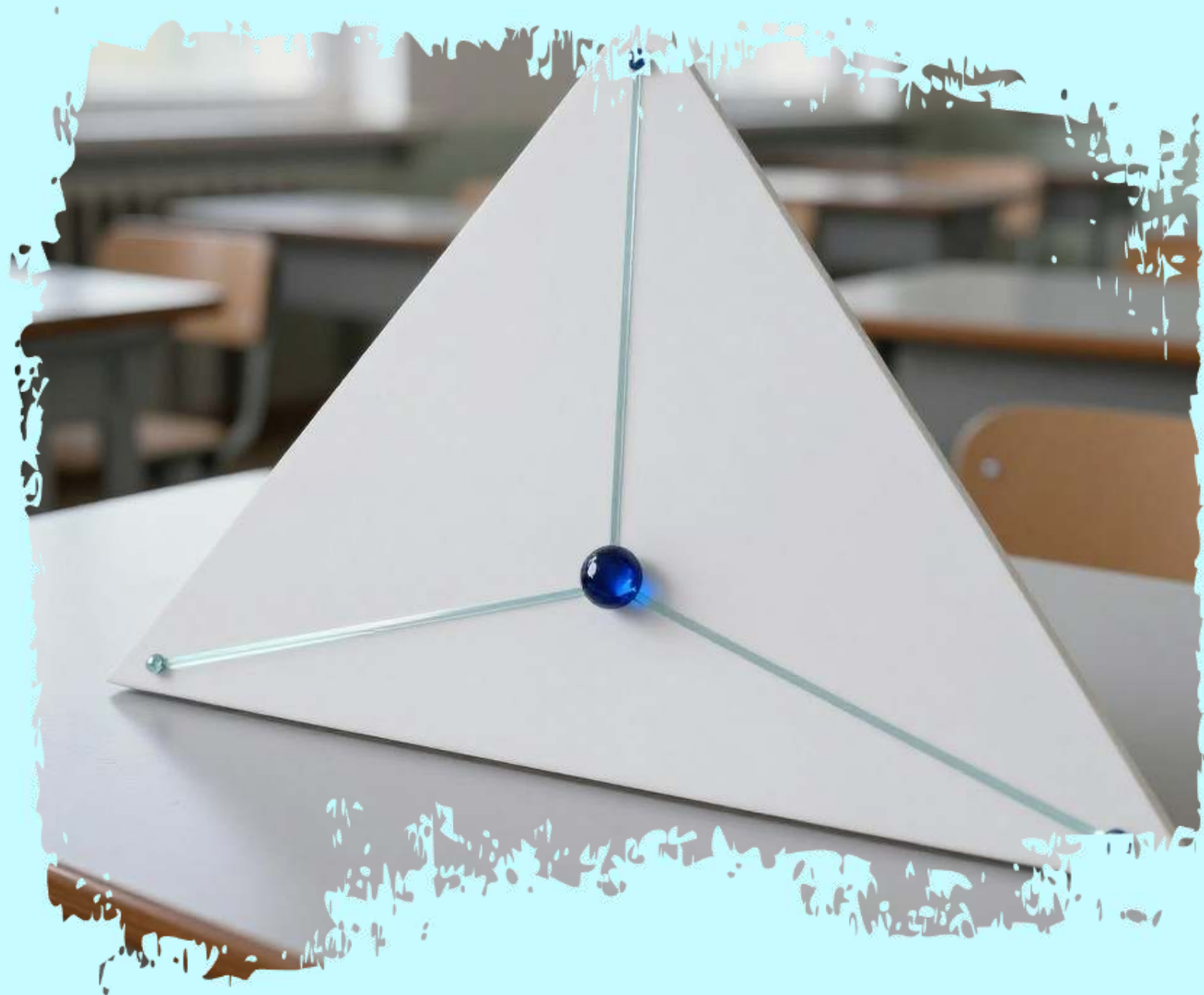


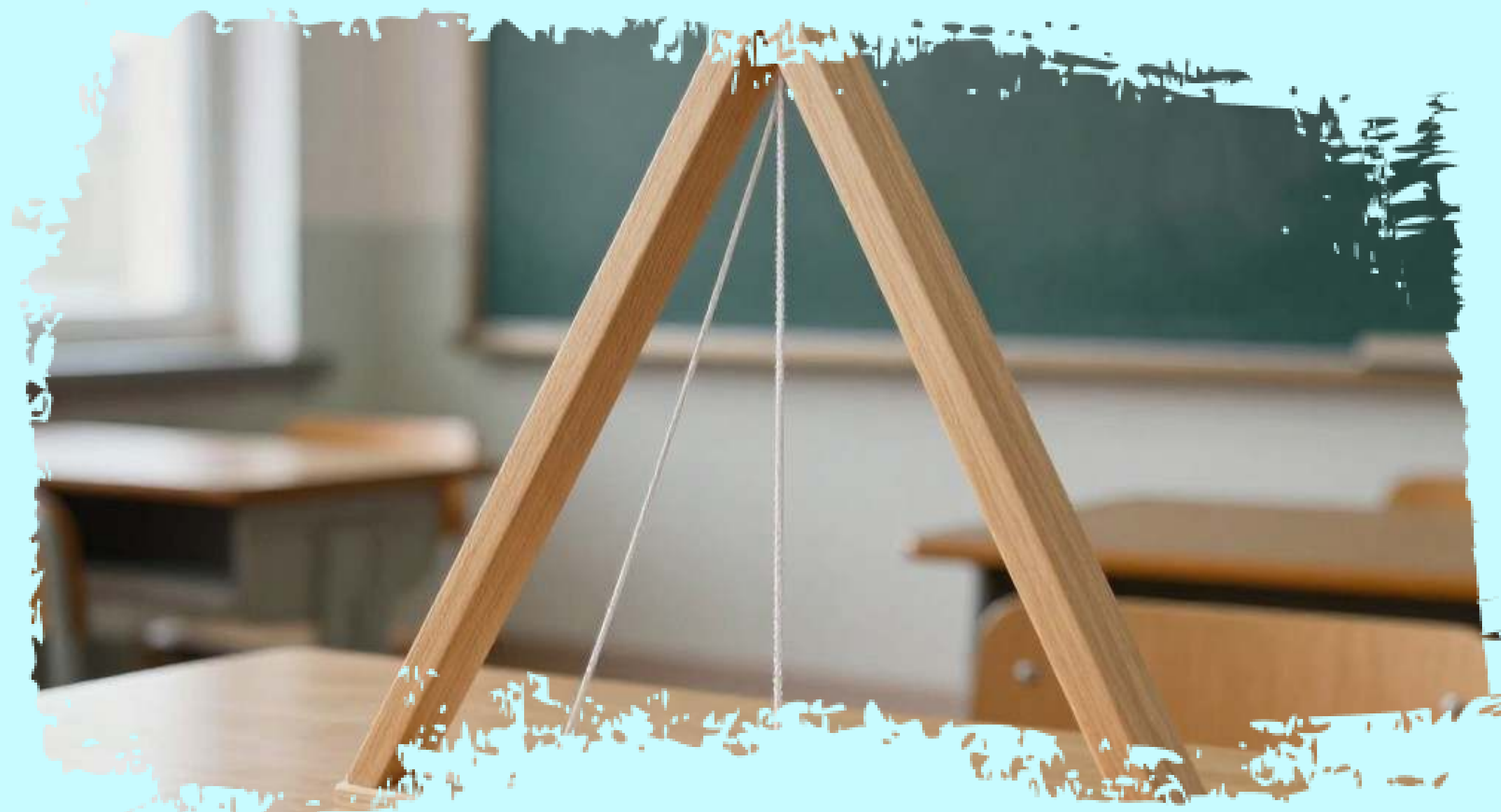


# Высоты треугольника и четыре замечательны е точки

Геометрия треугольника  
раскрывается через особые  
линии и их точные  
пересечения.

# Как треугольник становится понятнее

Высоты, медианы, биссектрисы и серединные перпендикуляры позволяют быстро получать точные результаты. Эта тема соединяет построения, доказательства и задачи на измерение, поэтому особенно важна в школьной геометрии 9 класса.



# Высота треугольника: определение и основные случаи

1

## Что называют высотой

Высота треугольника — это отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на прямую, содержащую противоположную сторону. Она показывает наименьшее расстояние от вершины до этой стороны.

2

## Остроугольный треугольник

Если все углы треугольника острые, каждая высота проходит внутри фигуры. В этом случае все три перпендикуляра удобно изображаются на чертеже и пересекаются в одной общей точке.

3

## Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами, потому что они уже перпендикулярны соответствующим сторонам. Третья высота проводится к гипотенузе и помогает найти ортцентр.

