окружностей общий, но значения радиусов зависят от числа сторон и формы многоугольника.

Фигура	R	r
Равносторонний треугольник	общий центр	общий центр
Квадрат	$a/\sqrt{2}$	$a/2$
Правильный шестиугольник	a	$a\sqrt{3}/2$

Формулы для правильных многоугольников из школьного курса геометрии.



Равносторонний треугольник как пример

1

Одна особая точка

В равностороннем треугольнике медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке. Это и есть центр обеих окружностей, поэтому построение становится особенно наглядным.

2

Окружность через вершины

Описанная окружность проходит через все три вершины, потому что расстояния от центра до них одинаковы. В правильной фигуре это свойство следует из полной симметрии сторон и углов.

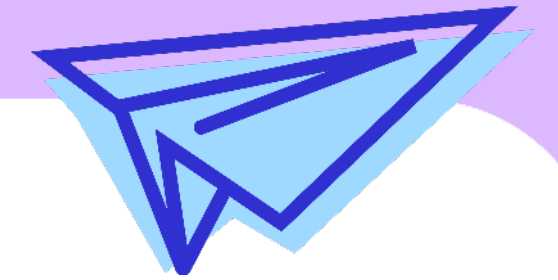
3

Окружность у сторон

Вписанная окружность касается каждой стороны, а её радиус измеряет кратчайшее расстояние от центра до стороны. На рисунке видно, что симметрия помогает найти центр без дополнительных вычислений.



Квадрат как пример правильного многоугольника



✦ Описанная окружность

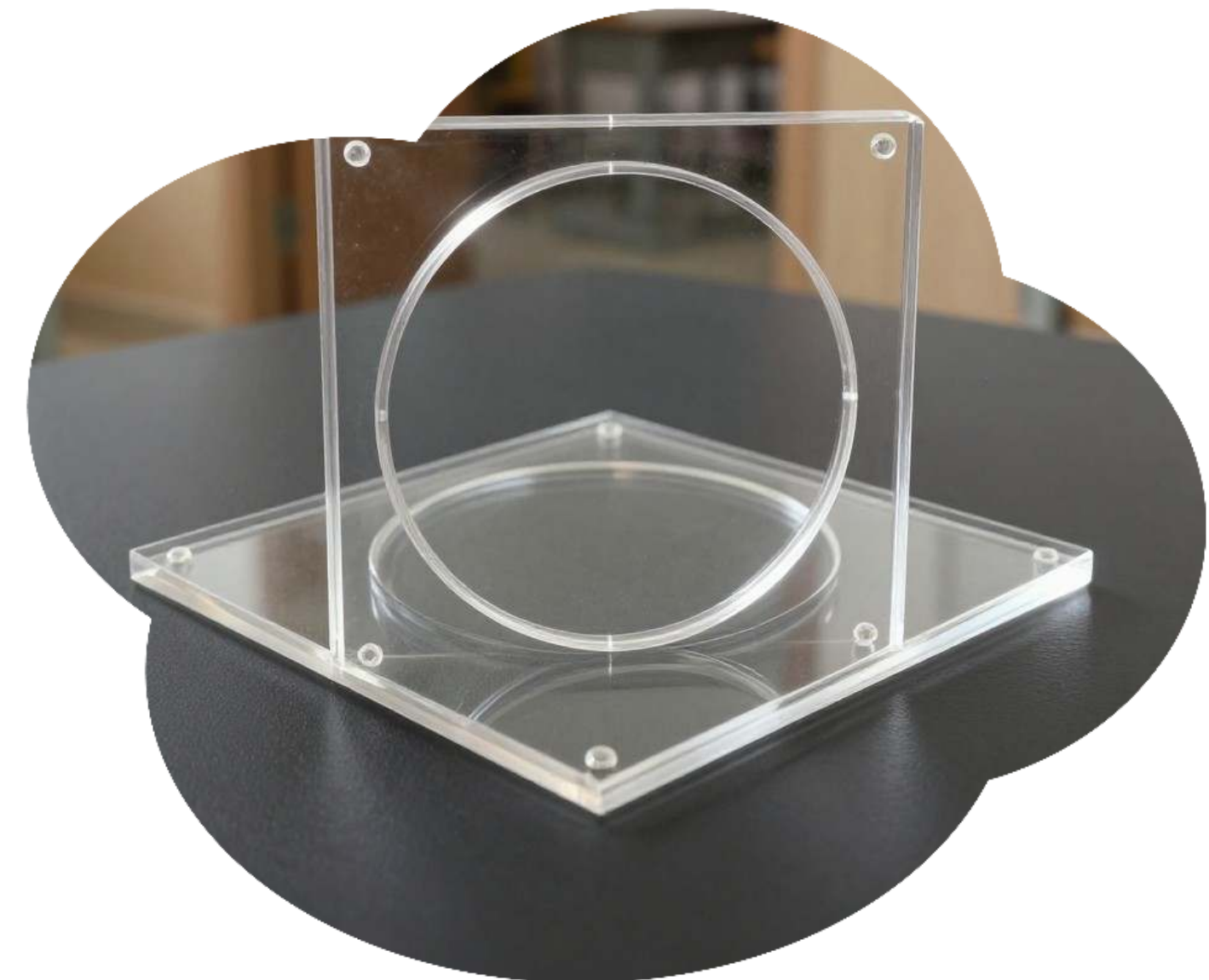
В квадрате все четыре вершины лежат на одной окружности. Её центр совпадает с пересечением диагоналей, поэтому окружность легко построить по двум противоположным вершинам.

