



Геометрические места точек

Как найти все точки с нужным
свойством?



ГМТ в геометрии 9 класса

Геометрические места точек помогают связывать свойства фигур, измерения и доказательства. На этой теме удобно разбирать окружность, прямую, углы и расстояния, а также понимать, почему в задачах получается именно такой ответ.



Определение геометрического места точек

1

Одно условие

Геометрическое место точек — это все точки плоскости, для которых выполняется одно и то же условие, например равное расстояние или равенство углов.

2

Подходит не каждая точка

Если точка не выполняет заданное условие, она не входит в искомое множество. Поэтому важно проверять не отдельные точки, а всю фигуру целиком.

3

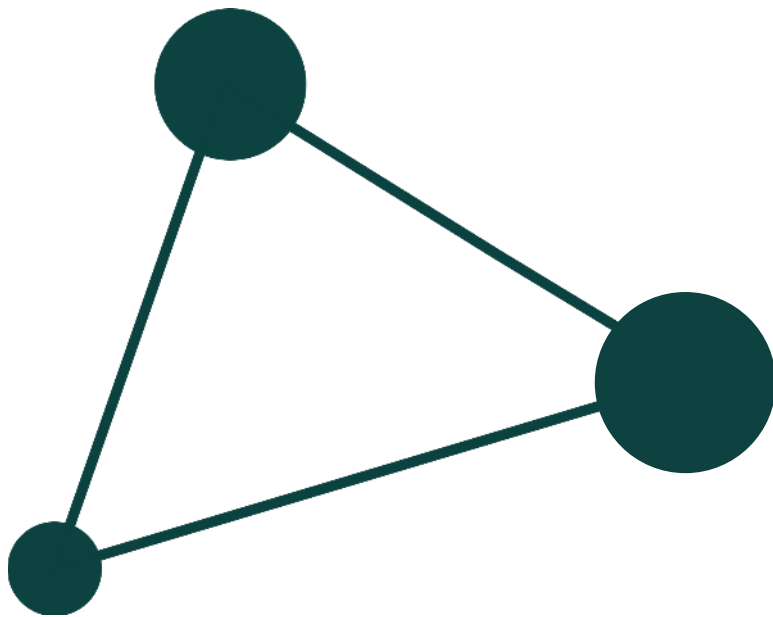
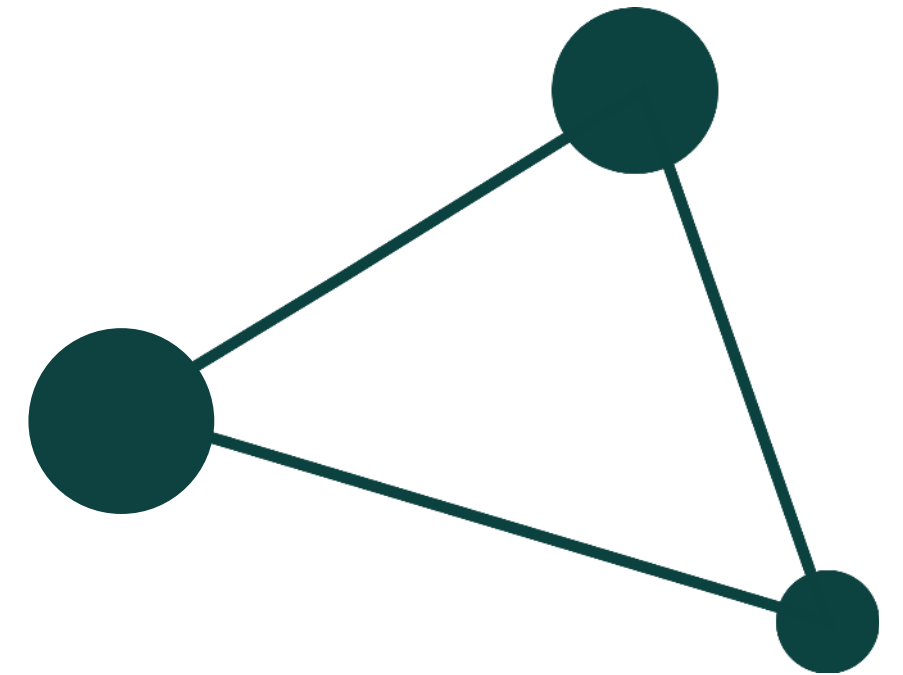
Свойство и фигура

В геометрии нужно различать само свойство и фигуру, на которой оно выполняется. Одна и та же идея может задавать разные ГМТ в разных задачах.

4

Основа для доказательства

Понимание ГМТ помогает не только находить ответы, но и доказывать их. Так решение становится не угадыванием, а строгим геометрическим выводом.



Самые известные примеры геометрических мест точек

Условие	ГМТ	Признак
Равноудалены от центра	Окружность	Постоянный радиус
Равноудалены от концов	Серединный перпендикуляр	Через середину, под 90°
Равноудалены от сторон	Биссектриса угла	Равные углы до сторон
На одном расстоянии от прямой	Параллельная прямая	Одинаковый перпендикуляр

Ниже приведены основные школьные примеры ГМТ и признак, по которому их узнают.

