

Кратчайшие пути на плоскости: геометрия выбора самого короткого маршрута

Геометрия помогает выбрать самый короткий путь
без лишних поворотов.



Зачем искать кратчайший путь в геометрии

- В 9 классе такие задачи связывают теорему Пифагора, неравенство треугольника и координаты. Они учат сравнивать маршруты, работать с чертежом и находить минимальную длину в разных условиях.



Расстояние между двумя точками на плоскости

1 Длина отрезка

Расстояние между точками — это длина отрезка, который их соединяет. Если путь не ограничен, именно он даёт наименьшую длину между началом и концом.

2 Ломаная длиннее

Любая ломаная с теми же концами состоит из нескольких звеньев, поэтому её длина равна сумме всех участков. Из-за дополнительных поворотов такой маршрут обычно становится длиннее.

3 Основа задач

Это свойство лежит в основе большинства школьных задач на минимальную длину. Сначала сравнивают возможные пути, а затем выбирают тот, который не содержит лишних звеньев.

Отрезок и ломаная: сравнение длины

— Прямое соединение

Отрезок между двумя точками всегда короче любого обходного пути с теми же концами. Он показывает, какой маршрут возможен без лишних отклонений и поворотов.

— Повороты добавляют длину

Каждый изгиб ломаной увеличивает её общую длину, потому что путь проходит не по одному направлению, а по нескольким участкам. Поэтому обход почти всегда длиннее прямой.

— Геометрическое объяснение

Такое сравнение опирается на неравенство треугольника: сумма двух сторон больше третьей. Значит, путь через промежуточную точку не может быть короче прямого отрезка.

