

Функция $y = k/x$ при $k > 0$: обратная пропорциональность и её график

Поймём, как выглядит гипербола и почему одна величина уменьшается при росте другой.



Зачем изучать обратную пропорциональность



Эта функция помогает увидеть связь между величинами, которые меняются в разных направлениях: скорость и время, число работников и сроки, цена и количество покупок.

2

**у графика всегда две ветви,
расположенные
симметрично**

Это число помогает увидеть, как устроена гипербола и почему она состоит из двух частей.

Свойства графика функции $y = k/x$ при $k > 0$

Построение точек для графика $y = k/x$

Алгоритм по формуле обратной пропорциональности

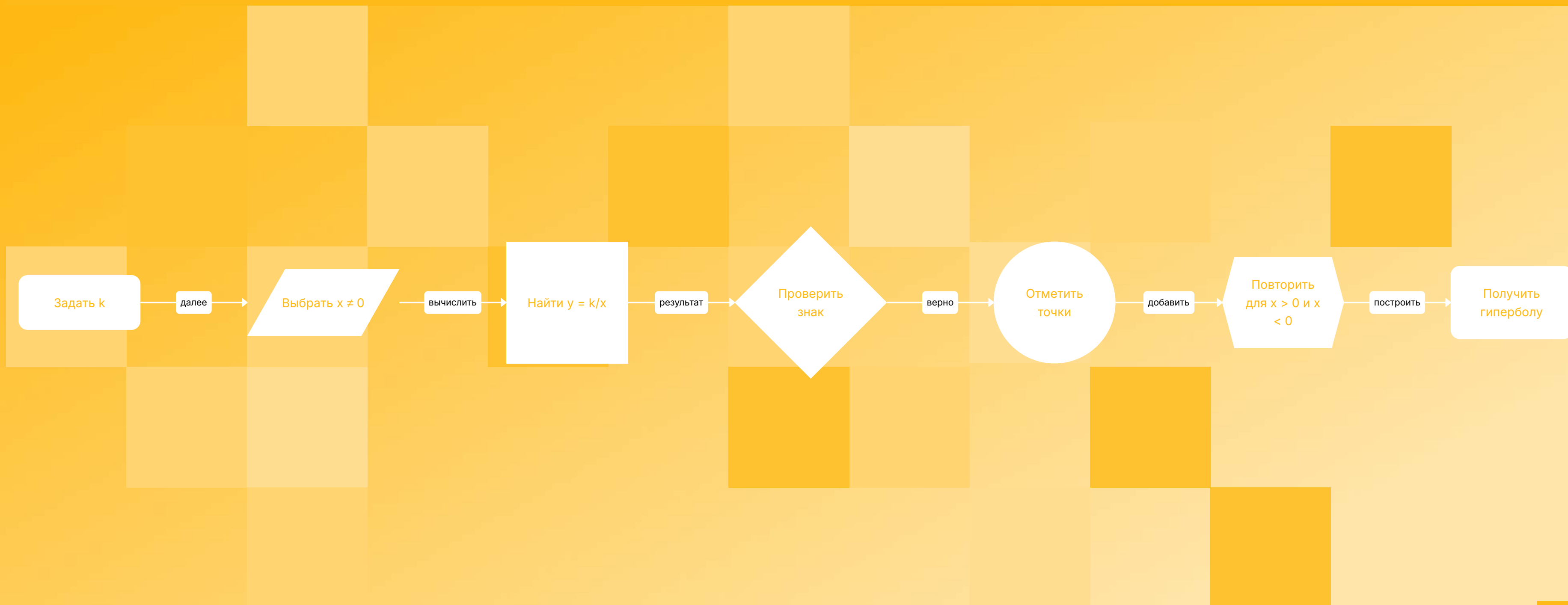


Таблица значений функции при $k = 6$

x	y
-6	-1
-3	-2
-2	-3
-1	-6
1	6
2	3
3	2
6	1

Таблица показывает пары значений, для которых произведение координат остаётся постоянным.