Во всех примерах ключевым признаком становится постоянная величина: расстояние или угол.

Окружность как ГМТ в геометрии и в окружающем мире

● Что задаёт окружность

Окружность состоит из всех точек, которые находятся от центра на одинаковом расстоянии. Это расстояние называют радиусом, и оно остаётся неизменным для каждой точки линии.

● Где встречается

Окружность легко увидеть в колесе, циферблате часов, монете и спортивной мишени. В этих предметах одна и та же удалённость от центра создаёт узнаваемую форму.

● Что показывают на рисунке

На схеме обычно отмечают центр, радиус и несколько точек окружности. Так видно, что расстояние от центра до любой отмеченной точки одинаково.

● Почему это важно

Понимание окружности как ГМТ помогает не просто запомнить форму, а объяснить её через свойство точек. Это удобно в задачах на построение и доказательство.



Серединный перпендикуляр отрезка

6

1

Как выглядит

Серединный перпендикуляр — это прямая, которая проходит через середину отрезка и образует с ним прямой угол. Такое расположение сразу выделяет его среди других прямых.

2

Главное свойство

Каждая точка серединного перпендикуляра находится на одинаковом расстоянии от концов отрезка. Это свойство удобно проверять с помощью равных отрезков или построений циркулем.

3

Обратное утверждение

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она обязательно лежит на серединном перпендикуляре. Именно это делает его настоящим геометрическим местом точек.

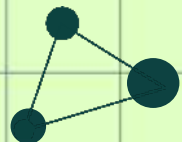
4

Где применяется

Серединный перпендикуляр используют при построении симметричных фигур и при поиске центра окружности, особенно когда нужно найти точку, равноудалённую от нескольких точек.

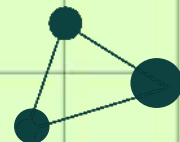
Биссектриса угла как множество равноудалённых точек

7



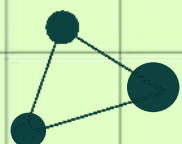
Деление угла

Биссектриса делит угол на две равные части. Это помогает точно разделять угол на симметричные части и удобно использовать в чертежах и доказательствах.



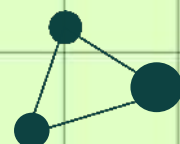
Равноудалённость от сторон

Любая точка биссектрисы находится на одинаковом расстоянии от обеих сторон угла. Расстояние при этом измеряют по перпендикулярам, опущенным к сторонам.



