

График обратной пропорциональности

Как меняется зависимость $y = k/x$ и почему её график называют гиперболой?

Обратная пропорциональность в 8 классе

Эта тема помогает разбирать функции, строить графики и решать практические задачи на движение, работу и геометрию. Важно уметь распознавать формулу $y = k/x$, находить значения в таблице и читать расположение ветвей на координатной плоскости правильно и быстро.



Формула $y = k/x$ и её основные свойства

1.

Коэффициент k

Число k задаёт конкретную зависимость между величинами. Оно остаётся постоянным для всех допустимых значений x и определяет, каким будет график функции.

2.

Изменение величин

Если x увеличивается в два раза, то y уменьшается в два раза. Если x уменьшается в три раза, значение y , наоборот, возрастает в три раза.

3.

Постоянное произведение

Для любой пары значений, подходящей этой функции, произведение x и y не меняется: $xy = k$. Это главное свойство обратной пропорциональности.

4.

Нельзя делить на ноль

Значение x не может быть равно 0, потому что деление на ноль не определено. Поэтому у функции есть особая область определения.

5.

Что это значит для графика

Из-за постоянства произведения точки графика располагаются особым образом и образуют две ветви гиперболы, а не одну непрерывную линию.

Как выглядит гипербола на координатной плоскости

Две отдельные ветви

График обратной пропорциональности состоит из двух частей, которые не соединяются между собой. Каждая ветвь расположена отдельно и имеет плавную форму.

Приближение к осям

Чем больше по модулю значения x и y , тем ближе точки графика подходят к осям координат. Однако сами оси график не пересекает.

Форма линии

Если отметить несколько точек из таблицы и соединить их плавной линией, получается характерная кривая, похожая на гиперболу.

Что нужно видеть на рисунке

Для наглядности полезны координатная сетка, подписанные точки и аккуратная кривая. Такой рисунок помогает заметить общий вид зависимости и её особенности.



Таблица значений для функции $y = 12/x$

x	y
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

По этой таблице можно увидеть, как меняются значения функции при разных x . Все пары чисел удовлетворяют условию $xy = 12$ и подходят для построения графика.

При увеличении x значения y уменьшаются, но произведение остаётся равным 12. Точки удобно использовать для точного построения гиперболы.