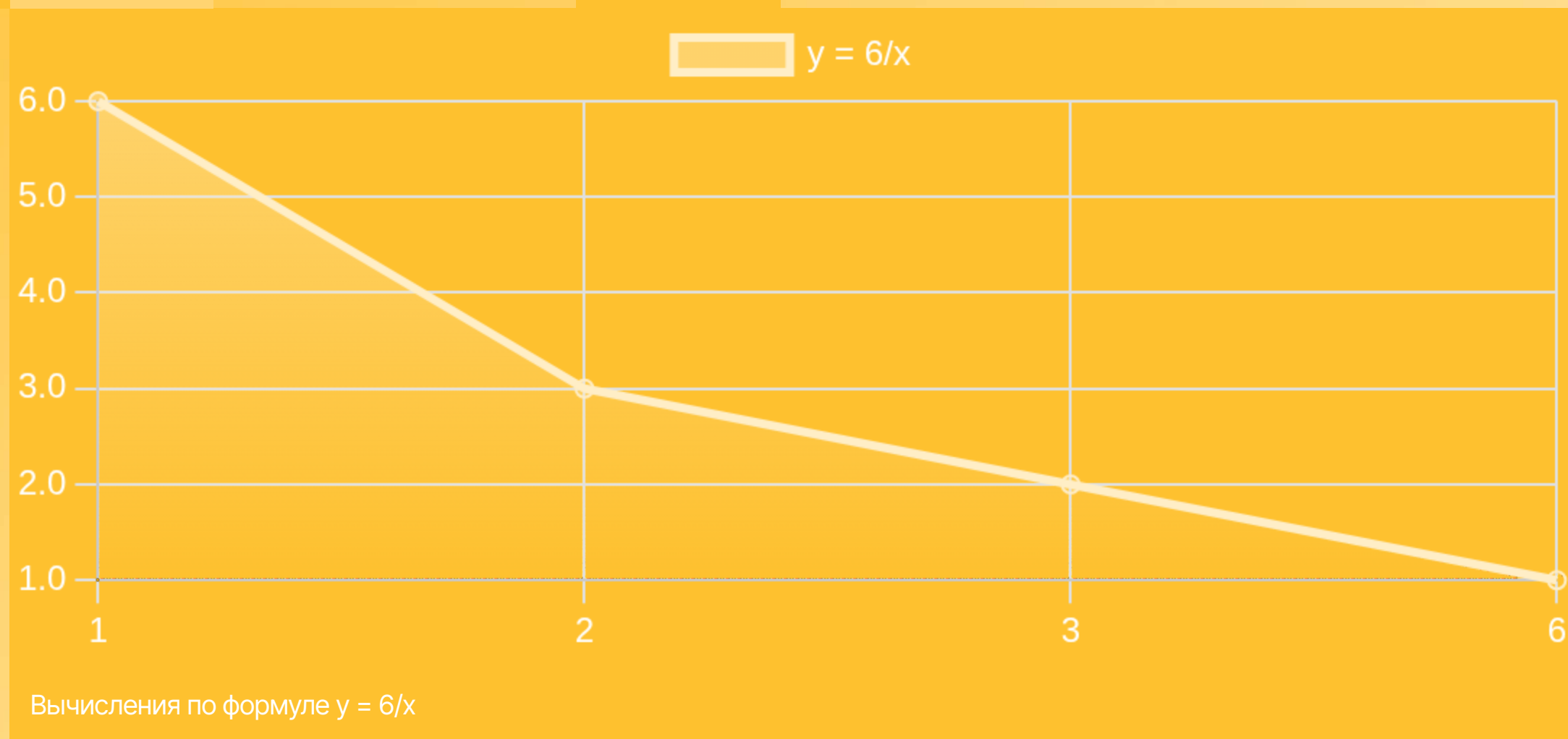
При увеличении $|x|$ модуль y уменьшается, а произведение $x \cdot y$ равно 6 для каждой пары.

Вычисления по формуле $y = 6/x$

Как изменяется y при росте x

На больших значениях x кривая становится более пологой и всё медленнее приближается к оси x .

