

Графики и неравенства первой степени

Прямая показывает, где неравенство становится верным.



Зачем нужен графический метод

График помогает быстро увидеть, где выражение положительно, отрицательно или равно нулю, а также проверить найденный ответ и понять границу решения.



Вид неравенства первой степени

Общий вид

Линейное неравенство записывают как $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ или $ax+b\leq 0$, где x — неизвестное, а a и b — числа.

Почему оно линейное

Старшая степень переменной равна одному, поэтому зависимость называют неравенством первой степени. Такой вид удобно исследовать с помощью прямой на координатной плоскости.

Что считается решением

Решением является любое значение x , при котором неравенство превращается в верное утверждение. Одно значение может подойти, а другое — уже нет.

Зачем это важно

Зная форму неравенства, легче выбрать способ решения, построить график и аккуратно записать ответ в виде промежутка или нескольких промежутков.



Линейная функция как основа графического метода

График — прямая

Функция $y=ax+b$ всегда изображается прямой линией. Поэтому для решения неравенства достаточно понять, где эта прямая находится относительно оси Ox .

Точка пересечения

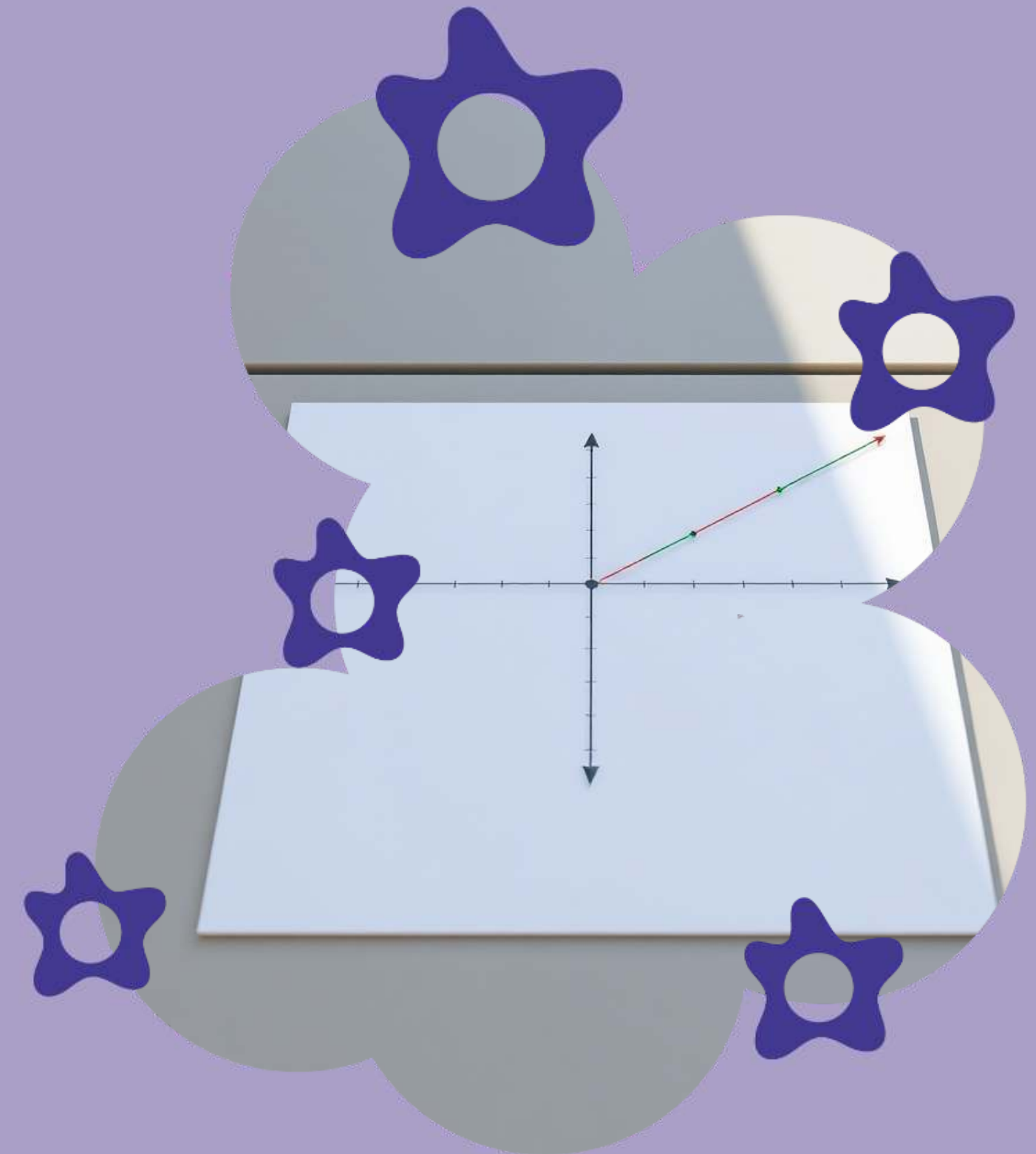
Место, где прямая пересекает ось Ox , соответствует $y=0$. Именно здесь значение выражения меняет знак и начинается другая область решения.