Построено по формуле $y = 12/x$

Изменение y при росте x для функции $y = 12/x$

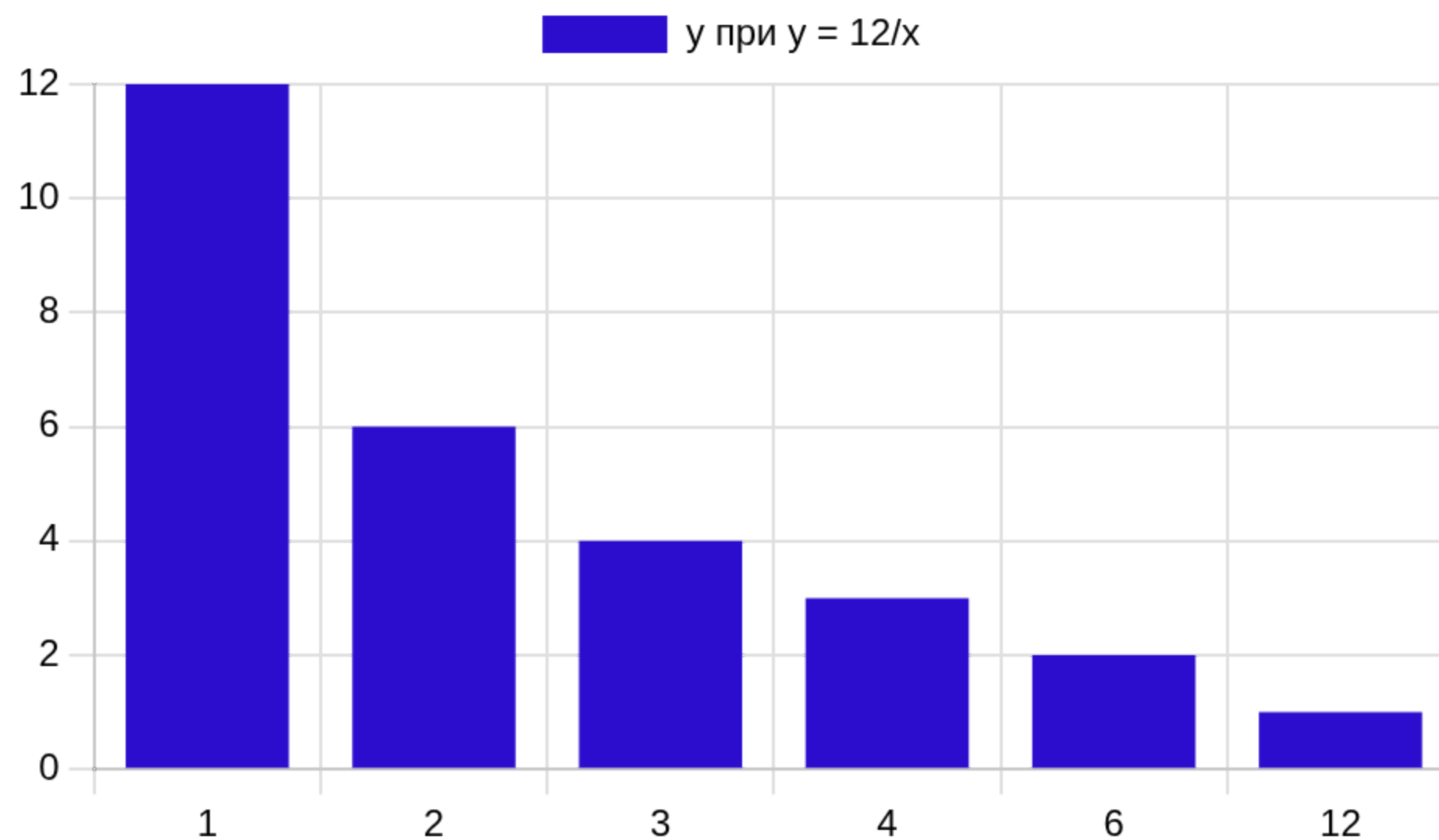


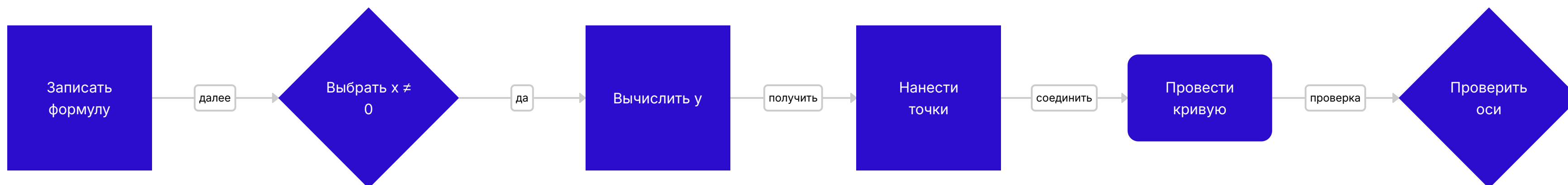
Диаграмма помогает заметить, как быстро меняется значение y при малых x и как это изменение замедляется при больших x .

Зависимость убывает: увеличение x приводит к уменьшению y .
При удвоении x значение y уменьшается в два раза.

Данные по формуле $y = 12/x$

Построение графика обратной пропорциональности

Последовательность действий при построении графика функции $y = k/x$



Точка с абсциссой 0 не входит в область определения, поэтому график не может пересечь ось y и всегда остаётся в стороне от неё.

0

при этом значении
происходит деление,
которое не имеет смысла
в функции $y = k/x$.

Определение функции $y = k/x$

Как коэффициент k влияет на график

1. Модуль коэффициента

Чем больше $|k|$, тем дальше ветви гиперболы находятся от осей координат. При одном и том же x большие значения $|k|$ дают большие по модулю значения y .