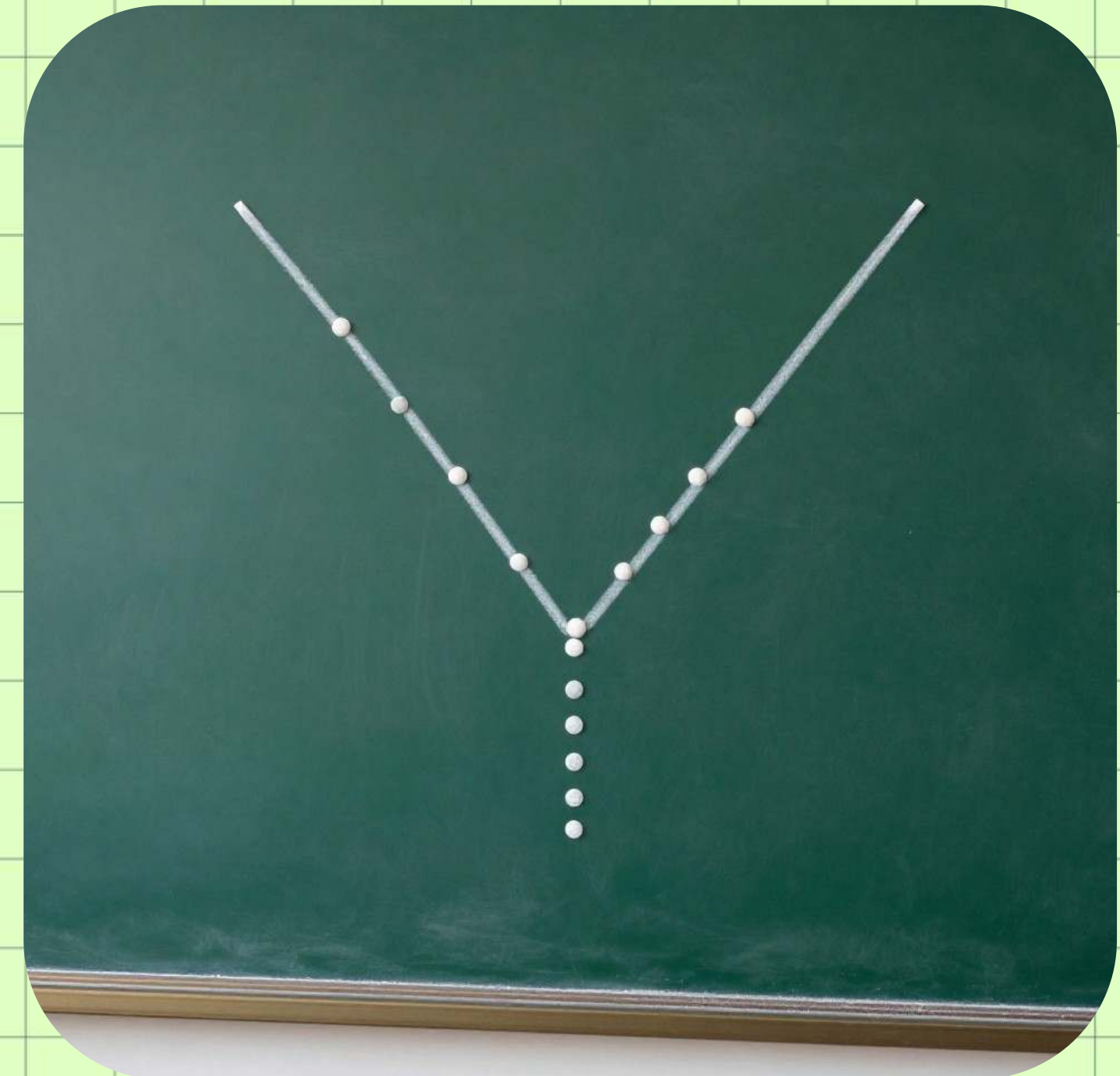
Обратное свойство

Если точка одинаково удалена от сторон угла, она лежит на его биссектрисе. Значит, биссектриса действительно задаёт все такие точки, а не только одну из них.



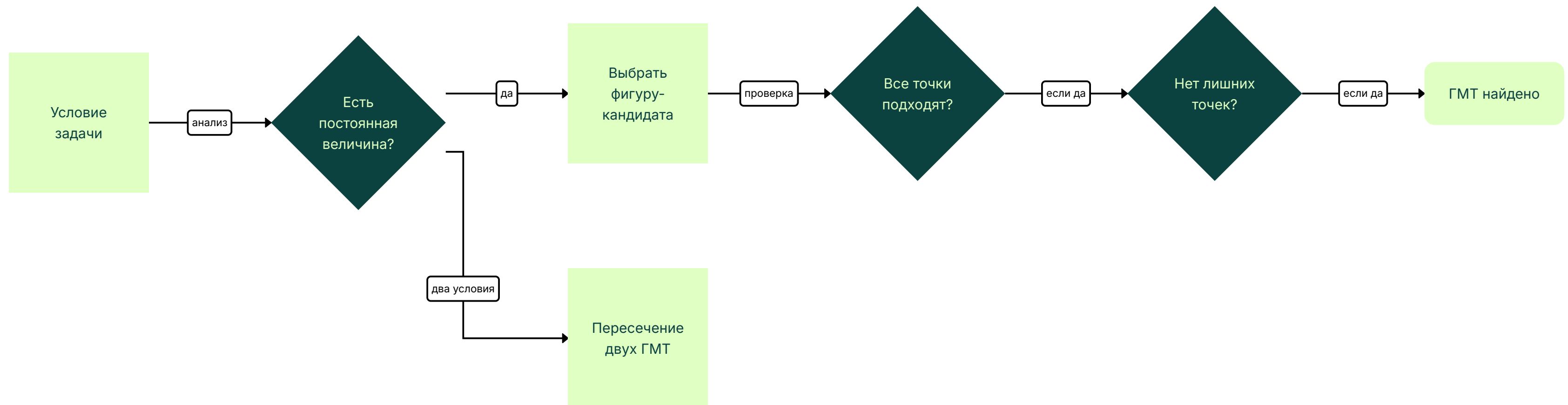
Школьные задачи

Это свойство часто используют при построении треугольников, делении углов и поиске точек, одинаково удалённых от двух прямых, которые образуют угол.



Как распознают ГМТ в задаче

Последовательность действий при анализе условия и выборе фигуры

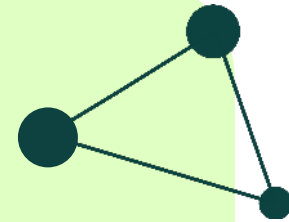


Два обязательных условия доказательства ГМТ

1

Проверка вперёд

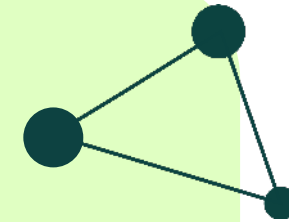
Сначала нужно убедиться, что каждая точка найденной фигуры действительно обладает нужным свойством. Без этого фигура может оказаться случайно похожей, но неверной.



2

Проверка обратно

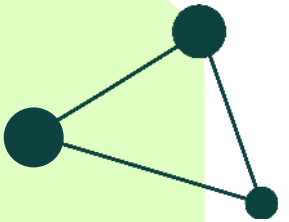
Затем проверяют обратное утверждение: любая точка с нужным свойством должна лежать на найденной фигуре. Это исключает пропуск лишних или посторонних точек.