Связь с неравенством

Если левая часть записана как y , то знак неравенства показывает, нужно ли брать точки выше оси Ox , ниже неё или обе стороны вместе с границей.

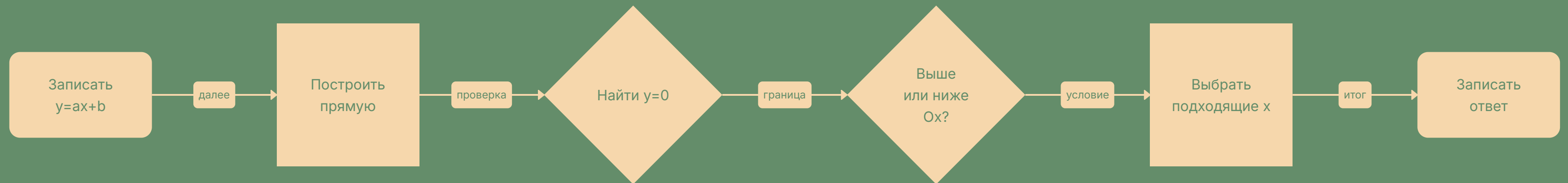
Почему это удобно

На рисунке сразу видно, какая часть графика подходит под условие. Это особенно полезно, когда нужно быстро проверить ответ без длинных вычислений.



Алгоритм решения неравенства через график

Последовательность шагов для линейного неравенства с одним неизвестным



Связь знака выражения с положением графика

1

Выше оси Ox

Когда прямая находится выше оси Ox , её значения положительны. Это означает, что для таких x выполняется условие $y > 0$, если неравенство строгое.

2

Ниже оси Ox

Если график расположен ниже оси Ox , значения функции отрицательны. Тогда подходит область, где $y < 0$, а знак неравенства указывает на противоположную сторону от границы.