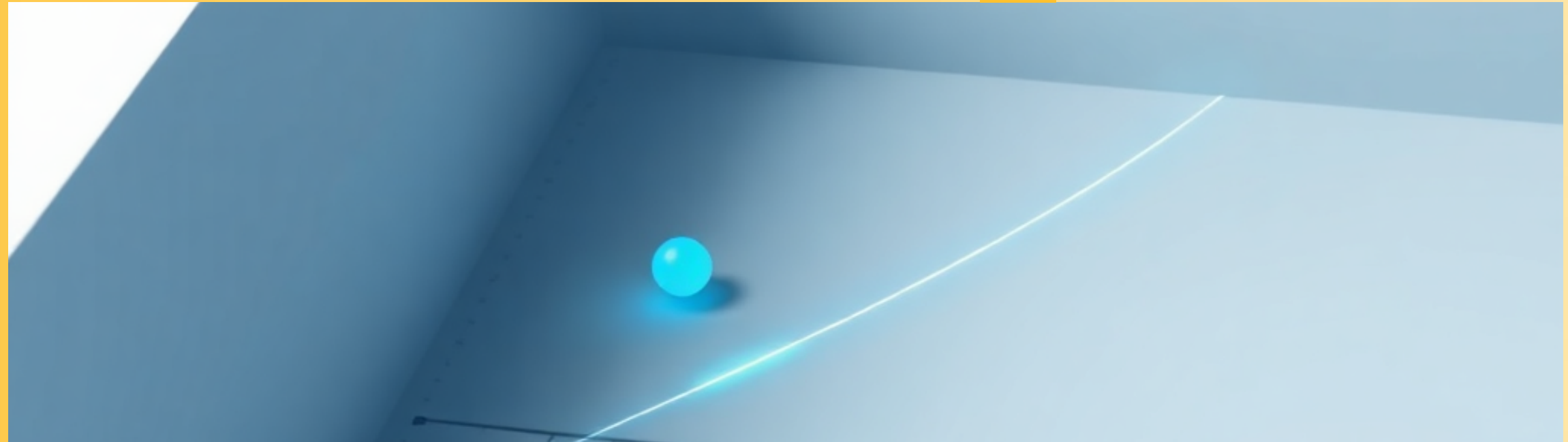
Значения y убывают неравномерно: сначала быстро, затем всё медленнее.



Как выглядит гипербола на координатной плоскости

Точки в первой четверти

Если взять положительные значения x , то получатся положительные значения y . На графике появляются точки $(1; 6)$, $(2; 3)$ и $(3; 2)$, которые показывают плавное убывание и движение ветви к осям координат.



Точки в третьей четверти

При отрицательных x значения y тоже становятся отрицательными. Поэтому на плоскости отмечают точки $(-1; -6)$, $(-2; -3)$ и $(-3; -2)$, а затем плавно соединяют их второй ветвью, симметричной первой относительно начала координат.



Область определения и область значений

1. Что можно подставлять

В формуле $y = k/x$ делить на ноль нельзя, поэтому значение $x = 0$ исключается. Все остальные числа подходят и могут быть использованы для вычислений.

2. Какие значения получает y

Значение y тоже не может быть нулём, потому что при любом ненулевом x дробь k/x остаётся ненулевой. Это важный признак функции обратной пропорциональности.

3. Почему это важно

И область определения, и область значений помогают сразу понять, какие точки можно строить на графике, а какие никогда не появятся на координатной плоскости.

4. Главный вывод

Для функции $y = k/x$ при $k > 0$ ноль не входит ни в множество допустимых x , ни в множество возможных y .

Знаки x и y при $k > 0$



Положительные x

Когда x больше нуля, значение y тоже положительное. Такие точки находятся выше оси x и образуют ветвь графика в первой четверти.



Отрицательные x

Когда x меньше нуля, y тоже становится отрицательным. Эти точки располагаются ниже оси x и формируют вторую ветвь в третьей четверти.