3

Полнота доказательства

Только после выполнения обоих условий можно считать ГМТ доказанным. Если хотя бы одна проверка не выполнена, решение остаётся неполным и требует доработки.



Какие ГМТ встречаются в школьных задачах чаще всего

Диаграмма показывает типичные учебные ситуации, где чаще всего нужно искать точки с заданным свойством.

Чаще всего встречаются окружность и серединный перпендикуляр; затем идут биссектриса и параллельные прямые.



Обобщение типичных школьных задач по геометрии; условные доли для наглядности

Расстояние как главный ориентир в задачах на ГМТ

11

● Две базовые меры

В задачах на ГМТ чаще всего сравнивают расстояние от точки до точки и от точки до прямой. Именно эти величины задают условие, по которому ищут нужное множество точек.

● Фигуры, связанные с равенством

Если расстояния должны быть равны, обычно появляются окружность, серединный перпендикуляр, биссектриса или параллельная прямая. Эти фигуры удобно распознавать по тому, что величина не меняется.

● Перпендикуляр как расстояние

Расстояние от точки до прямой измеряют по перпендикуляру, потому что это самый короткий отрезок. На рисунке важно показать его отдельно, чтобы не перепутать с наклонным отрезком.

● Почему это помогает

Когда условие задачи связано с расстоянием, оно сразу подсказывает, какую линию или окружность строить. Так становится проще перейти от текста задачи к геометрическому решению.



Параллельные прямые как ГМТ точек с одинаковым расстоянием до прямой

1

Заданная прямая

Берут прямую и фиксируют расстояние до неё. Все точки, которые находятся на этом расстоянии по одну сторону, образуют одну прямую, параллельную исходной.

3

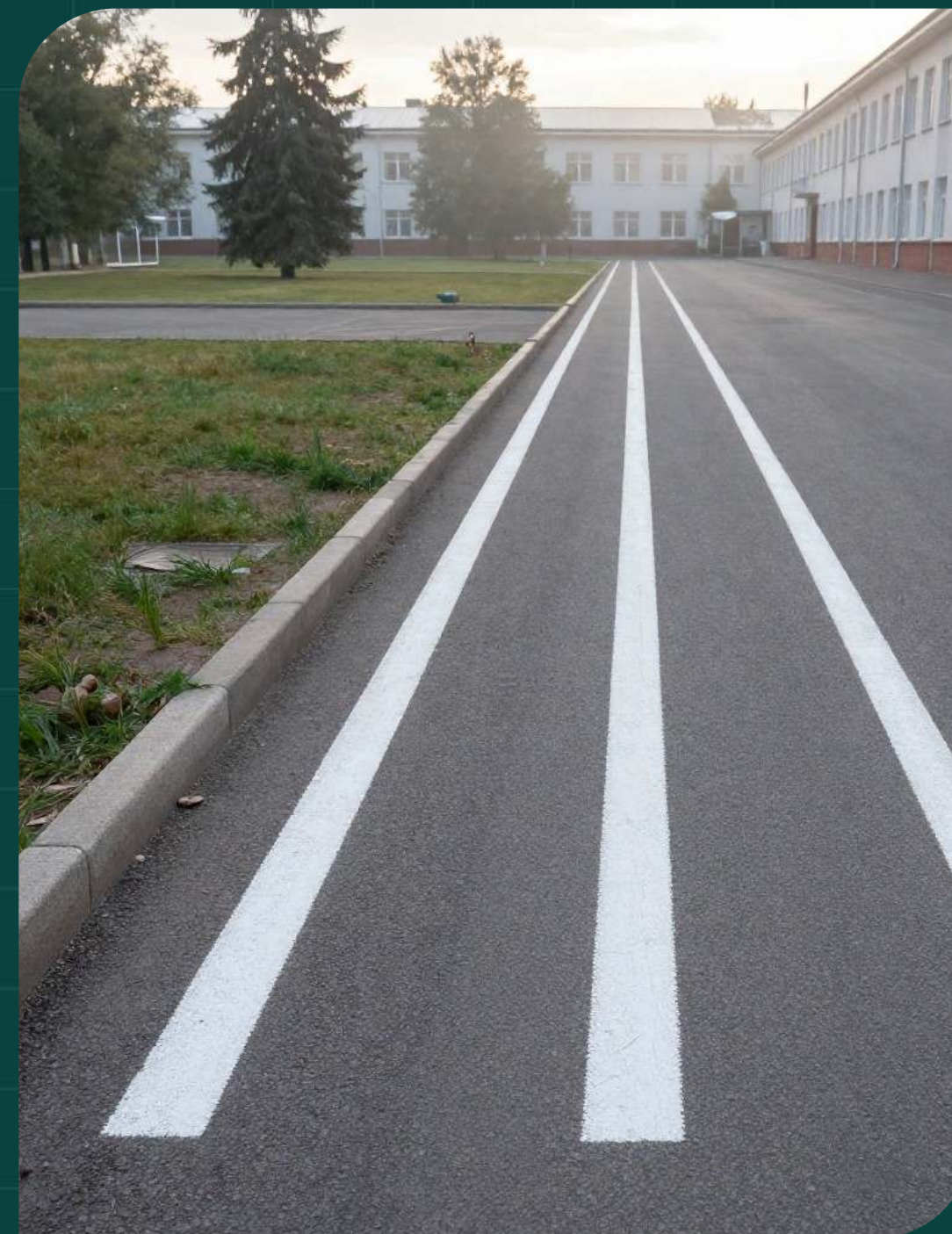
Применение в задачах

Такой ГМТ встречается при построении полос, дорожек, коридоров и разметки. Везде, где важно сохранить одинаковый отступ от прямой, возникают параллельные линии.