2. Положительный коэффициент

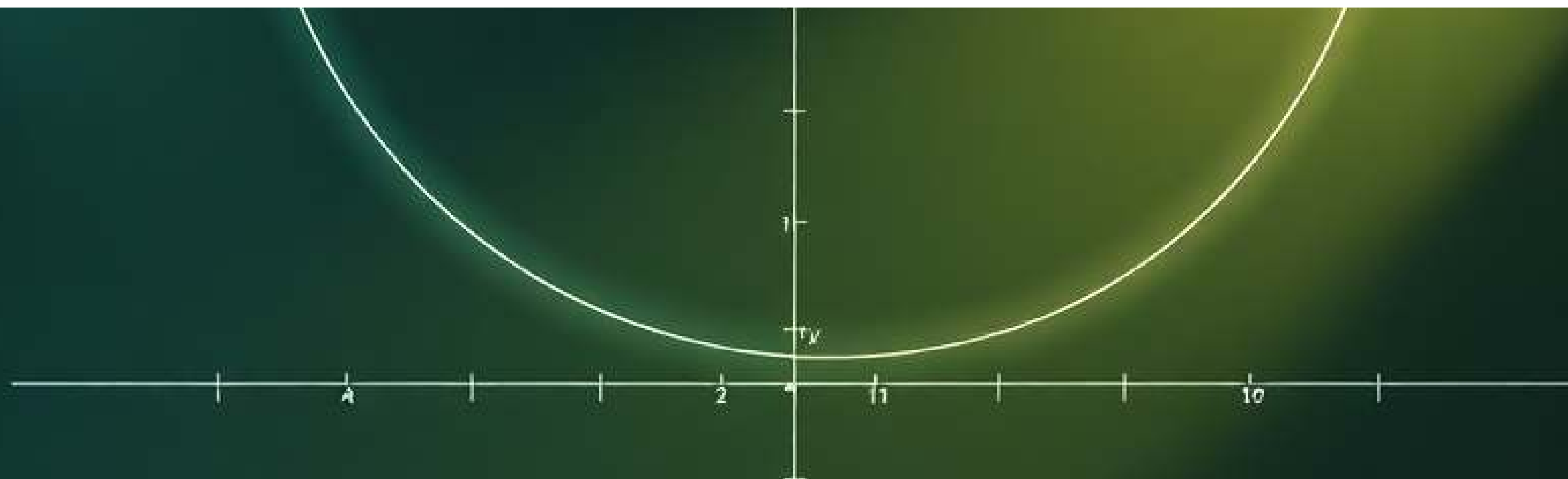
Если k больше нуля, обе ветви располагаются в первой и третьей четвертях. Такое расположение удобно запоминать как вариант с одинаковыми знаками x и y .

3. Отрицательный коэффициент

Если k меньше нуля, ветви переходят во вторую и четвёртую четверти. В этом случае x и y имеют разные знаки, поэтому график располагается иначе.

4. Знак и направление

Знак k определяет не только, где лежит график, но и как направлены его ветви. Поэтому перед построением всегда важно определить знак коэффициента.



Примеры обратной пропорциональности из жизни

Движение

При одном и том же расстоянии скорость и время связаны обратной зависимостью: чем быстрее движется объект, тем меньше времени ему нужно для пути.

Прямоугольник

Если площадь прямоугольника равна 24 см^2 , то его стороны меняются обратно пропорционально: при ширине 3 см длина равна 8 см, а при ширине 6 см — 4 см.

Смысл для задач

Такие примеры помогают понять, как одна величина уменьшается при росте другой. Это удобно при решении текстовых задач и при проверке ответов.