3

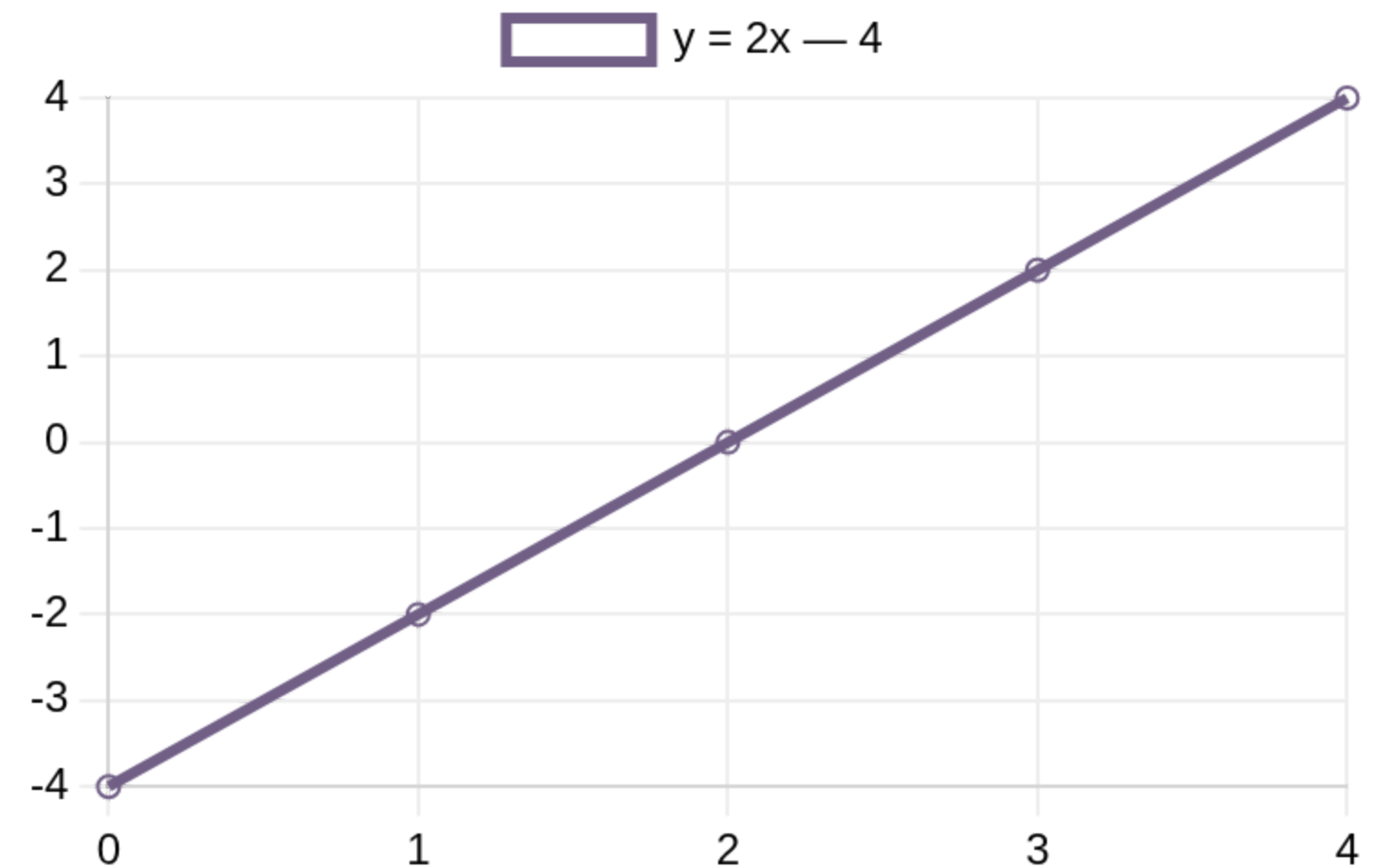
Граница перехода

Точка пересечения с осью Ox соответствует $y = 0$. В этой точке значение выражения меняет знак, поэтому она служит границей решения.

Пример: как график показывает решение

Нулевая точка здесь видна сразу: она делит прямую на две области с разными знаками.

Так как положительные значения начинаются справа от $x=2$, решение неравенства $2x-4>0$: $x>2$.



Построено по формуле $y=2x-4$

Как знак неравенства связан с ответом

Сопоставление знака, положения прямой и вида ответа помогает быстро выбирать правильный промежуток.

Знак неравенства определяет не только сторону от точки пересечения, но и включается ли сама граница в ответ.

Правила графического метода для линейных неравенств

Вид	График	Ответ
$y > 0$	выше Ox	x больше границы
$y < 0$	ниже Ox	x меньше границы
$y \geq 0$	выше Ox , граница входит	x не меньше границы
$y \leq 0$	ниже Ox , граница входит	x не больше границы

Решение простого примера

1

Шаг 1

Перепишем неравенство $3x-6 \geq 0$ как функцию $y=3x-6$. Теперь можно рассматривать её график и искать область, где значения неотрицательны.

2

Шаг 2

Точку пересечения с осью Ox находим из уравнения $3x-6=0$. Получаем $x=2$, значит именно здесь расположена граница решения.

3

Шаг 3

Нужны значения, при которых $y \geq 0$. Поэтому берём часть графика на оси Ox и выше неё, а ответ записываем как $x \geq 2$.