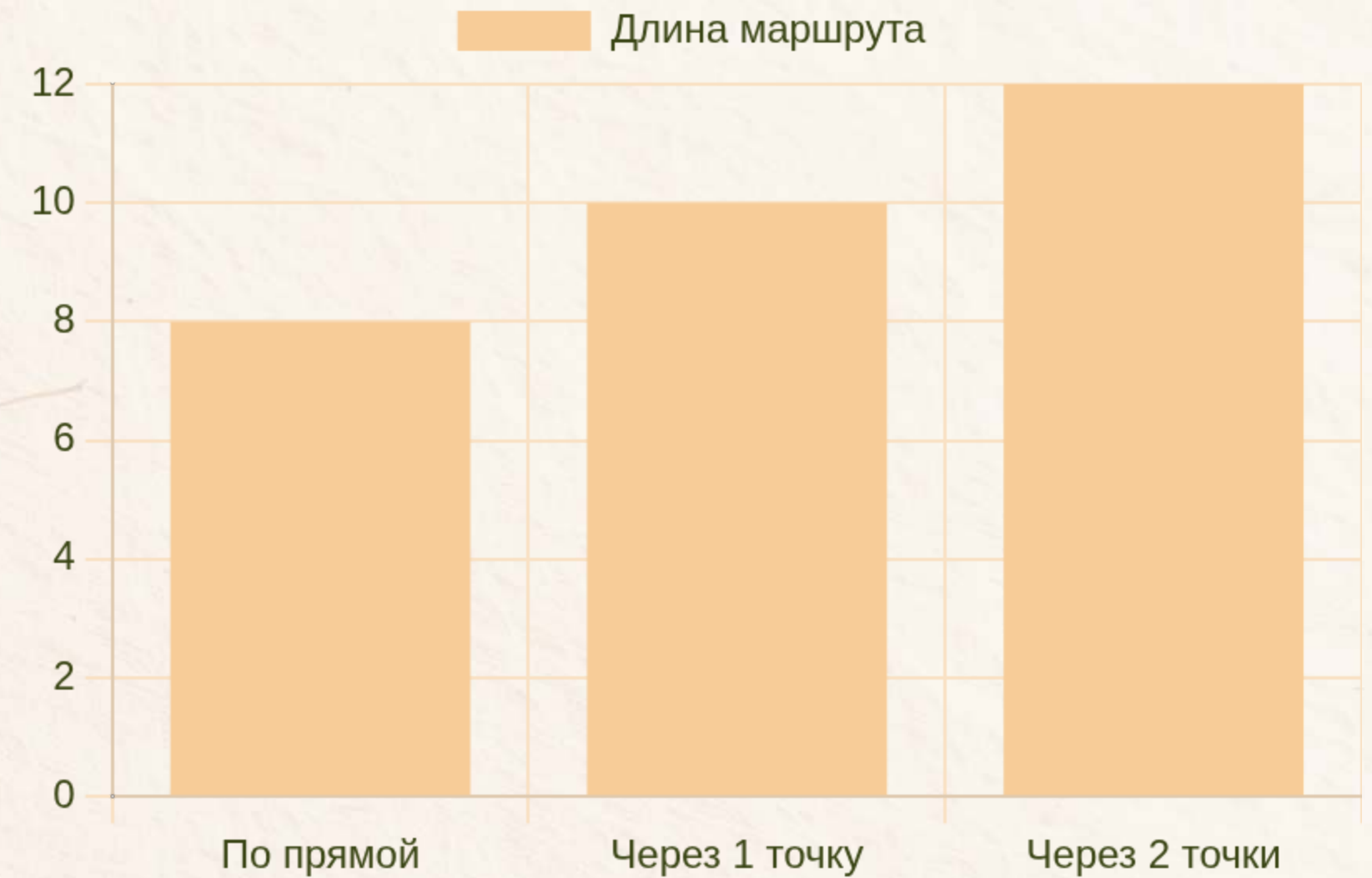


Сравнение длины трёх маршрутов между одними и теми же точками

Одинаковые начальная и конечная точки позволяют честно сравнить только форму маршрута и число поворотов.

Чем больше промежуточных точек, тем длиннее путь; прямое соединение оказывается самым выгодным.

Данные из условия задания



Неравенство треугольника как основа сравнения путей



Главное свойство

В любом треугольнике сумма длин двух сторон больше третьей. Это означает, что путь через вершину треугольника всегда длиннее прямого соединения между двумя другими точками.



Проверка маршрутов

Если маршрут состоит из двух отрезков, его длину можно сравнить с третьей стороной треугольника. Так легко понять, какой вариант короче, не измеряя всё на глаз.



Полезно в 9 классе

Это свойство помогает не только находить ответ, но и проверять его. Если найденный маршрут короче прямого отрезка без причины, значит, в решении допущена ошибка.

Способы задания длины пути в школьных задачах

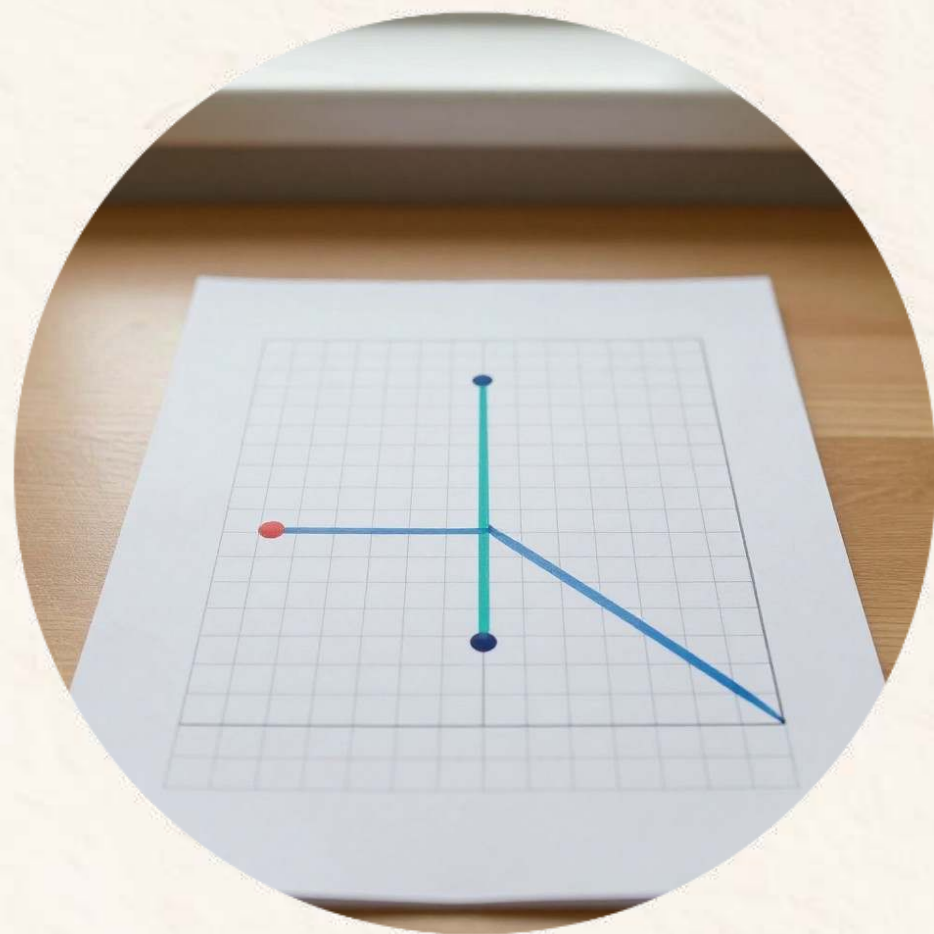
Ситуация	Как находят
Отрезок	Измеряют или считают
Ломаная	Суммируют звенья
Координаты	Формула расстояния
Клетки	Счёт или Пифагор