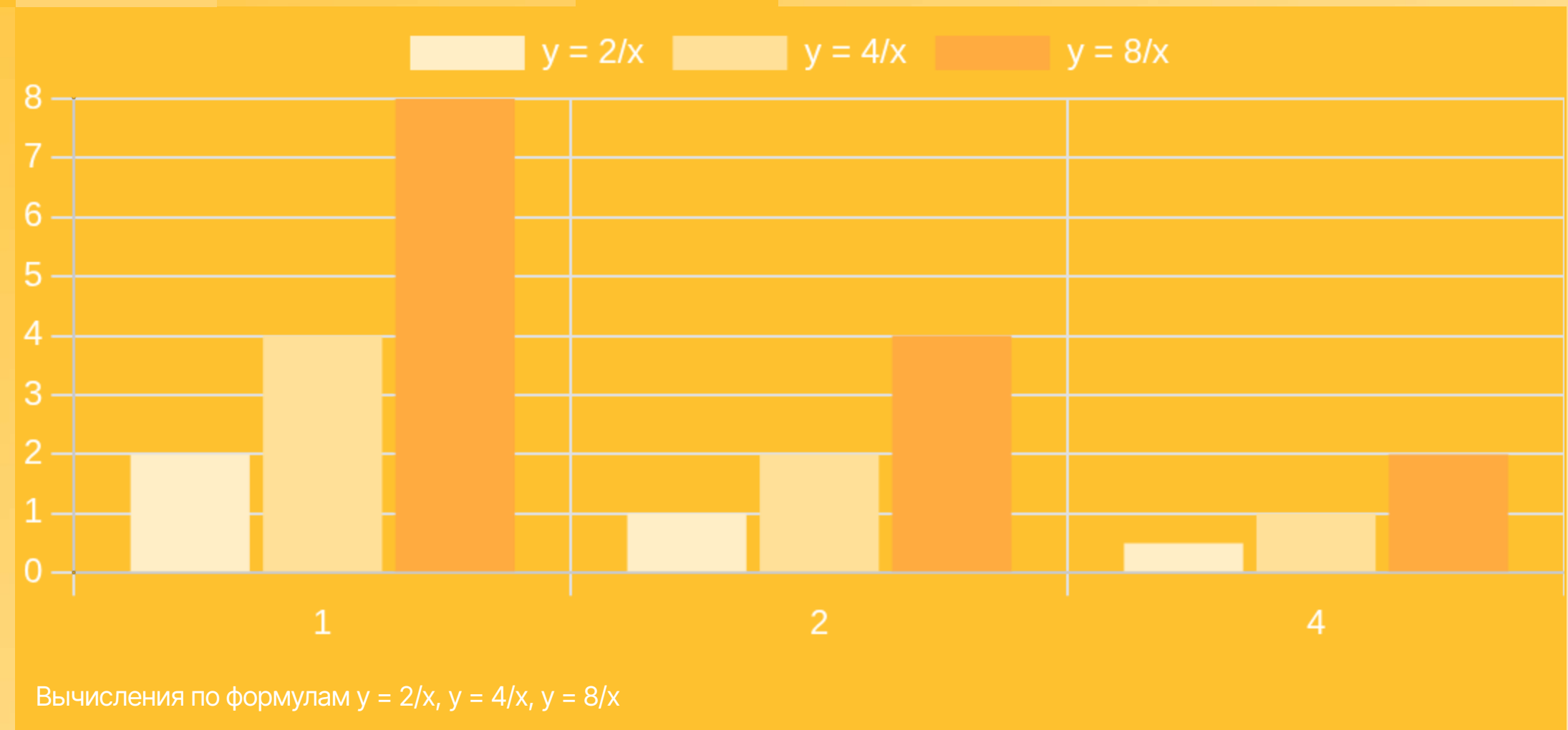
Разные знаки не подходят

Точки, у которых координаты имеют разные знаки, не принадлежат графику. При $k > 0$ у функции всегда совпадает знак x и знак y .

Сравнение графиков при разных значениях k

При одинаковом x все три функции дают разные значения, но порядок роста сохраняется.

Чем больше k , тем выше расположены точки и тем дальше ветви от осей координат.



Поведение функции у осей координат

х близко к нулю

Если брать x всё меньше по модулю, значения y быстро растут по модулю. Точки графика уходят далеко от начала координат, поэтому к оси нельзя «дойти».

Средние значения x

При $x = 1, 2, 4$ значения y становятся 6, 3 и 1,5. Видно, что при удалении от нуля график опускается или поднимается ближе к оси.

Большие $|x|$

Когда $|x|$ становится большим, y стремится к 0. Ветви не пересекают оси координат, а лишь всё ближе подходят к ним, сохраняя форму гиперболы.