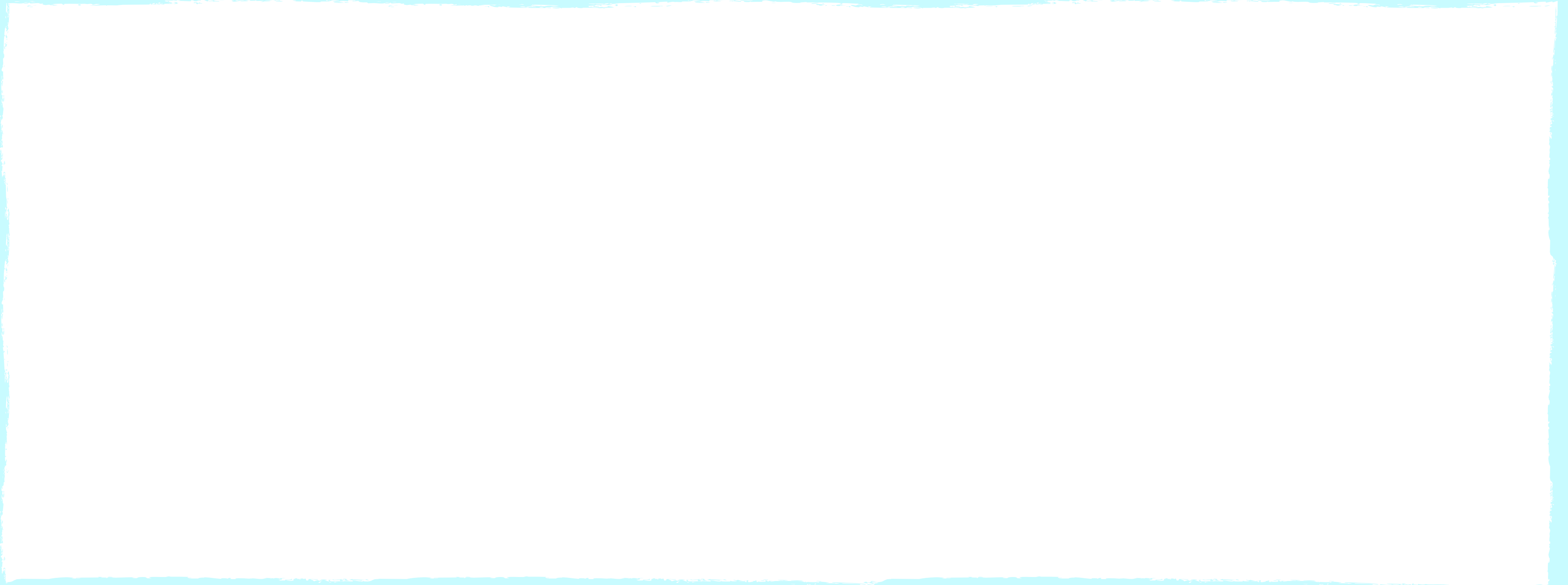
4

## Тупоугольный треугольник

Если треугольник тупоугольный, две высоты приходится продолжать за пределы фигуры. Это происходит потому, что перпендикуляр из вершины опускается не на саму сторону, а на её продолжение.

# Как построить три высоты треугольника

Схема показывает, как из трёх вершин получают общую точку пересечения высот.



# Теорема о пересечении высот

## Общее утверждение

В любом треугольнике три высоты обязательно пересекаются в одной точке. Это важный факт планиметрии, который позволяет работать с фигурой не по отдельности, а как с единой системой.