— В разных задачах длину пути находят по-разному: всё зависит от того, как задан маршрут и какие данные даны в условии.

Один и тот же путь можно описать разными способами, поэтому важно выбрать подходящий метод вычисления.

— Школьный курс геометрии 9 класса

Формула расстояния между точками на координатной плоскости



1 Координаты точек

Если точки А и В заданы координатами, расстояние между ними можно вычислить точно. Это особенно удобно, когда на чертеже трудно измерить длину линейкой.

2 Связь с Пифагором

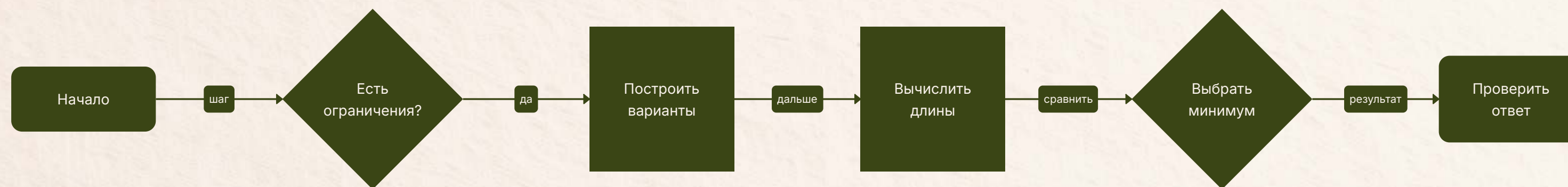
Формула расстояния основана на теореме Пифагора. Разности координат становятся катетами прямоугольного треугольника, а сам отрезок между точками — его гипотенузой.

3 Удобство метода

Такой способ соединяет алгебру и геометрию: координаты подставляют в формулу и получают численный ответ. Это помогает быстро сравнивать несколько маршрутов в одной задаче.

Как искать кратчайший путь в геометрической задаче

Последовательность действий помогает не пропустить ограничения и правильно сравнить маршруты.



1

диагональный отрезок клетки показывает
самый короткий переход между
её противоположными вершинами.

На клетчатой бумаге диагональ часто помогает сократить
маршрут по сравнению со ступенчатым ходом.