Проверка принадлежности точек графику

Точка	Проверка	Итог
(2; 3)	$2 \cdot 3 = 6$	да
(1; 5)	$1 \cdot 5 = 5$	нет
(-2; -3)	$(-2) \cdot (-3) = 6$	да

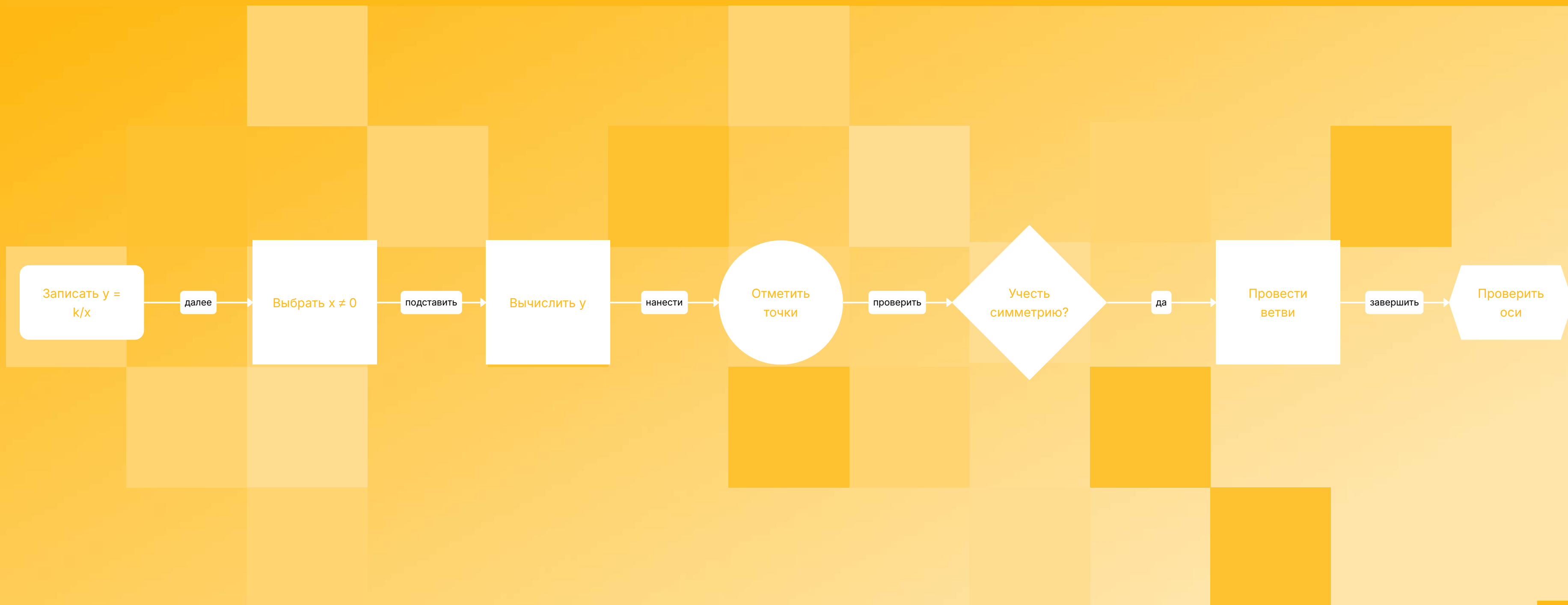
Функция $y = 6/x$; проверка по равенству $x \cdot y = 6$

Точку можно проверить по условию $x \cdot y = 6$.
Если произведение координат равно 6, точка лежит на графике функции $y = 6/x$.

Совпадение произведения координат с k — главный критерий принадлежности точки графику. Знак координат тоже важен: при $k > 0$ подходят только точки с одинаковыми знаками.