## Ортцентр Н

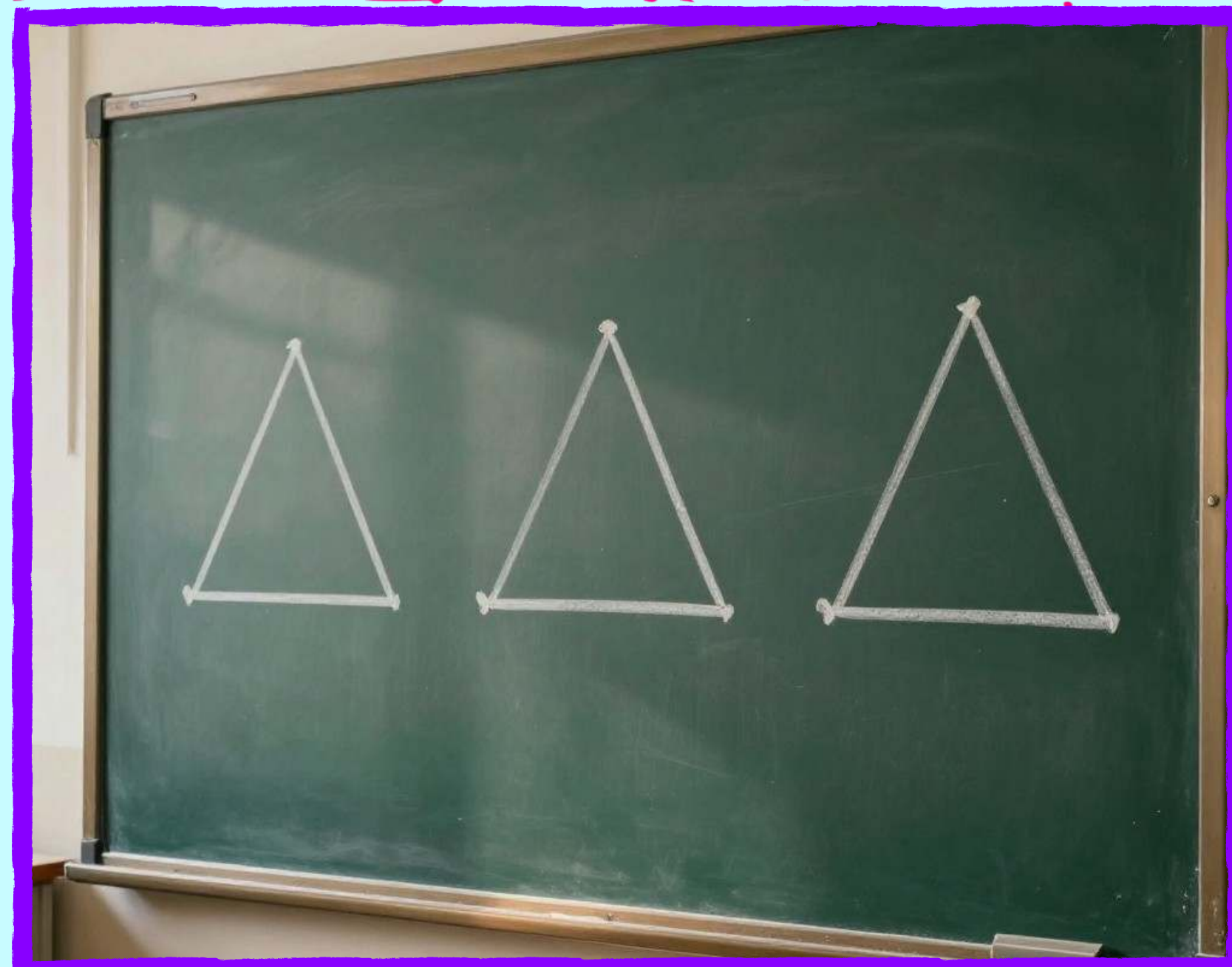
Точка пересечения высот называется ортцентром и обозначается буквой  $H$ . Она возникает из трёх перпендикуляров и помогает строить дальнейшие рассуждения о треугольнике.

## Где находится точка

В остроугольном треугольнике ортцентр лежит внутри фигуры. В прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном оказывается вне треугольника.

## Почему это важно

Теорема о пересечении высот связывает чертёж и доказательство. Найдя две высоты, можно сразу определить положение третьей и проверить правильность построения без лишних вычислений.

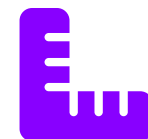


# Ортцентр и его свойства



## Точка пересечения

Ортцентр получается там, где сходятся любые две высоты треугольника. Поэтому его можно найти уже по двум построенным перпендикулярам, не дожидаясь третьего.



## Связь с перпендикулярностью

Эта точка связана прежде всего с прямыми углами и перпендикулярами. Она полезна в задачах, где нужно точно показать направление высоты и проверить построение.



## Положение в фигуре

Для остроугольного треугольника ортцентр всегда лежит внутри. В прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном выходит за пределы треугольника.



## Инструмент для задач

Ортцентр не является центром окружности, но помогает в геометрических построениях. Через него удобно объяснять, как из нескольких линий появляется одна точная опорная точка.

# Четыре замечательные точки треугольника

Каждая точка связана со своим семейством линий и своим особым свойством.

Точки Н, О, G и I образуются разными линиями, но каждая даёт измеримое геометрическое свойство.