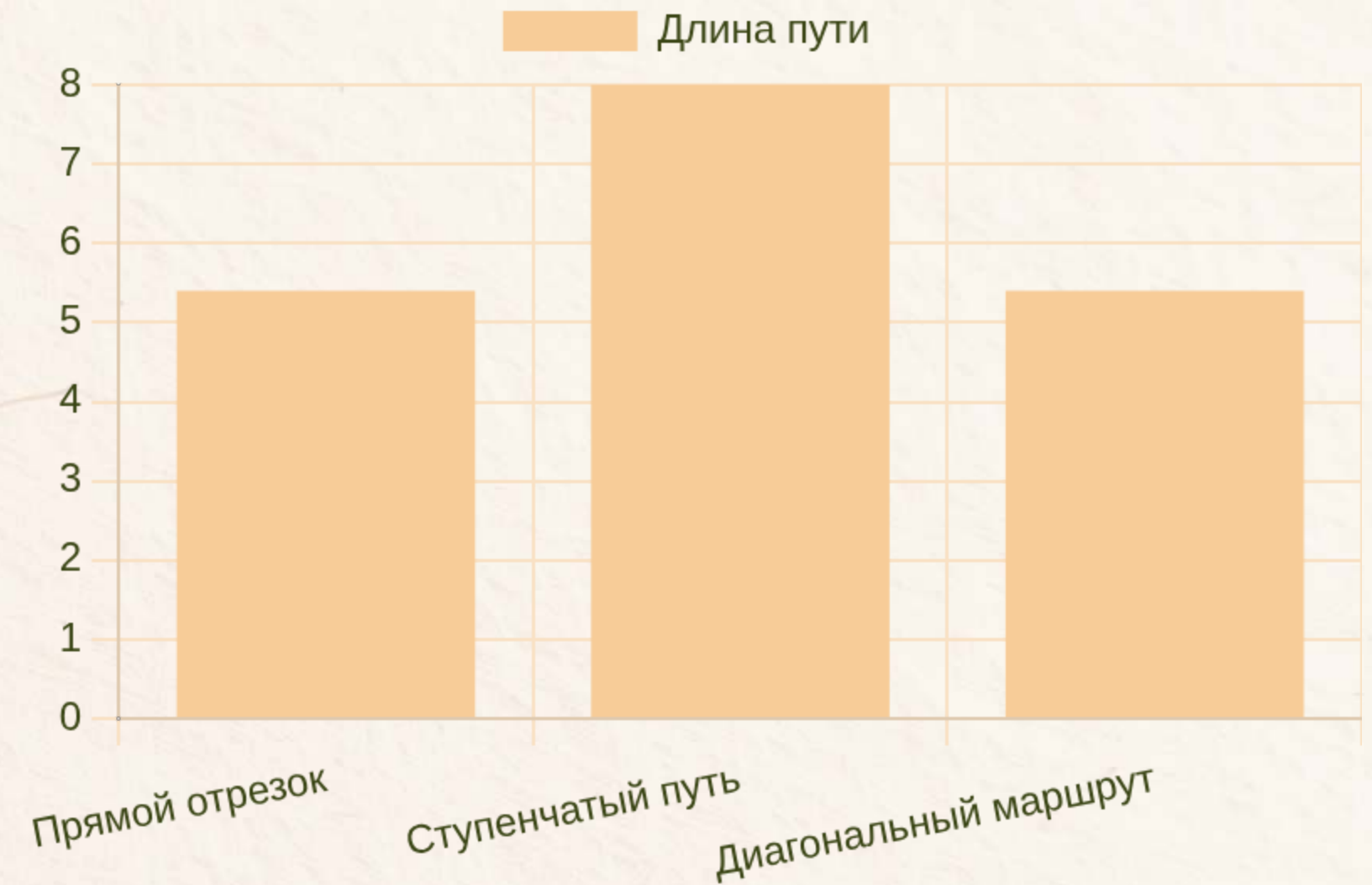
Школьные задачи на клетчатой бумаге

Сравнение прямого, ступенчатого и диагонального пути по клеткам

На клетчатой модели одинаковые точки могут соединяться разными способами, но лишние повороты почти всегда увеличивают длину.

Ступенчатый маршрут длиннее, а прямой и диагональный дают минимальный результат в этом примере.

Условие задачи и данные из описания слайда.



Когда кратчайший путь проходит не по прямой



Есть ограничение

На плоскости появляется препятствие, запретная зона или граница, которую нельзя пересекать. Прямой отрезок между точками уже не подходит как единственный вариант.



Появляется обход

Маршрут распадается на несколько отрезков. Важными становятся точки поворота, касания границы и место, где путь должен изменить направление.



Выбирается минимум

Сравнивают все допустимые обходы и находят самый короткий из них. Длина зависит не только от расстояния, но и от условий движения.

Задача с отражением как способ найти кратчайший путь

1 Отражаем точку

Один конец пути мысленно отражают относительно прямой-границы. Тогда задача с касанием сводится к более простой схеме с симметрией и прямым отрезком между точками.

2 Строим прямой ход

Соединяют вторую точку с отражённой. Этот отрезок показывает наименьшую длину среди всех путей, которые обязаны коснуться прямой в одной точке.

3 Возвращаемся к исходной задаче

Точка пересечения с прямой даёт место поворота. Так получают кратчайший маршрут с одним изломом и проверяют, что он соответствует условию задачи.



Сравнение методов решения задач на кратчайший путь

Метод	Когда удобен	Результат
Перебор	Простые задачи	Сравнение вариантов
Построение	Наглядные чертежи	Подходящий маршрут
Формула	Координаты	Точный ответ
Отражение	Есть граница	Минимальный путь

Выбор метода зависит от вида задачи, наличия ограничений и требуемой точности ответа.

Чем сложнее ограничение, тем важнее геометрическое построение и проверка минимальности.

Обобщение школьных способов решения задач на кратчайший путь.