Точка пересечения с осью Ox показывает,
входит ли граница в решение.

Правило работы с точкой пересечения
графика и оси Ox

2

— это граница, которая
включается
или исключается
из ответа
в зависимости от знака.

Что меняется, если коэффициент при x отрицательный

Прямая убывает

Когда коэффициент при x отрицательный, график функции $y=ax+b$ идет сверху вниз. При движении вправо значения y уменьшаются, поэтому знак выражения по сторонам от пересечения меняется наоборот.

Где положительные значения

Для убывающей прямой область $y>0$ оказывается слева от точки пересечения с осью Ox . Именно там график расположен выше оси, а значит, выражение принимает положительные значения.

Граница решения

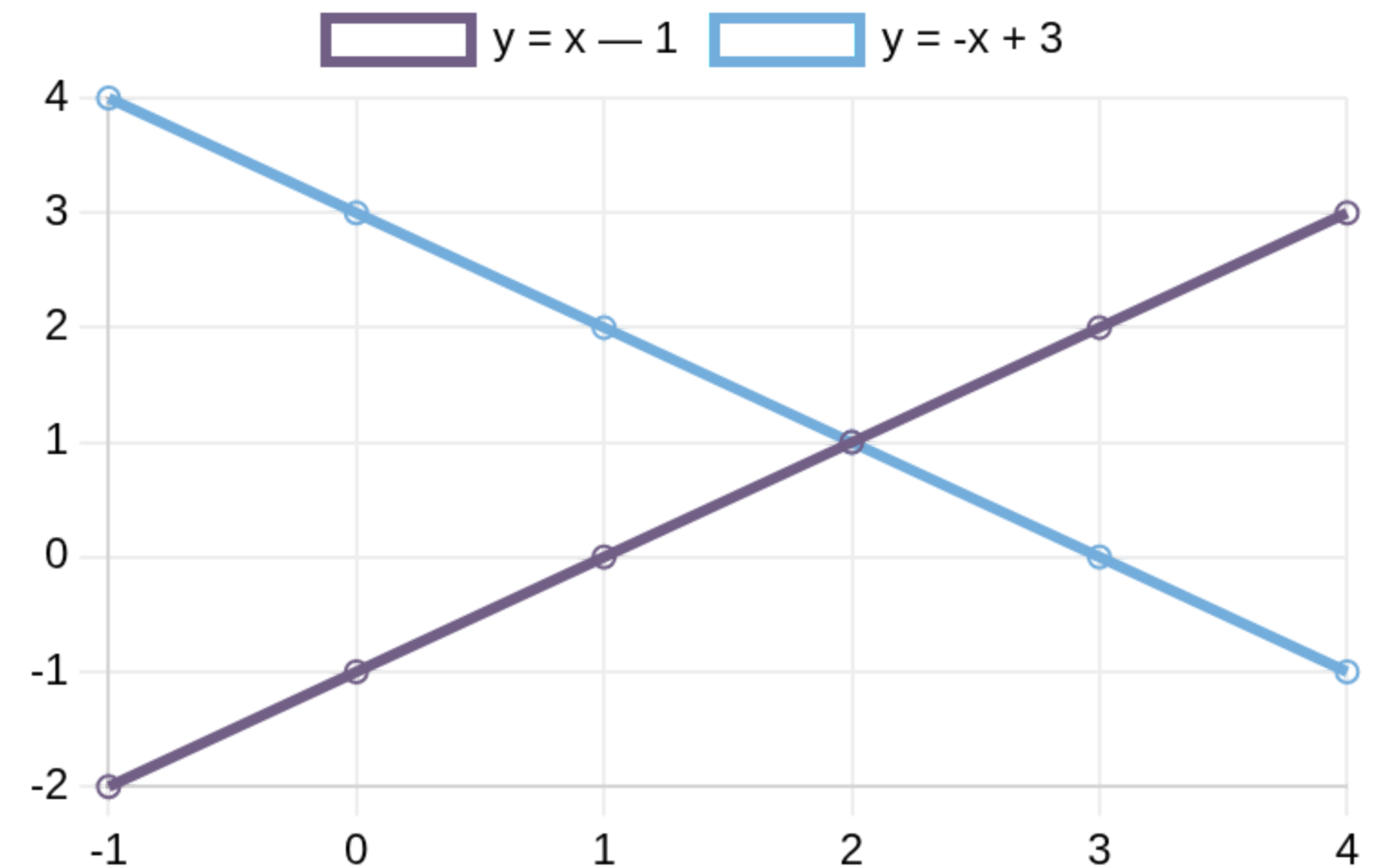
Точка пересечения с осью Ox по-прежнему задает $y=0$ и разделяет области разных знаков. Для нестрогих неравенств она входит в ответ, а для строгих остается вне решения.