2

Обе стороны

Если отложить то же расстояние по другую сторону, получится вторая параллельная прямая. Поэтому одно условие часто даёт сразу две линии, а не одну.



Сравнение основных фигур, которые возникают как ГМТ

Фигура	Постоянно	Свойство
Окружность	до центра	равноудалённость
Серединный перпендикуляр	до концов	равноудалённость
Биссектриса	до сторон	равноудалённость
Параллельная прямая	до прямой	постоянное расстояние

Основные геометрические места точек удобно сравнивать по тому, что остаётся неизменным в условии.

Если понимать, что именно остаётся постоянным, можно быстро определить нужную фигуру и не путать похожие свойства.



ГМТ в задачах на построение



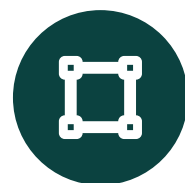
Равноудалённость от двух точек

Когда нужно найти точку, одинаково удалённую от двух заданных точек, удобно сразу вспомнить серединный перпендикуляр. Он даёт все такие точки без лишних построений.



Центр окружности

Если известны точки окружности, задача часто сводится к поиску центра. Здесь помогают ГМТ, связанные с равноудалённостью от концов отрезков, то есть серединные перпендикуляры.



Точка на заданных расстояниях

Иногда нужно построить вершину фигуры при нескольких расстояниях. Тогда каждое условие превращают в отдельное ГМТ, а затем ищут их общую точку.

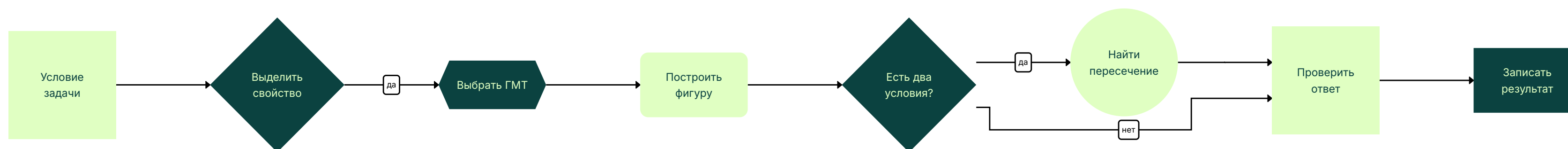


Равноудалённость от сторон угла

Если точка должна быть одинаково удалена от двух сторон угла, её место сразу указывает биссектриса. Так сложная фраза задачи превращается в понятную линию.

Алгоритм решения задачи на построение через ГМТ

Схема показывает, как переводить условие задачи в геометрическую модель и находить ответ через построение.



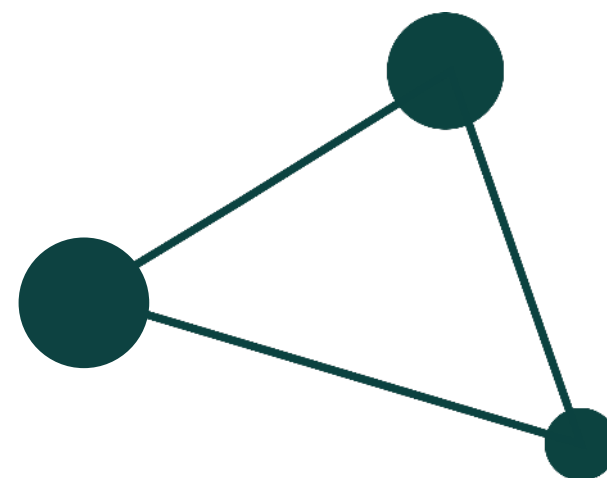
Пересечение двух геометрических мест точек

16

1

Два условия сразу

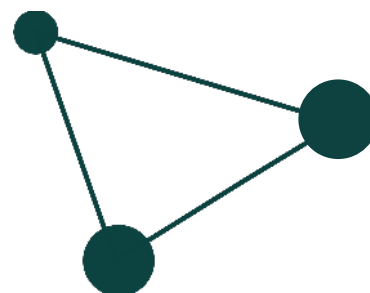
Если точка должна удовлетворять двум требованиям, каждое из них задаёт своё геометрическое место. Решение ищут там, где эти фигуры пересекаются и оба условия выполняются одновременно.