Как построить график $y = k/x$

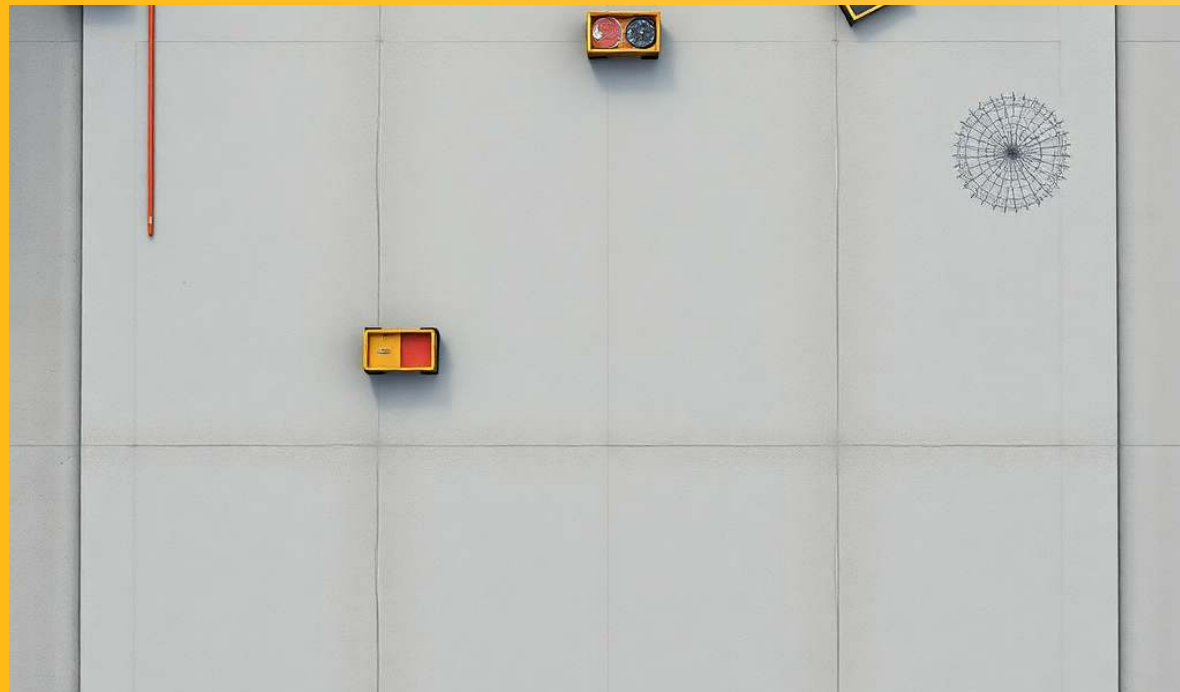
Последовательность построения по значениям функции и симметрии графика



Примеры обратной пропорциональности в жизни

Больше работников — меньше времени

На стройке или при уборке одного и того же объёма работы дополнительные люди помогают быстрее закончить дело. Но время сокращается только при сохранении одинаковой работы, поэтому зависимость удобно описывать обратной пропорциональностью.



Скорость и дорога

Если путь остаётся тем же, то при увеличении скорости поездка занимает меньше времени. Это легко представить на примере автомобиля: чем быстрее он едет, тем скорее прибывает в пункт назначения.