Практическое значение темы в жизни и технике



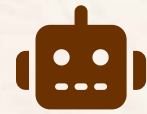
Навигация

Карты и навигаторы сравнивают маршруты по длине, времени и числу поворотов. Геометрический подход помогает понять, почему самый короткий путь не всегда самый удобный.



Дороги и развязки

При проектировании дорог важно уменьшить длину трассы и избежать лишних пересечений. Кратчайшие пути помогают выбирать более рациональную схему движения.



Маршруты роботов

Роботам нужно двигаться по безопасной траектории, обходя препятствия. Для этого заранее сравнивают возможные пути и выбирают наиболее короткий из допустимых.



Компьютерные игры

В играх персонажи и объекты перемещаются по карте с препятствиями. Алгоритмы ищут кратчайший маршрут, чтобы движение выглядело быстрым и естественным.



Экономия ресурсов

Меньшая длина пути часто означает меньше время, расхода энергии и числа остановок. Поэтому геометрическое сравнение маршрутов полезно не только в учебнике.

Что влияет на выбор кратчайшего маршрута

В реальной задаче важна не только длина отрезка, но и то, можно ли пройти по нему без нарушения условий.

На решение сильнее всего влияет исходное расстояние, но ограничения и форма движения тоже заметно меняют ответ.

Условие задачи и данные из описания слайда.



Типичные ошибки при решении задач на кратчайший путь

— Путают отрезок и ломаную

Иногда прямой путь сравнивают с маршрутом, где есть повороты, как будто их длина одинакова. На самом деле каждый дополнительный излом увеличивает общую длину.

— Не складывают звенья

При вычислении длины ломаной нужно добавить все её части. Если пропустить хотя бы одно звено, ответ получится меньше настоящего.

— Игнорируют ограничения

Запретная область или препятствие могут полностью изменить решение. Если не учесть границу, выбранный маршрут окажется неверным даже при правильных вычислениях.

— Ошибаются в формуле

Для координатной плоскости нужна формула расстояния, а не просто разность координат. Особенно важно правильно определить катеты прямоугольного треугольника.

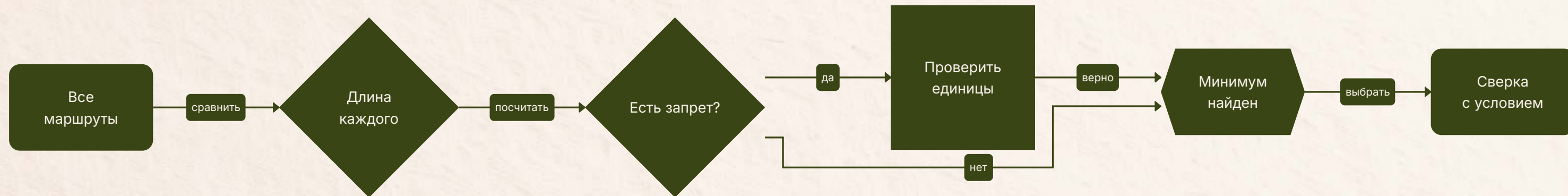
— Неверно читают данные

Путают координаты, единицы измерения и масштаб чертежа. Проверка построения и повторное сравнение маршрутов помогают избежать такой ошибки.

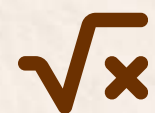


Проверка найденного ответа в геометрической задаче

Последовательность проверки допустимых маршрутов и выбора наименьшей длины



Связь темы с другими разделами математики



Теорема Пифагора

Она позволяет находить длины отрезков в прямоугольном треугольнике. Именно поэтому формула расстояния на координатной плоскости связана с геометрией, а не только с вычислениями.



Координатная плоскость

Точки задают числа, а числа помогают сравнивать маршруты без измерения линейкой. Это удобно, когда задача дана в координатах или на клетчатой бумаге.



Построения

Чертёж помогает увидеть точки поворота, границы и возможные обходы. Иногда уже само построение подсказывает, какой маршрут короче остальных.



Свойства треугольника

Неравенство треугольника показывает, что путь через промежуточную точку не короче прямого отрезка. Это одно из главных доказательств в таких задачах.



Алгебра и вычисления

При решении нужны аккуратные расчёты, работа с корнями и сравнение чисел. Так геометрия соединяется с алгеброй в одной школьной задаче.

Кратчайший путь на плоскости: что важно запомнить

Если ограничений нет, самый короткий путь — отрезок. Когда есть препятствия или границы, помогают неравенство треугольника, формула расстояния и симметрия.