2

Сколько может быть ответов

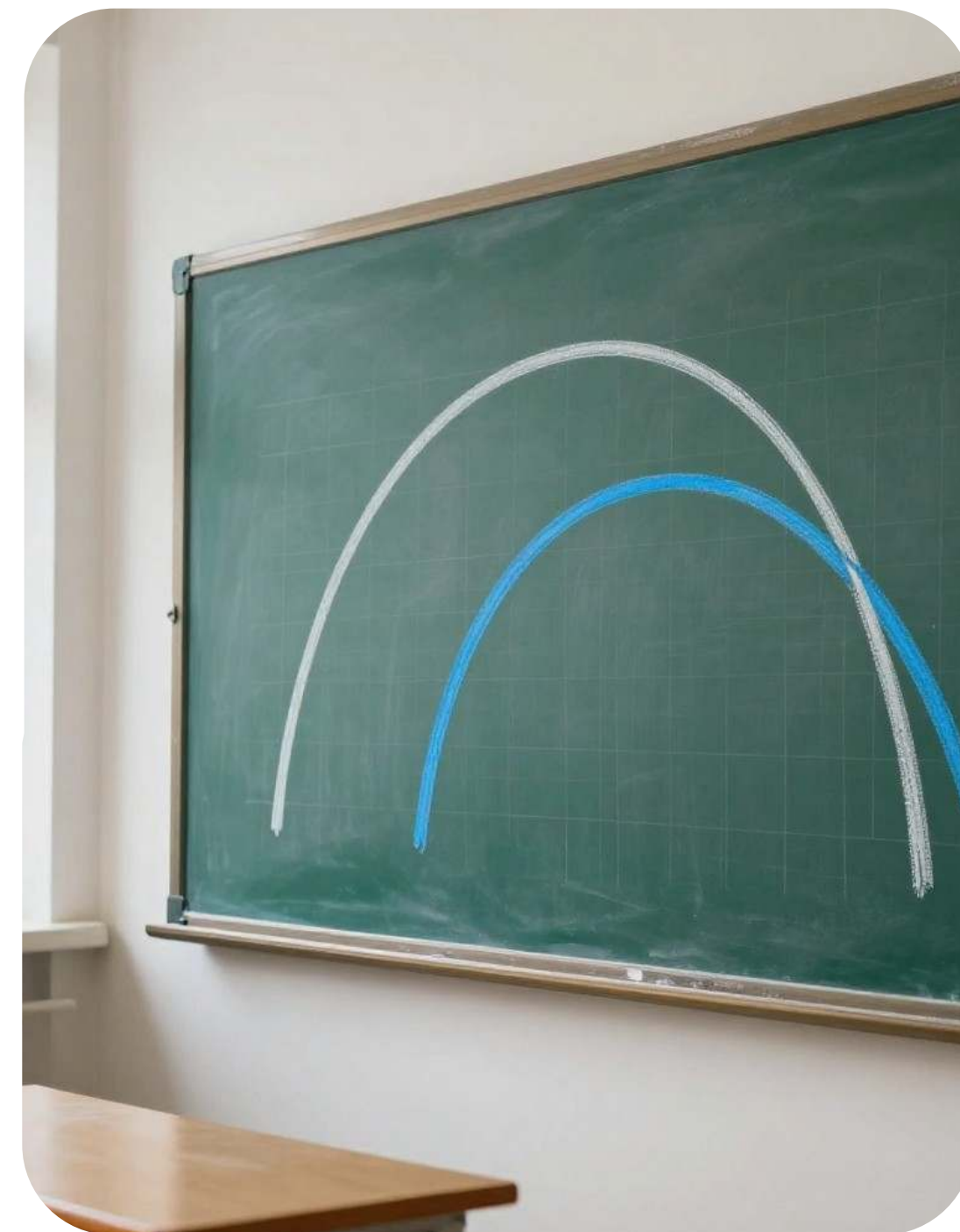
Пересечение двух ГМТ может дать одну точку, две точки или ни одной. Всё зависит от того, как расположены фигуры и совпадают ли их общие точки.



3

Проверка после построения

После нахождения пересечения важно убедиться, что каждая полученная точка действительно подходит к обоим условиям. Это помогает избежать случайного ответа, который выглядит верно, но не является решением.