Свойства замечательных точек треугольника из школьной планиметрии

| Точка | Линии                     | Свойство               | Положение  |
|-------|---------------------------|------------------------|------------|
| Н     | высоты                    | сходятся               | внутри/вне |
| О     | серединные перпендикуляры | равноудалена от вершин | внутри/вне |
| G     | медианы                   | деление 2:1            | внутри     |
| I     | биссектрисы               | равноудалена от сторон | внутри     |

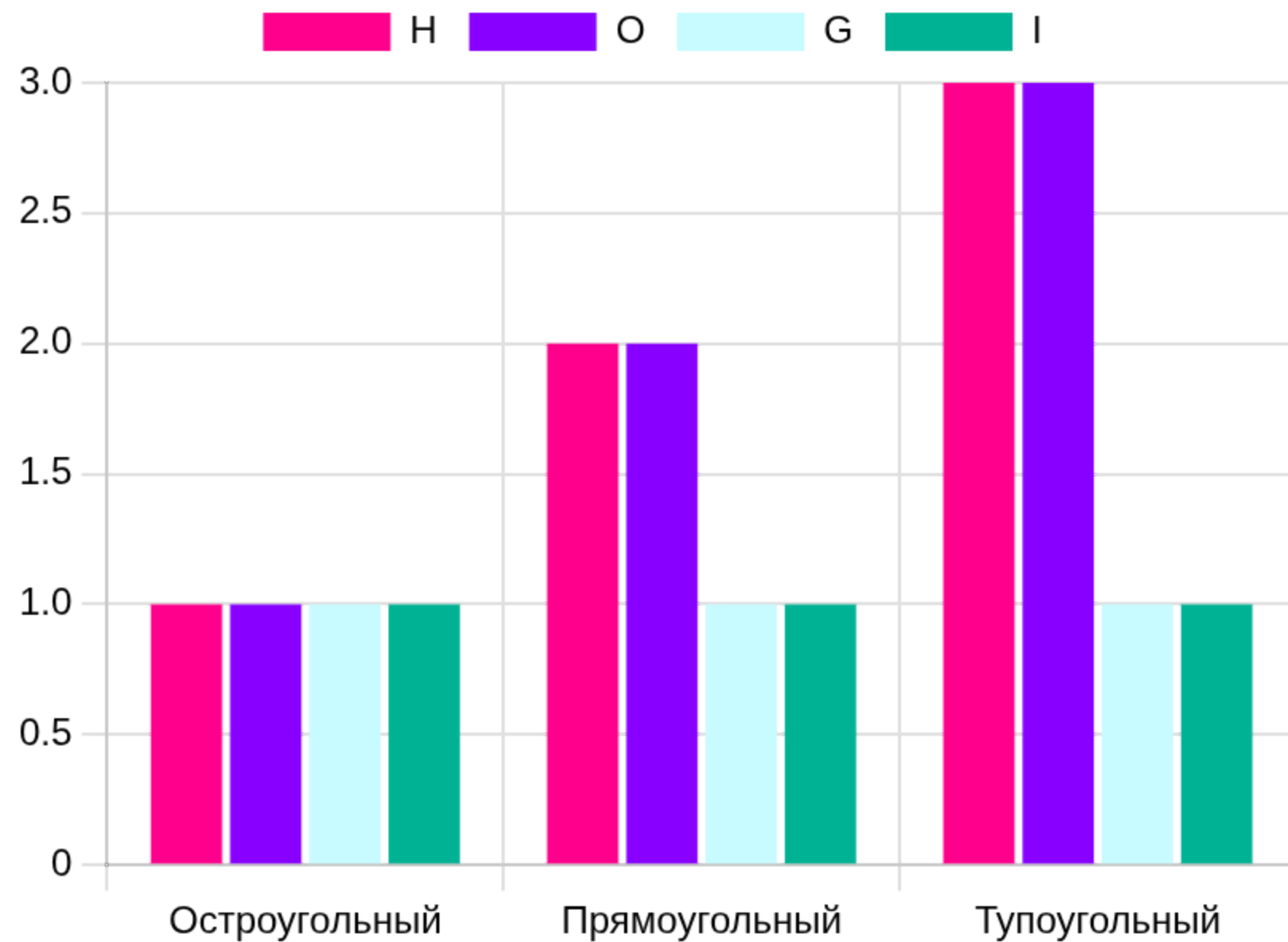
3

серединных перпендикуляра  
определяют точку  $O$

Центр описанной окружности находят по трём  
серединным перпендикулярам. От него до всех  
вершин треугольника расстояния одинаковы.

Свойство центра описанной окружности в евклидовой  
геометрии

# Где расположены замечательные точки в разных треугольниках



На диаграмме показано, как меняется положение точек H и O, тогда как G и I остаются внутри треугольника.

Вид треугольника влияет не на все замечательные точки: устойчивее всего расположены G и I.

Обобщение свойств замечательных точек треугольника, школьная геометрия

# Центр тяжести и медианы

1

## Что такое медиана

Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В каждом треугольнике можно провести три медианы, и все они имеют одинаково важное значение.