Цена и покупки

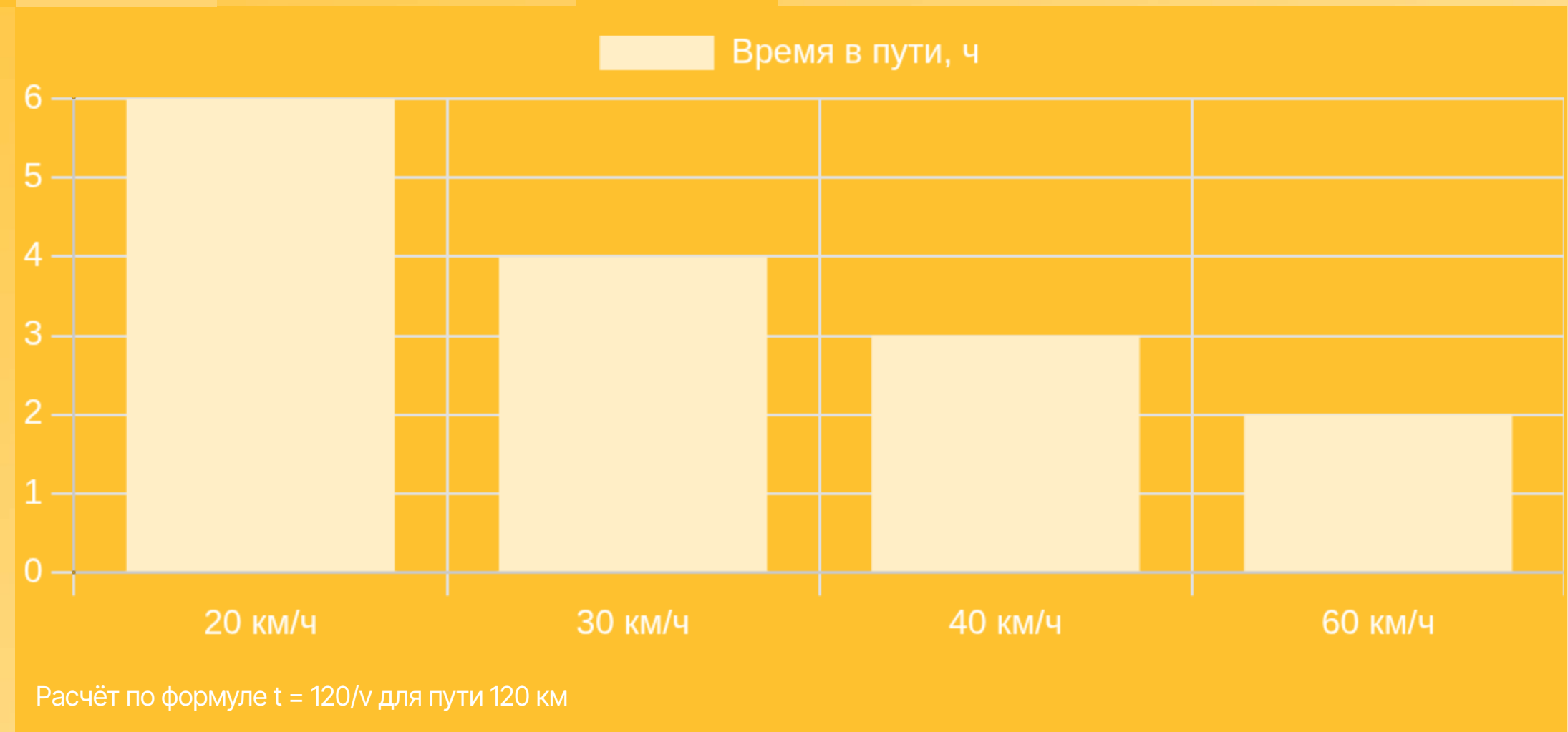
Когда у ученика есть фиксированная сумма денег, дорогой товар можно купить в меньшем количестве, чем дешёвый. Так зависимость цены и числа покупок помогает понять, как работает обратная пропорциональность в магазине.



Как меняется время при увеличении скорости

При одном и том же пути 120 км каждая новая скорость сразу меняет время поездки. Это удобно сравнивать на столбчатой диаграмме.

Чем выше скорость, тем меньше требуется времени. Значит, величины связаны обратной пропорциональностью.



Типичные ошибки при работе с функцией $y = k/x$

Подстановка нуля

Ошибка возникает, когда пытаются взять $x = 0$. В знаменателе получается деление на ноль, а это действие не определено, поэтому такая точка не может принадлежать графику.

Пересечение осей

Иногда думают, что график проходит через начало координат. На самом деле точки с координатой 0 отсутствуют, поэтому оси служат только границами, к которым ветви приближаются.

Путаница с прямой

Нельзя смешивать обратную пропорциональность с линейной функцией. У линейной зависимости график — прямая, а здесь кривая состоит из двух отдельных ветвей.

Неверный знак

При $k > 0$ обе координаты точки должны иметь один знак. Если знаки разные, произведение $x \cdot y$ будет отрицательным, и точка не подойдёт для данного графика.

Забывтая симметрия

При построении важно отмечать точки и справа, и слева от начала координат. Без этого легко получить только одну ветвь и ошибочно считать график завершённым.

Отличия функции $y = k/x$ от других функций

1.

Не прямая линия

У функции $y = mx$ график представляет собой прямую, а у $y = k/x$ — кривую из двух ветвей. Поэтому способ построения и внешний вид графика совсем другие.

2.

Не парабола

У квадратичной функции график похож на чашу и имеет одну непрерывную линию. У обратной пропорциональности форма разорвана на две части, расположенные в разных четвертях.

3.