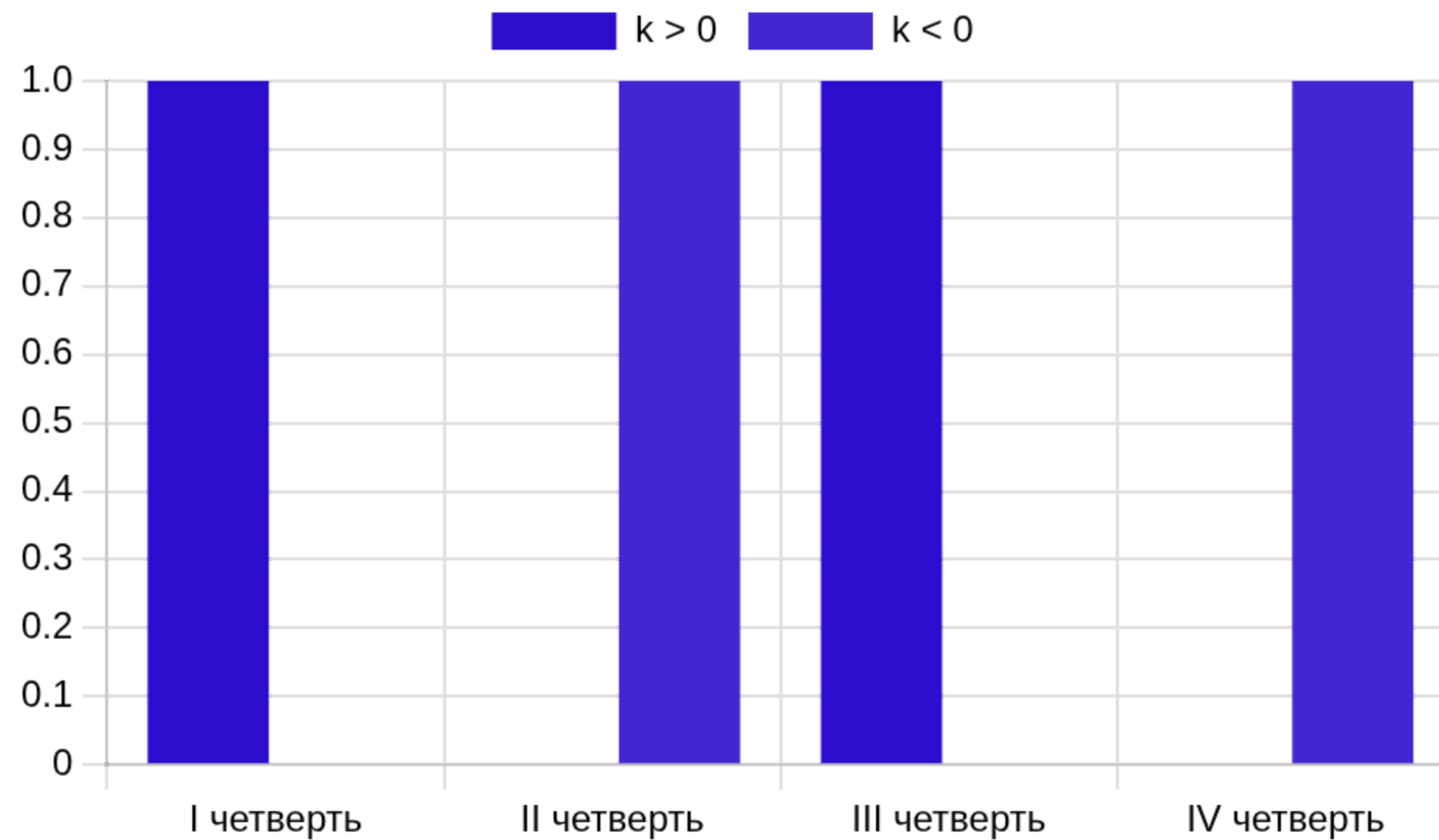
Прямая и обратная пропорциональность: сравнение

Сравнение помогает увидеть, чем отличаются две важные зависимости: по формуле, по поведению величин, по виду графика и по расположению на плоскости.

Главное различие: при прямой пропорциональности обе величины меняются согласованно, а при обратной — одна растёт, когда другая убывает.

Признак	Прямая	Обратная
Формула	$y = kx$	$y = k/x$
График	прямая	гипербола
Связь величин	в одном направлении	в разных направлениях

Расположение ветвей гиперболы в разных четвертях



Знак коэффициента определяет, в каких четвертях будут лежать точки графика, поэтому его удобно проверять сразу при построении.

Для положительного k ветви находятся в I и III четвертях, для отрицательного — во II и IV; это помогает быстро распознавать график.

Как выбирать точки для построения графика

1.

Берите делители k

Для построения удобно выбирать такие значения x , которые делят коэффициент k без остатка: тогда y получается целым числом, а точки легко отмечать на координатной сетке.

2.

Ставьте несколько точек

Чем больше точек вы вычислите и нанесёте, тем точнее получится кривая. По двум-трём точкам легко увидеть направление ветвей, но лучше взять больше значений.