2

## Точка G

Точка пересечения медиан называется центром тяжести и обозначается буквой G. Она помогает увидеть, как треугольник уравнивается и почему его внутреннее строение не случайно.

3

## Отношение 2:1

Центр тяжести делит каждую медиану на две части в отношении 2:1, если считать от вершины. Это свойство удобно использовать в задачах на длины отрезков.

4

## Связь с равновесием

Если вообразить треугольную пластинку одинаковой плотности, она будет удерживаться в точке G. Такое объяснение делает свойство медиан наглядным и легко запоминающимся.

# Центр вписанной окружности

## Пересечение биссектрис

Точка  $I$  получается там, где пересекаются биссектрисы углов треугольника. Каждая биссектриса делит свой угол на две равные части, поэтому все три линии согласуются в одной точке.

## Равные расстояния

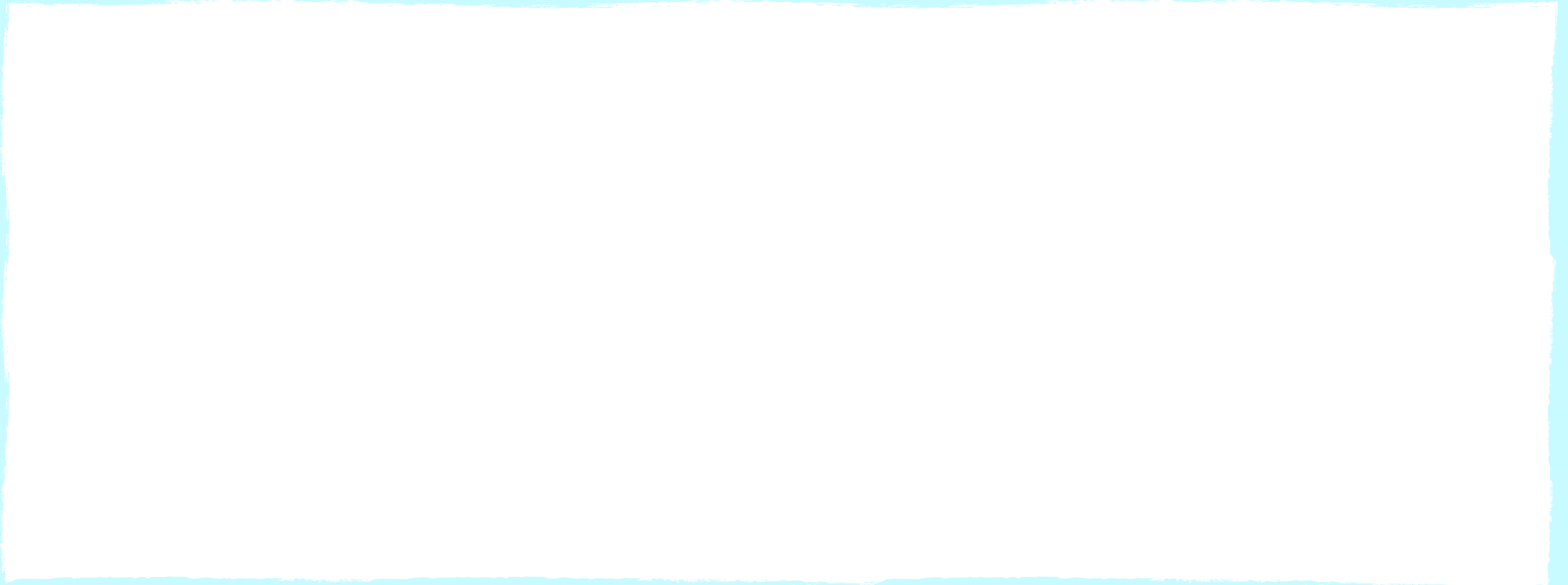
От точки  $I$  до каждой стороны можно провести перпендикуляр одинаковой длины. Именно поэтому из центра вписанной окружности строят окружность, касающуюся всех трех сторон треугольника.

## Всегда внутри

Центр  $I$  всегда лежит внутри треугольника, потому что внутренние биссектрисы не могут пересечься вне его. Это удобно: точку легко находить на чертеже и использовать в задачах на касание.

# Какая линия дает какую замечательную точку

Каждое семейство линий в треугольнике приводит к своей особой точке и своему точному свойству.



# Ортцентр в разных видах треугольника

## Остроугольный случай

В остроугольном треугольнике все высоты пересекаются внутри фигуры, поэтому ортцентр  $H$  тоже находится внутри. На чертеже он выглядит как обычная внутренняя точка пересечения.