✦ Вписанная окружность

Вписанная окружность касается всех сторон квадрата в их серединах. Радиус этой окружности равен половине стороны, что удобно использовать при проверке чертежа и вычислениях.

✦ Связь с диагональю

Диагональ квадрата является диаметром описанной окружности. Благодаря этому квадрат хорошо показывает связь между стороной, диагональю и двумя радиусами одной и той же фигуры.



Как число сторон влияет на форму



Чем меньше центральный угол, тем плотнее вершины расположены на окружности и тем ровнее выглядит контур фигуры.

Рост числа сторон уменьшает центральный угол, поэтому многоугольник всё больше напоминает окружность.



✦ Формула центрального угла правильного n-угольника: $360^\circ/n$.



1/2

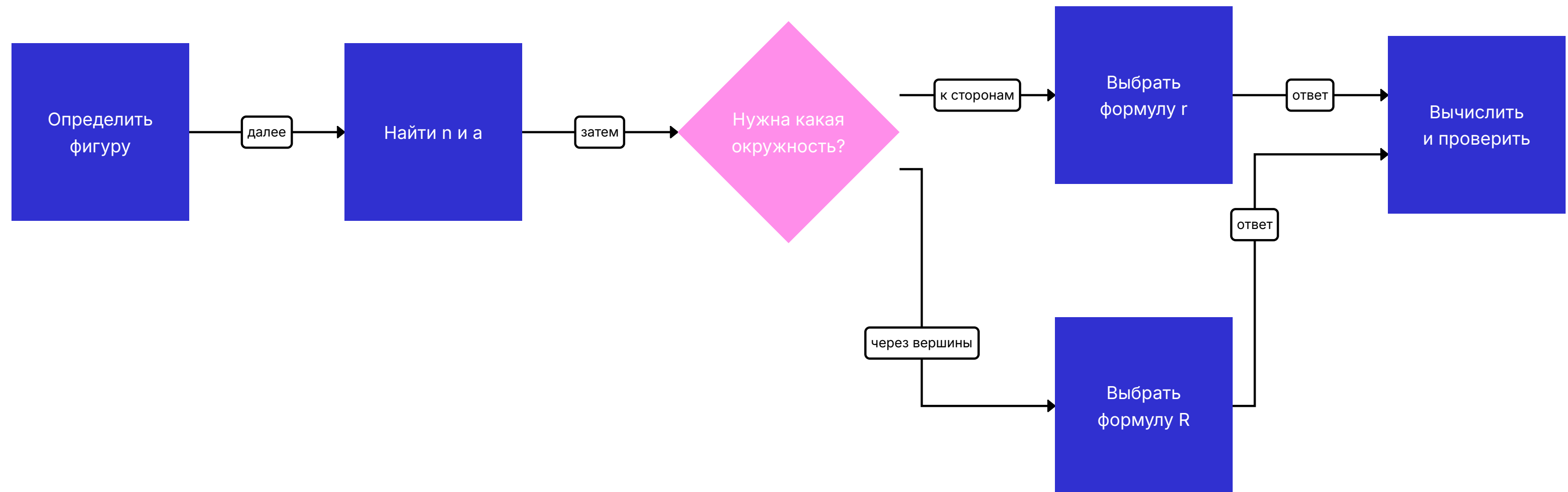
периметра, умноженного на радиус
вписанной окружности, даёт площадь
правильного многоугольника.