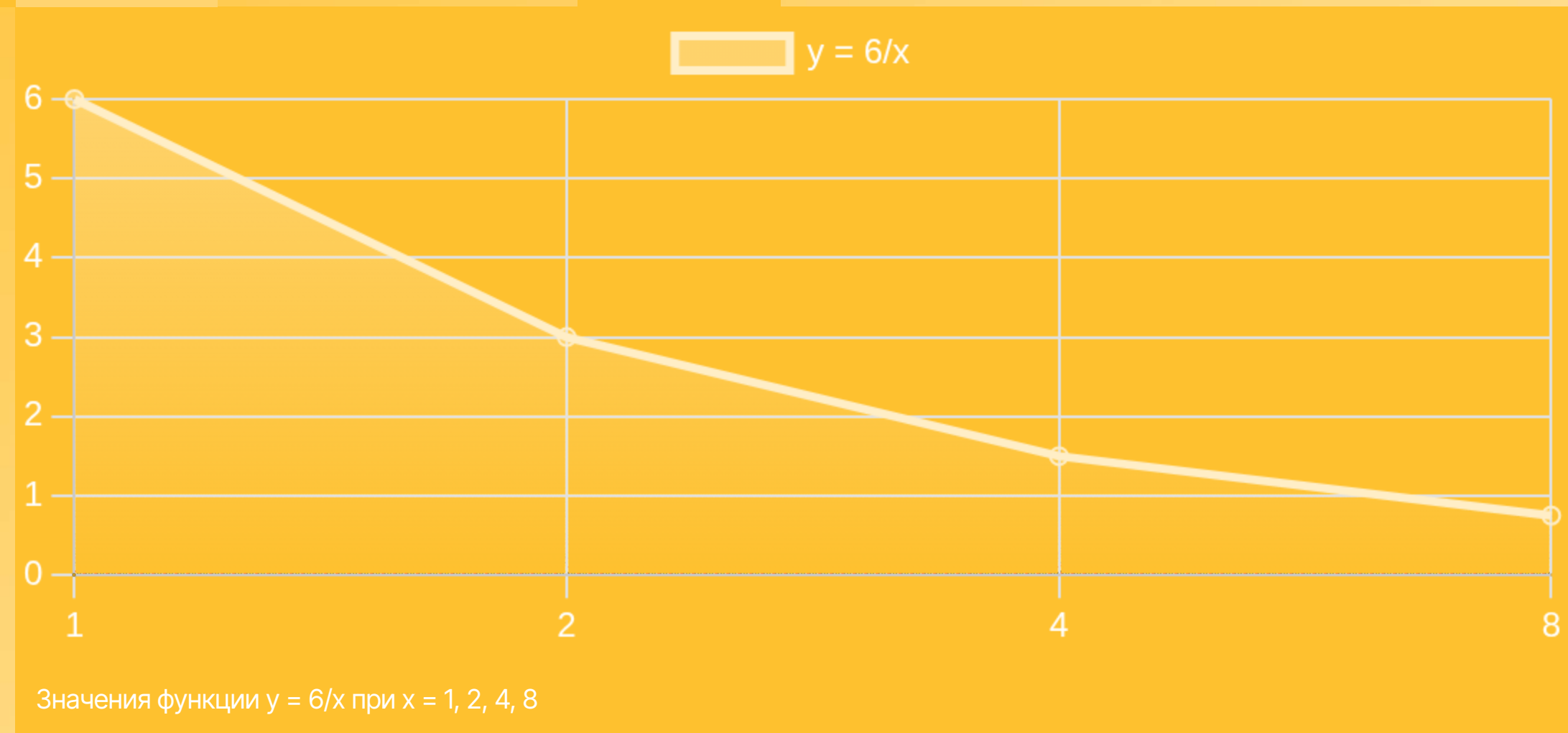
Постоянно произведение

Главный признак этой функции — неизменность произведения $x \cdot y$. У других знакомых функций постоянной может быть сумма, разность или коэффициент, но не произведение координат.

Неравномерное изменение значений функции

Одинаковое увеличение x не даёт одинакового изменения y . На графике это видно особенно хорошо, когда точки становятся всё ближе к оси x .

Сначала спад быстрый, затем замедляется. Чем дальше x от нуля, тем меньше меняется y .



Ключевые свойства функции $y = k/x$ при $k > 0$



Ноль исключён

Значение $x = 0$ не подходит, потому что деление на ноль невозможно. Поэтому область определения включает все числа, кроме нуля.



Одинаковые знаки

Если x положительно, то и y положительно; если x отрицательно, то и y отрицательно. Из-за этого точки лежат только в I и III четвертях.



Две ветви

График состоит из двух отдельных частей — правой и левой. Они не соединяются в точке, а плавно приближаются к осям координат.



Обратная зависимость

Эта функция часто встречается в задачах о движении, работе и покупках. Она помогает видеть, как одна величина уменьшается, когда другая увеличивается.