Сравнение двух линейных функций на графике

Первая прямая пересекает ось Ox в точке $x=1$, а вторая — в точке $x=3$. Это сразу показывает, где значения функций становятся положительными.

Чем больше наклон и выше свободный член, тем по-разному расположены области положительных значений. Решение удобно видеть без лишних вычислений.



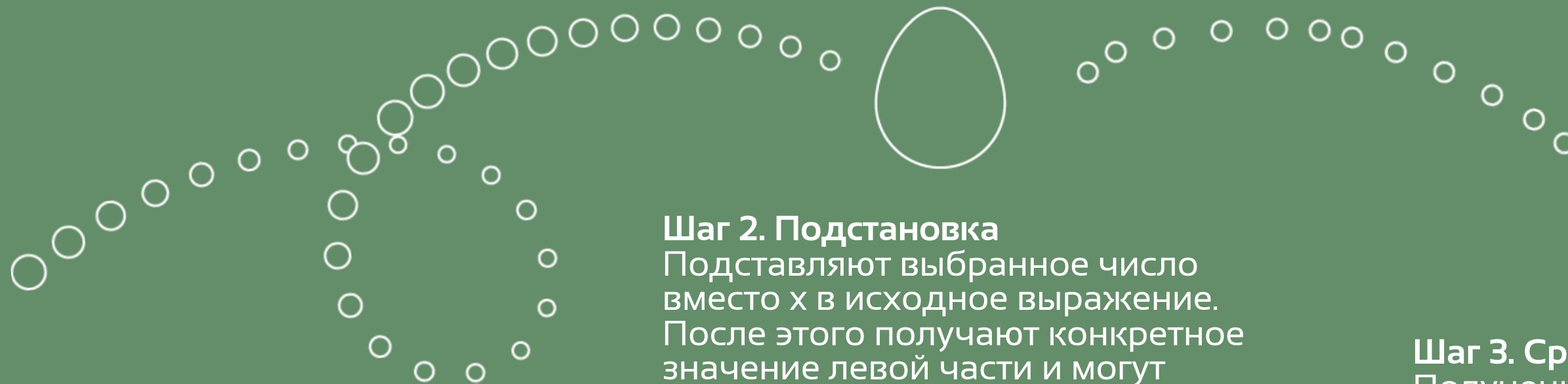
Составлено по заданным функциям $y = x - 1$ и $y = -x + 3$.

Проверка ответа с помощью контрольной точки



Шаг 1. Выбор числа

Берут любое значение из предполагаемого ответа: внутри промежутка, слева или справа от границы. Главное — чтобы точка действительно принадлежала найденному решению.



Шаг 2. Подстановка

Подставляют выбранное число вместо x в исходное выражение. После этого получают конкретное значение левой части и могут сразу увидеть его знак.