Формула площади правильного многоугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot r$.

Эта доля показывает, что площадь удобно считать
через периметр и апофему: достаточно знать
расстояние от центра до стороны.

Как решать задачи на окружности в правильном многоугольнике

Последовательность действий при выборе нужной окружности и формулы.



Типичные ошибки при решении задач

1 Путают радиусы

Одна из самых частых ошибок — принять радиус описанной окружности за радиус вписанной. Полезно помнить: первая окружность проходит через вершины, а вторая касается сторон.

2 Берут не ту формулу

Иногда выбирают формулу без учёта числа сторон или подставляют значения не в тот вид выражения. Перед вычислением стоит ещё раз проверить, какая именно фигура дана.

3 Смешивают центр и сторону

Некоторые ученики путают центр многоугольника с серединой стороны. На самом деле общий центр одинаково удалён и от вершин, и от сторон, но это разные расстояния.

4 Забывают про проверку

Если результат получился неожиданным, его нужно сравнить по смыслу: радиус описанной окружности должен быть больше радиуса вписанной. Такая проверка быстро выявляет ошибку.

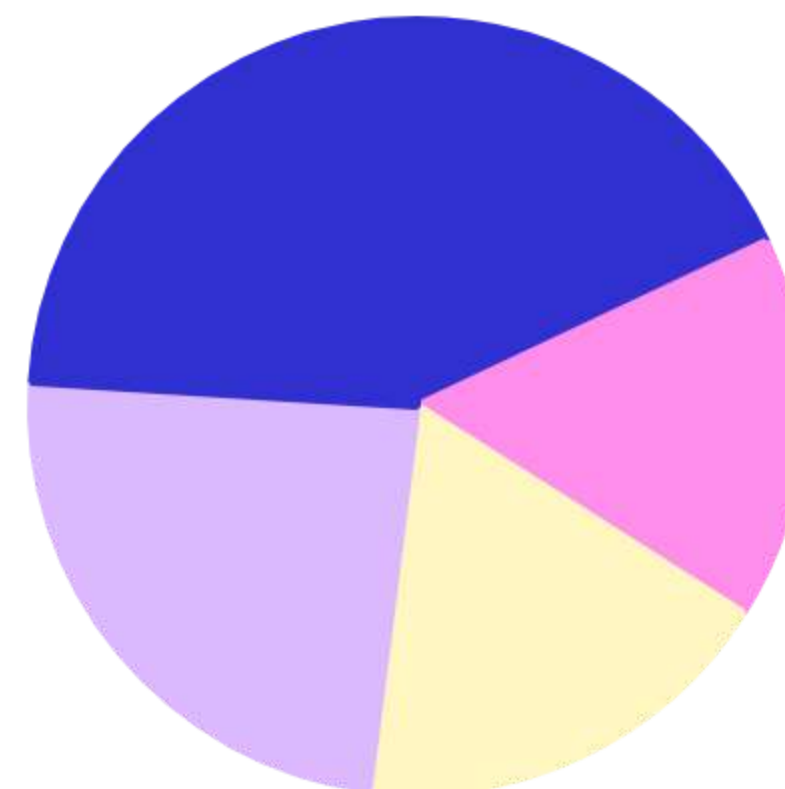
Где встречаются правильные многоугольники



Такие формы часто выбирают там, где важны повторяемость, устойчивость и аккуратный внешний вид.

Правильные многоугольники особенно полезны в повторяющихся конструкциях: они экономят место, выглядят симметрично и хорошо сочетаются друг с другом.

Плитка и орнаменты Знаки Архитектура
Соты Логотипы и узоры



✦ Примеры из повседневной среды и учебной геометрии.

2

окружности помогают быстро
проверить, правильно ли построен
правильный многоугольник.

Основные свойства описанной и вписанной окружностей
в правильном многоугольнике.



Если у фигуры есть общий центр, значит можно
отдельно проверить вершины и стороны: это самый
быстрый способ найти ошибку в чертеже.



Что важно запомнить о двух окружностях

Правильный многоугольник удобно изучать через описанную и вписанную окружности: они имеют общий центр, но связаны с разными элементами фигуры. Эти идеи помогают строить, вычислять и проверять ответы.