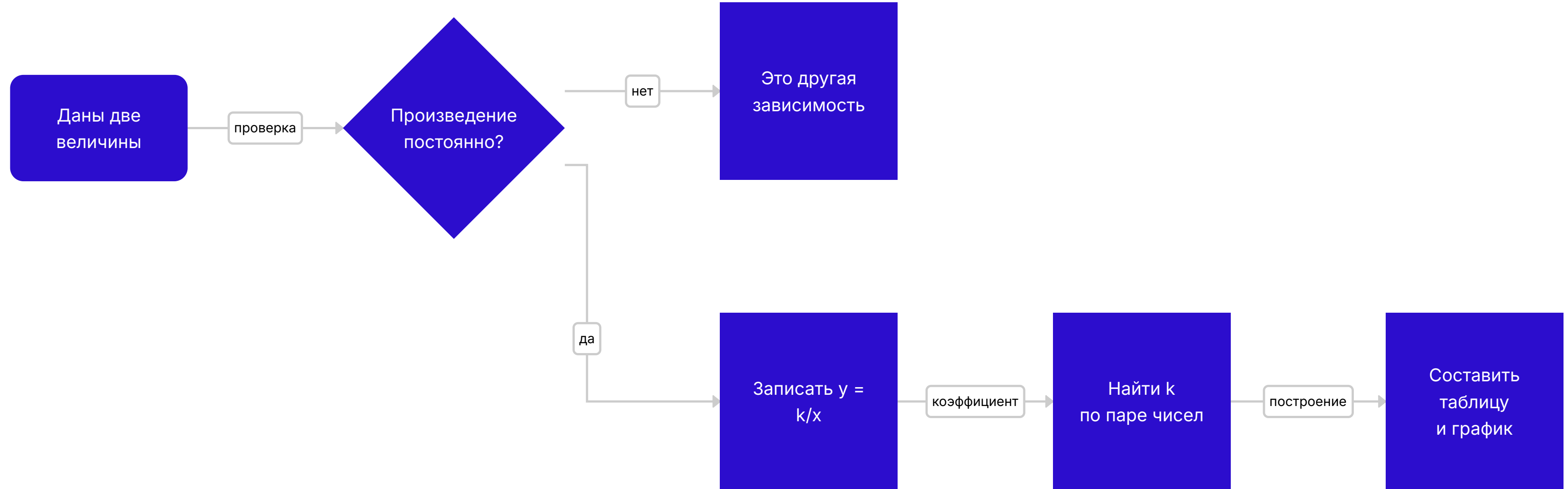
3.

Проверяйте произведение

После вычислений полезно убедиться, что каждая пара чисел даёт одно и то же произведение xy . Это помогает не допустить ошибок и подтвердить правильность построения.

Проверяем, является ли зависимость обратной пропорциональностью

Алгоритм чтения и распознавания зависимости по условию задачи



Типичные ошибки при чтении и построении графика

Подстановка нуля

Нельзя подставлять $x = 0$ в формулу $y = k/x$, потому что деление на ноль не определено. Из-за этого точка с абсциссой 0 не принадлежит графику функции.

Соединение ветвей

Ошибка — провести одну линию через оси координат, будто график непрерывен. У обратной пропорциональности всегда две отдельные ветви, и они не соединяются между собой.

Путаница с прямой пропорциональностью

Иногда обратную пропорциональность путают с прямой. Но у неё величины изменяются в разных направлениях, а не вместе, и график имеет совсем другой вид.

Неверные четверти

При отрицательном k точки должны располагаться во II и IV четвертях. Если выбрать другие четверти, знак коэффициента будет прочитан неправильно, и построение окажется неверным.

Правильный и ошибочный график: в чём разница

Верная гипербола

Правильный график состоит из двух ветвей, которые плавно приближаются к осям, но не пересекают их. Он отражает свойство функции $y = k/x$ без исключений.