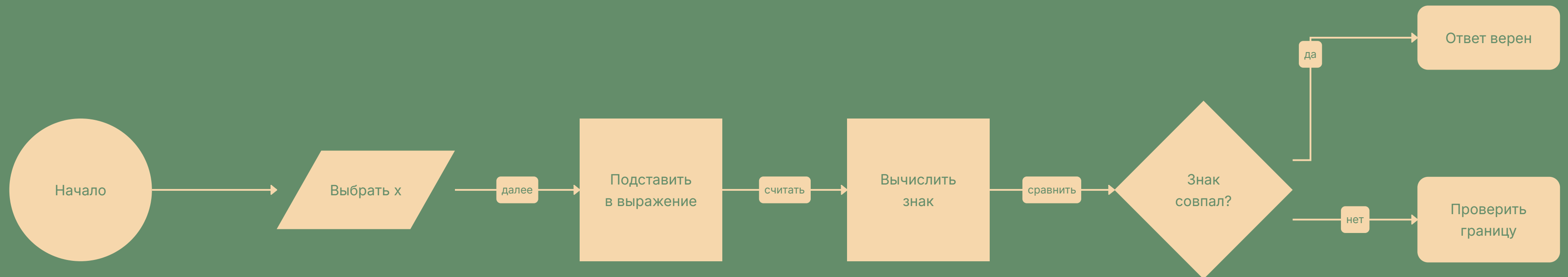


Шаг 3. Сравнение

Полученный знак сравнивают с условием неравенства. Если он совпадает, ответ найден верно; если нет, нужно пересмотреть границу или знак решения.

Проверка решения по контрольной точке

Последовательность проверки ответа подстановкой числа из найденного промежутка в исходное линейное неравенство.



Типичные ошибки при графическом решении



Таблица помогает заметить самые частые сбои при чтении графика и записи ответа.



Большинство ошибок связано не со сложностью вычислений, а с невнимательным чтением знака, точки пересечения и направления прямой.



Составлено по типичным ошибкам при решении линейных неравенств.

Ошибка	Причина	На графике	Результат
Перепутан знак	Не посмотрели условие	Выбрана другая сторона	Ответ неверный
Не включена граница	Забыли про $\geq$ или $\leq$	Точка исключена	Нужен знак равенства
Не учтен минус	Пропустили убывание	Стороны меняются местами	Ответ наоборот

Что сравниваем на графике



Сравнение с нулем

Когда рассматривают выражение вида $ax+b$, строят одну прямую и смотрят, где она находится относительно оси Ox . Это сразу показывает, где значение положительно или отрицательно.



Две функции

Если нужно сравнить две линейные функции, сначала находят их разность. После этого задача превращается в обычное неравенство первой степени, которое удобно читать по графику.



Одна выше другой

Для сравнения двух графиков важно определить, где первая прямая расположена выше второй. Именно эта область отвечает условию, что одно выражение больше другого.