## Прямоугольный случай

В прямоугольном треугольнике ортцентр совпадает с вершиной прямого угла. Это происходит потому, что две высоты уже совпадают с катетами, а третья проходит к гипотенузе.

## Тупоугольный случай

В тупоугольном треугольнике ортцентр оказывается вне фигуры. Две высоты опускаются на продолжения сторон, и их пересечение смещается за пределы самого треугольника.



# Сравнение четырех замечательных точек

Таблица показывает, какая линия задает каждую точку и какое главное свойство связано с ней. Это помогает быстро различать Н, О, G и I на чертеже.

У каждой точки свое семейство линий и свое измеримое свойство, поэтому их легко не путать при построениях и доказательствах.

Сведения школьного курса геометрии о четырех замечательных точках треугольника.

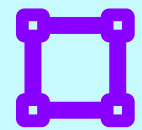
| Точка | Линии          | Свойство              | Положение      |
|-------|----------------|-----------------------|----------------|
| Н     | высоты         | их общая точка        | внутри/снаружи |
| О     | перпендикуляры | равноудален от вершин | внутри/снаружи |
| G     | медианы        | делит 2:1             | всегда внутри  |
| I     | биссектрисы    | равноудален от сторон | всегда внутри  |

# Практическое значение высот и ортцентра



## Быстрое построение

Если на чертеже нужны высоты, точку  $H$  можно найти как пересечение двух уже построенных перпендикуляров. Это экономит время и помогает сразу увидеть структуру треугольника.



## Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике две высоты распознаются особенно легко: они совпадают с катетами. Это делает задачу на нахождение ортцентра почти мгновенной.



## Площадь треугольника

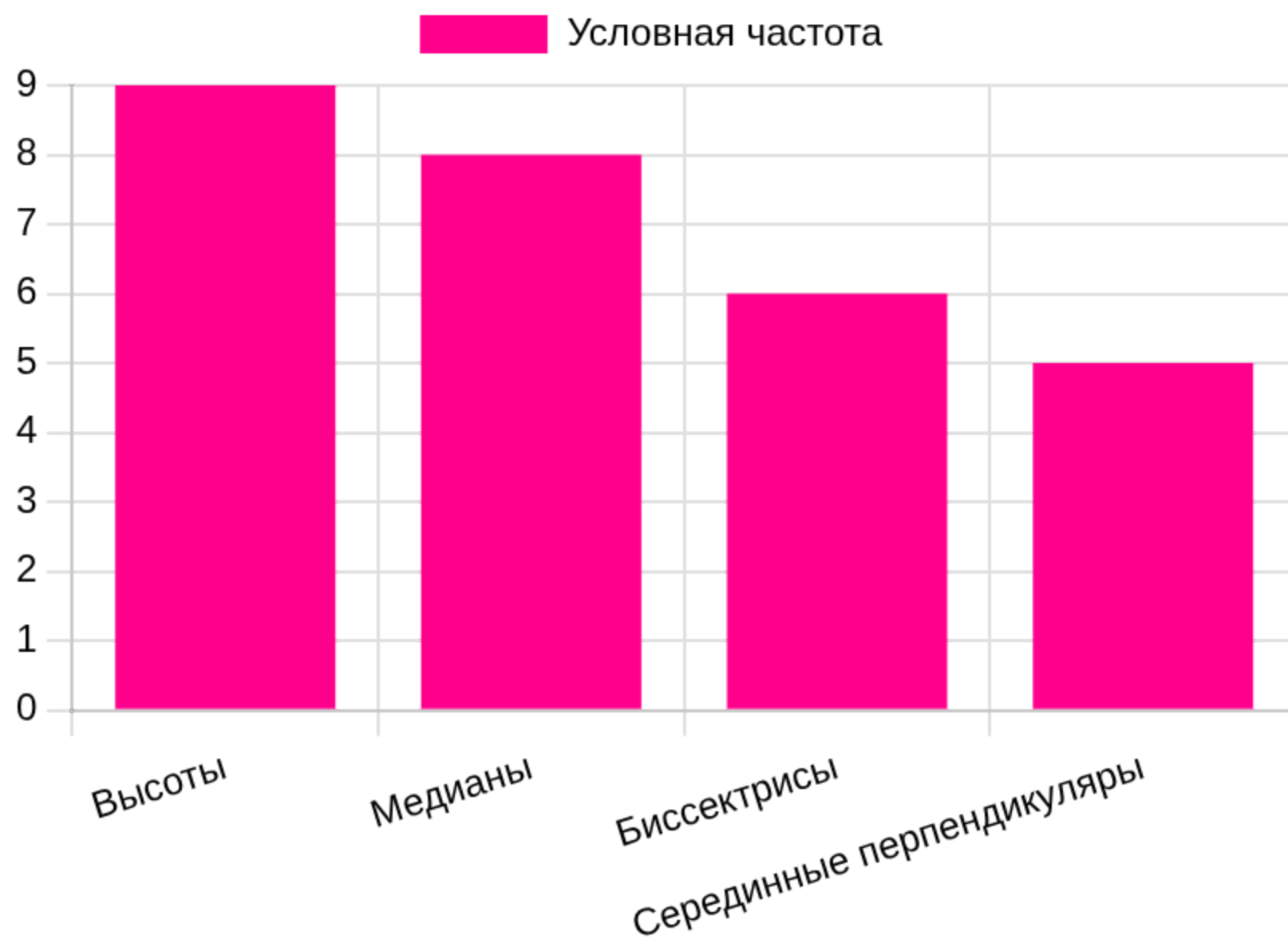
Высота нужна в формулах площади, потому что площадь удобно выражать через основание и перпендикуляр к нему. Поэтому высоты часто используют в вычислительных задачах.