Ошибка через начало

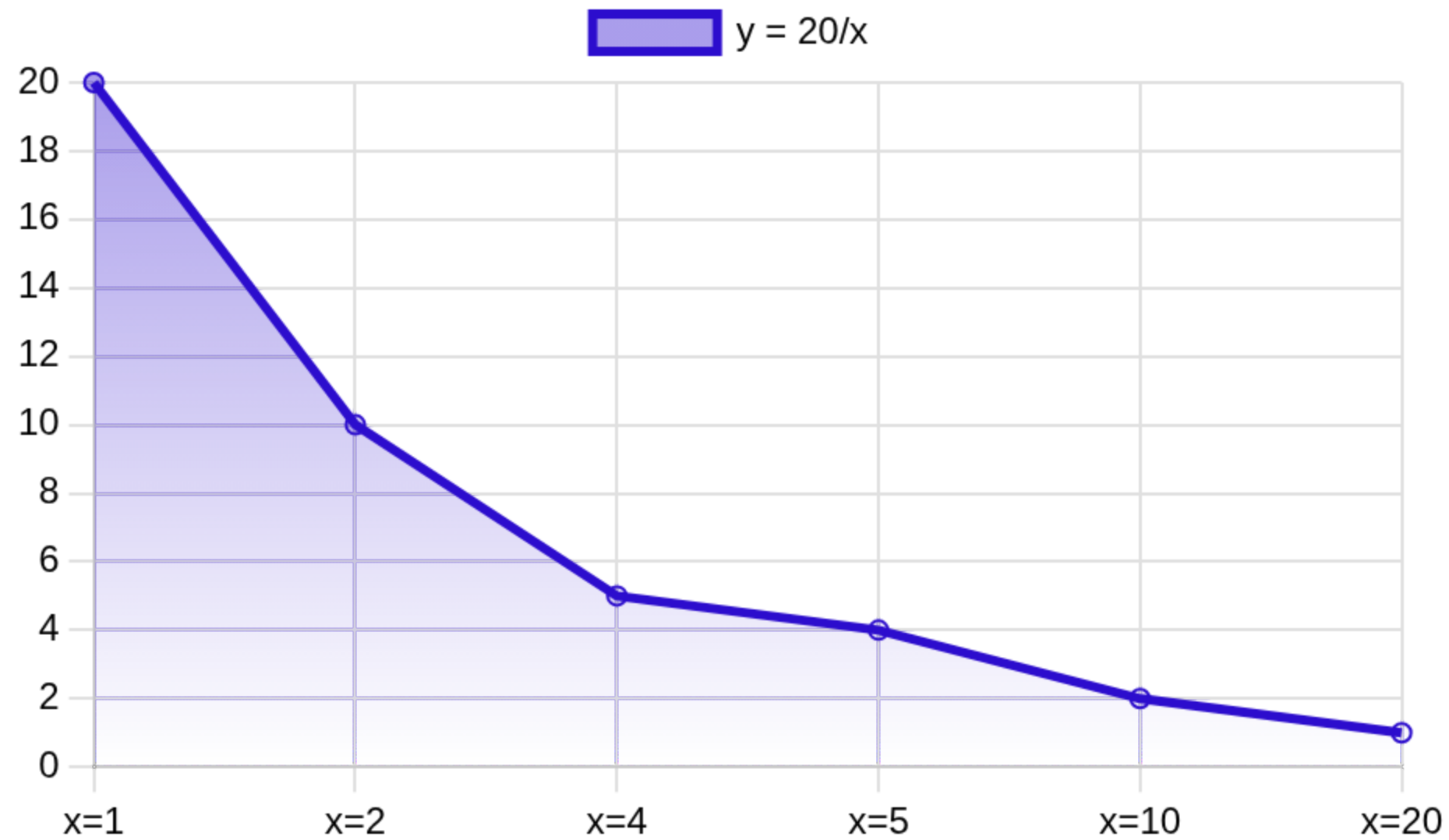
Если линия проходит через начало координат, значит нарушено главное условие: при $x = 0$ функция не определена. Такой рисунок не может быть графиком обратной пропорциональности.

Заметить несоответствие

Сравнение двух рисунков помогает быстро увидеть, где допущена ошибка. Достаточно проверить число ветвей, наличие точки при $x = 0$ и расположение относительно осей.



Как меняются значения при разных x для функции $y = 20/x$



Точки удобно соединять плавной линией: при малых x значения y меняются быстрее, а при больших x кривая становится более пологой.

Набор точек наглядно показывает обратную зависимость: увеличение x в несколько раз приводит к такому же уменьшению y , а произведение остаётся равным 20.

Расчёт по формуле $y = 20/x$

Проверка решения в задачах на обратную пропорциональность

Шаг	Что проверить	Результат
1	Найти k	одно число
2	Подставить x и y	верные пары
3	Вычислить xy	одно значение
4	Проверить x	не равно 0

Проверка помогает убедиться, что найденная зависимость записана верно и для всех пар чисел сохраняется одно и то же значение k .

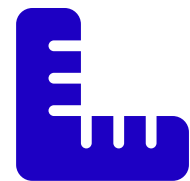
Если произведение xy остаётся постоянным и x не равен нулю, решение верно; если значение меняется, нужно исправить вычисления.

Где знания об обратной пропорциональности особенно полезны



Движение

При одном и том же расстоянии скорость и время связаны обратной пропорциональностью: чем быстрее движется объект, тем меньше времени требуется на путь.



Геометрия

Если площадь прямоугольника остаётся постоянной, его длина и ширина меняются обратно. Это удобно при подборе размеров фигуры по заданному условию.



Совместная работа

Когда работа делится между несколькими людьми, время выполнения уменьшается с увеличением числа работников. Такая зависимость часто встречается в текстовых задачах.



Чтение графиков

Понимание графика помогает быстро оценивать, как изменится одна величина при изменении другой. Это полезно не только на математике, но и в других предметах.

Главные выводы о графике обратной пропорциональности

График функции $y = k/x$ — это гипербола с двумя ветвями.

Произведение xy остаётся постоянным, x не может равняться нулю, а знак k определяет расположение ветвей.