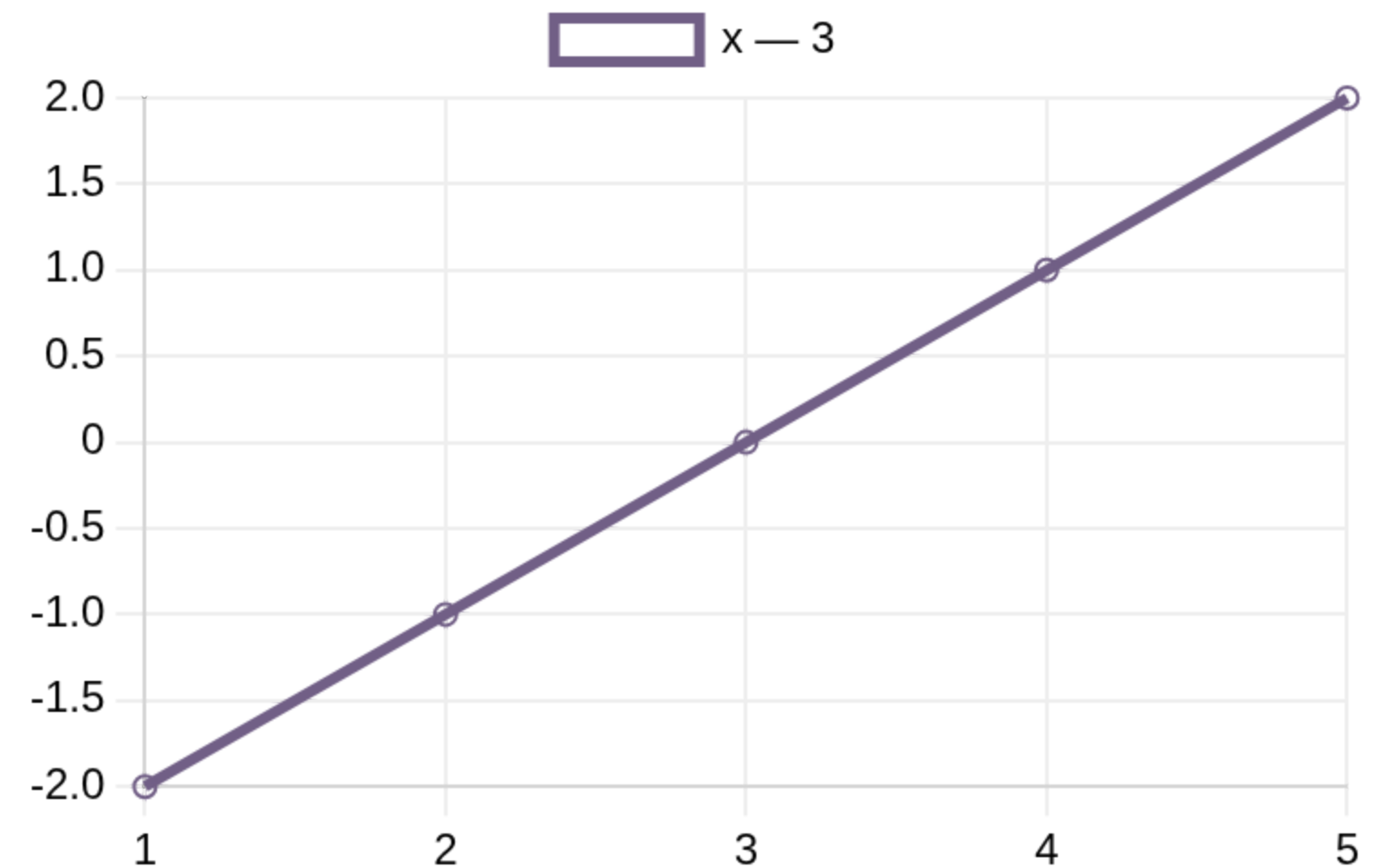
Общий принцип

И в простом, и в сравнительном случае решение опирается на одну идею: знак выражения определяется положением графика. Поэтому достаточно увидеть, где линия оказывается выше или ниже выбранной границы.

Разность двух функций как обычное линейное неравенство

После приведения разности к виду $x-3$ остается найти только одну точку, где значение обращается в ноль. Это упрощает сравнение исходных выражений.

Любое сравнение двух линейных выражений можно свести к исследованию знака разности. Далее работает тот же графический принцип, что и для одного неравенства.



Составлено по выражению $(2x+1)-(x+4)=x-3$.

Где применяется графический способ

1

Движение и расстояние

При задачах на движение график помогает понять, при каких значениях времени или скорости расстояние, путь или разность путей становятся положительными или отрицательными.

2

Стоимость и прибыль

В экономических задачах по графику легко увидеть точку, где доход равен расходам. После этой границы можно определить, когда прибыль становится положительной.

3

Температура и измерения

Если величина меняется со временем, прямая показывает, где значение выше или ниже нуля. Это удобно при анализе температуры, давления и других измерений.

4

Сравнение результатов

Графический метод особенно полезен, когда нужно сравнить две зависимости. Он позволяет быстро увидеть, при каких x одна величина больше другой, без длинных преобразований.

Пример из жизненной ситуации



Когда магазин начинает зарабатывать

Пусть прибыль магазина описывается формулой $p=5x-20$, где x — количество проданных товаров. Тогда при $x=4$ прибыль равна нулю, а это точка безубыточности. Если продаж больше четырех, график поднимается выше оси Ox , и прибыль становится положительной.



График как подсказка для владельца

На координатной плоскости прямая пересекает ось Ox в точке $x=4$ и дальше идет вверх. Это наглядно показывает, что каждая следующая продажа после этой границы приносит доход. Такой рисунок помогает быстро увидеть, когда бизнес начинает работать в плюс.

График показывает не только ответ, но и причину

Графический способ делает линейные неравенства понятными: видно границу, знак выражения и нужный промежуток. Поэтому решение становится не просто верным, а наглядно объяснимым.