## Проверка чертежа

Перпендикулярность высот помогает проверять правильность построения. Если линия не образует прямой угол с нужной стороной, значит, чертеж выполнен неверно.

# Какие линии чаще всего встречаются в задачах о треугольнике



На практике чаще всего встречаются высоты и медианы: они помогают работать с площадью, делением сторон и построениями внутри треугольника.

Высоты и медианы чаще нужны для общих свойств треугольника, а биссектрисы и перпендикуляры — для задач, связанных с окружностями и расстояниями.

Условное сравнение по типовым задачам школьного курса геометрии; оценки приведены для наглядности.

# Типичные ошибки при изучении темы

## Высота и медиана

Высоту часто путают с медианой, хотя медиана идет к середине стороны, а высота обязательно перпендикулярна ей. Эти линии служат разным целям и не заменяют друг друга.

## Ортцентр и центр окружности

Ортцентр  $H$  не является центром окружности. Центр описанной окружности обозначают буквой  $O$ , и именно он равноудален от всех вершин треугольника.

## Биссектриса не делит сторону

Биссектриса делит угол на две равные части, а не противоположную сторону. Если помнить это правило, легко отличить ее от медианы и высоты.

## Разные точки — разные свойства

Центр тяжести  $G$  и центр вписанной окружности  $I$  связаны с разными линиями, поэтому обычно не совпадают. У каждой точки свое точное геометрическое значение.

## Положение точки на рисунке

Не стоит автоматически ожидать, что все замечательные точки лежат внутри треугольника. Для  $H$  и  $O$  положение зависит от вида треугольника, а  $G$  и  $I$  всегда внутри.

# Краткая историческая справка

## Идеи античной геометрии

Замечательные точки треугольника относятся к классической евклидовой геометрии. Их свойства изучали как часть строгих рассуждений о линиях, углах и расстояниях. Поэтому эти точки стали удобным языком для доказательств и построений.



## Почему это осталось в школе

В школьном курсе тема сохранилась потому, что она объединяет сразу несколько важных приемов. Здесь нужно и строить, и доказывать, и измерять. На одном чертеже можно увидеть, как разные линии связаны между собой.



## Треугольник с четырьмя точками

Если отметить на треугольнике  $H$ ,  $O$ ,  $G$  и  $I$ , рисунок сразу становится нагляднее. Видно, что одна фигура скрывает несколько устойчивых центров, и у каждого из них есть свое точное правило построения.



# Главные факты и формулы темы

1

## Высоты и $H$

Три высоты любого треугольника пересекаются в одной точке  $H$ . Эта точка называется ортцентром и служит главным результатом теоремы о пересечении высот.

2

## Медианы и $G$

Медианы пересекаются в центре тяжести  $G$ . Он делит каждую медиану в отношении  $2:1$ , если считать от вершины треугольника.

3

## Биссектрисы и $I$

Биссектрисы сходятся в точке  $I$ . Она равноудалена от всех сторон треугольника, поэтому из нее можно провести вписанную окружность.

4

## Перпендикуляры и $O$

Серединные перпендикуляры к сторонам пересекаются в точке  $O$ . Эта точка равноудалена от всех вершин и является центром описанной окружности.

# Треугольник открывает свои центры

Высоты, медианы, биссектрисы и серединные перпендикуляры показывают, что треугольник устроен очень строго. Их пересечения дают четыре замечательные точки, которые помогают понимать фигуру и уверенно решать задачи.