Сколько решений может дать пересечение ГМТ

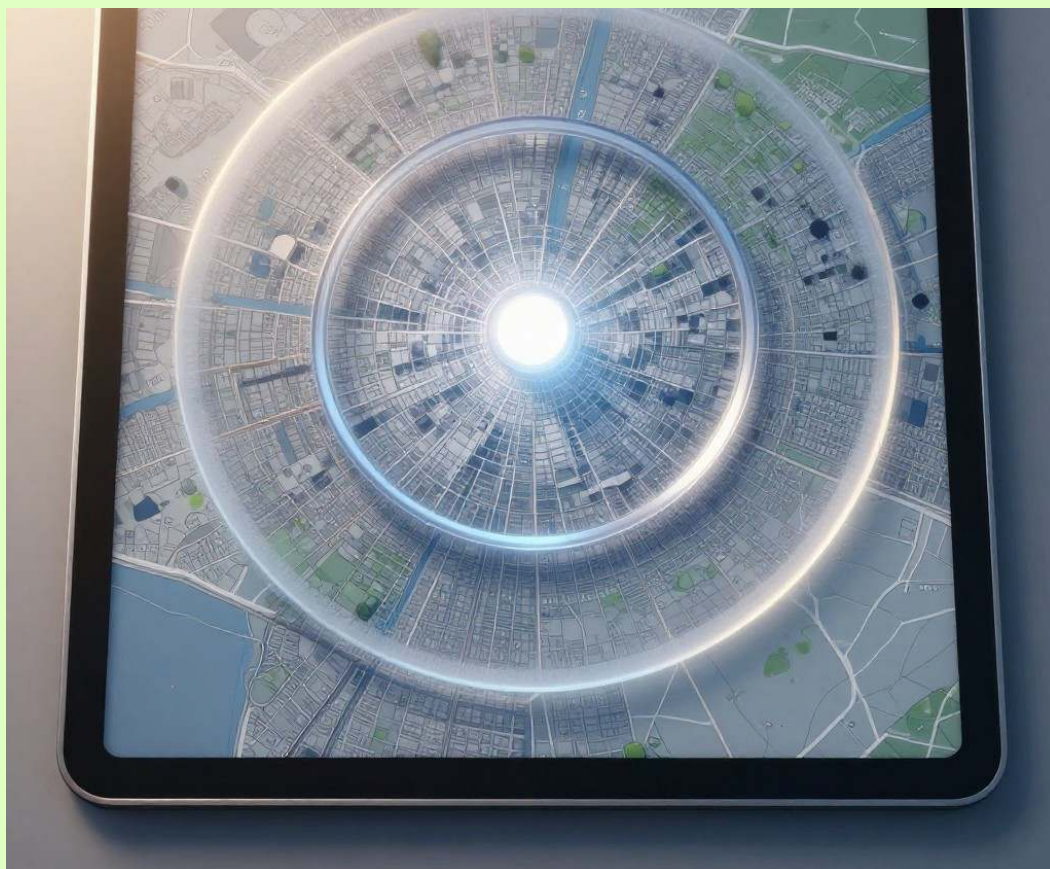
Число решений определяется взаимным положением фигур: иногда они не встречаются, иногда касаются, а иногда пересекаются в двух точках.

Самые частые случаи — одно или два решения; отсутствие ответа тоже возможно, если общих точек нет.



Схема по теме «Пересечение геометрических мест точек»,
без числовой статистики

ГМТ в жизни, технике и навигации



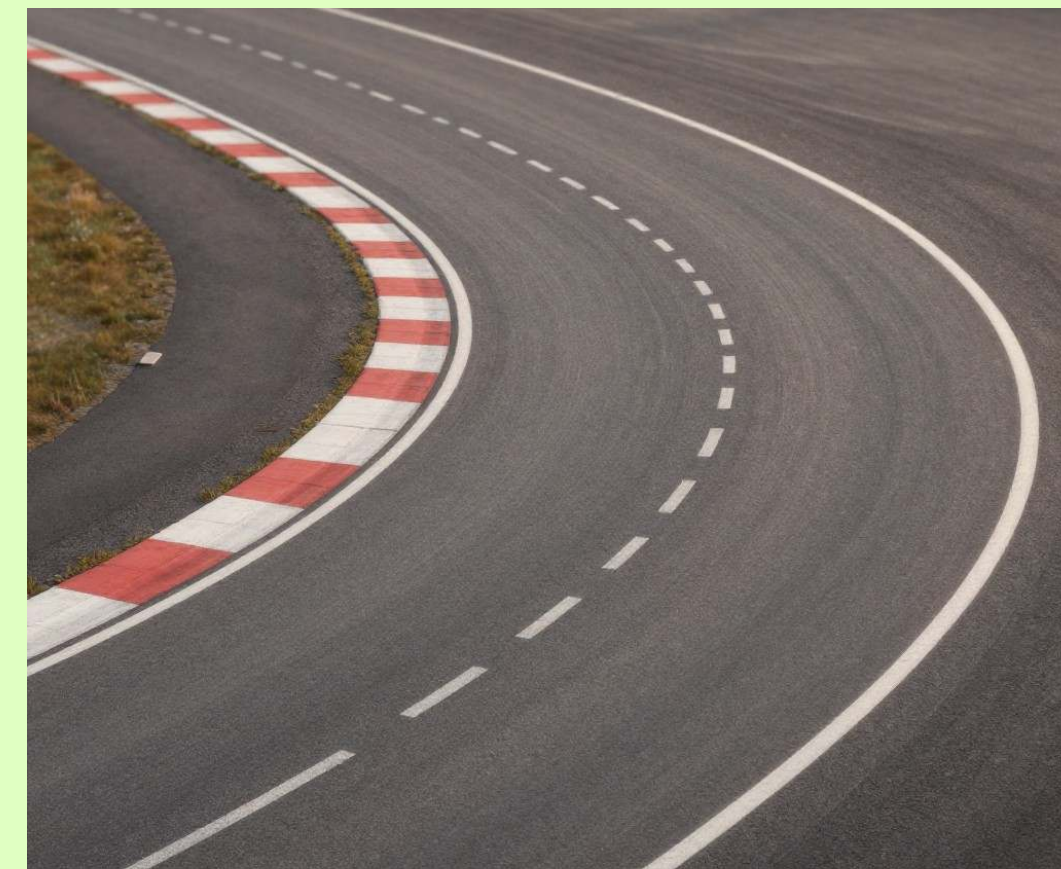
Круг вокруг точки на карте

На карте часто нужно показать область, находящуюся на одинаковом расстоянии от центра. Так изображают зоны обслуживания, радиус действия и безопасные участки. Если отметить центр и провести окружность, сразу видно, где расстояние остаётся постоянным.



Радар и связь

В технике круговые зоны помогают описывать работу радара и передатчиков. Центр показывает источник сигнала, а граница зоны — места, где действие ещё сохраняется. Это наглядный пример геометрического места точек в реальной задаче.



Арена и дорожная разметка

В спортивных сооружениях и на дорогах тоже встречаются одинаковые расстояния до линии или центра. Разметка, дорожки и проходы строятся так, чтобы сохранять нужный отступ и не нарушать геометрическую форму.

Типичные ошибки при работе с ГМТ

19

1

Путают фигуру и часть

Иногда называют ГМТ только по одному отрезку или дуге, хотя нужно рассматривать всю фигуру. Важно помнить: геометрическое место включает все точки, которые удовлетворяют условию.

2

Не проверяют обратное

Недостаточно показать, что точки фигуры подходят к условию. Нужно ещё доказать, что любая подходящая точка действительно лежит на найденной линии или окружности.

3

Выбирают неверное расстояние

Частая ошибка — измерять расстояние не перпендикуляром, а наклонным отрезком. В задачах на ГМТ всегда нужно уточнять, какое расстояние требуется по условию.

4

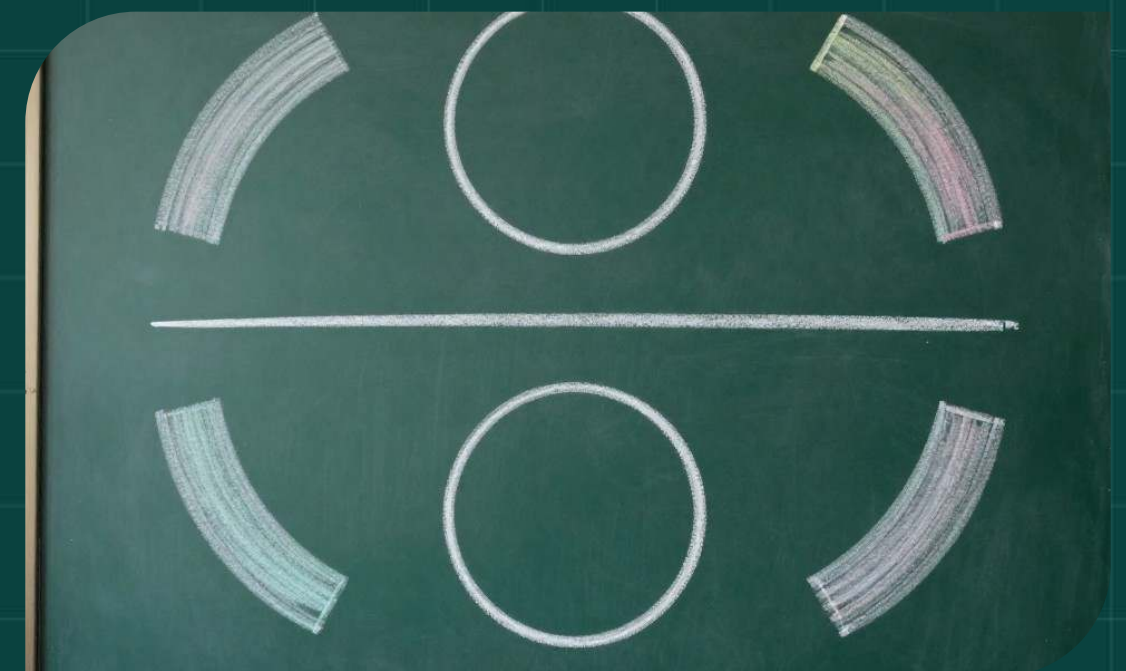
Забывают про обе стороны

Если условие задано относительно прямой, иногда существуют две симметричные фигуры по разные стороны. Когда учитывают только одну, ответ получается неполным.

5

Не замечают пересечение

Если в задаче два условия, решение обычно находится как пересечение двух ГМТ. Пропуск одного из них приводит к лишним или неверным точкам.





ГМТ помогают видеть всю задачу целиком

Геометрические места точек показывают не случайную точку, а все возможные решения с заданным свойством. Именно поэтому они так важны в построениях, доказательствах и решении задач.