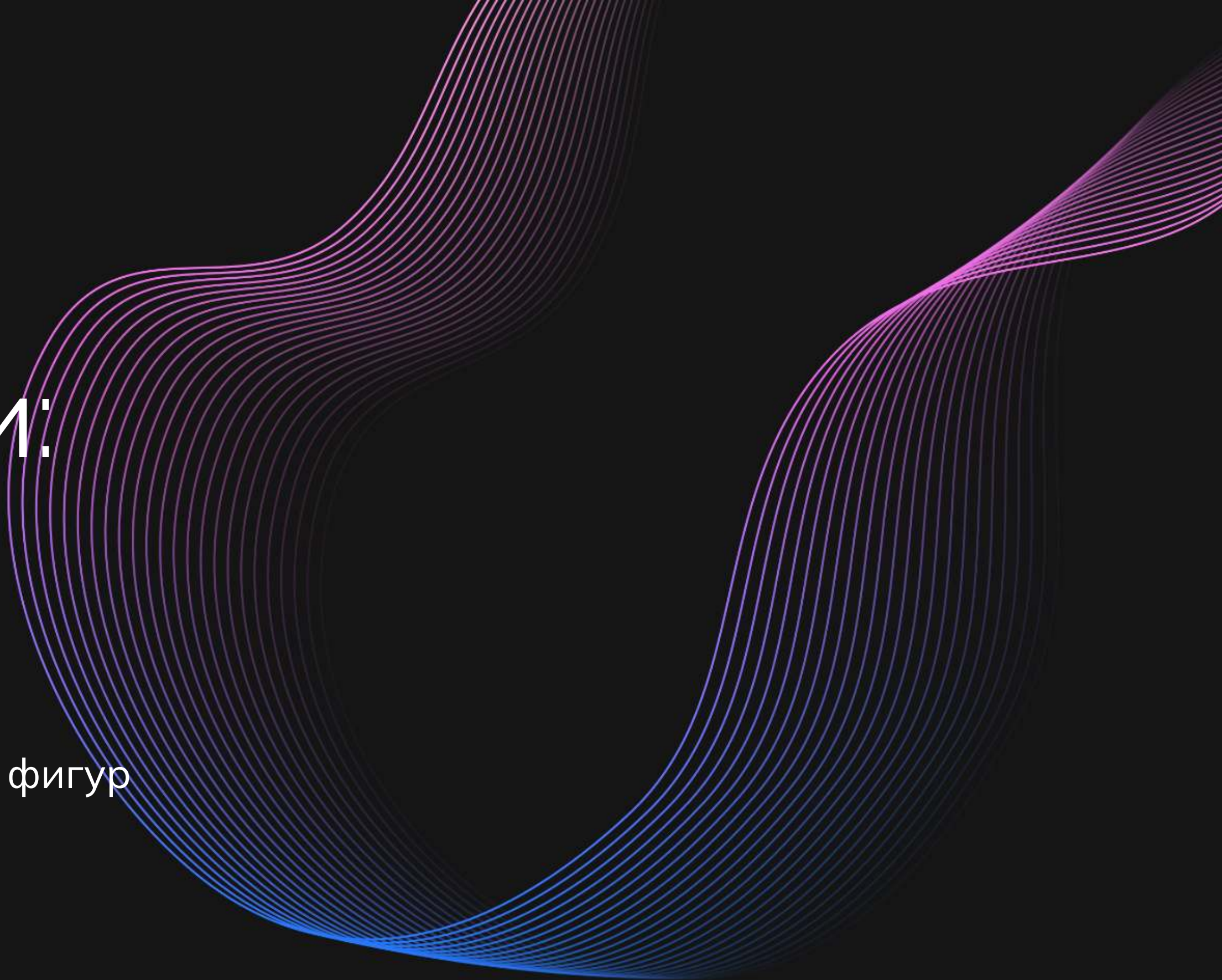


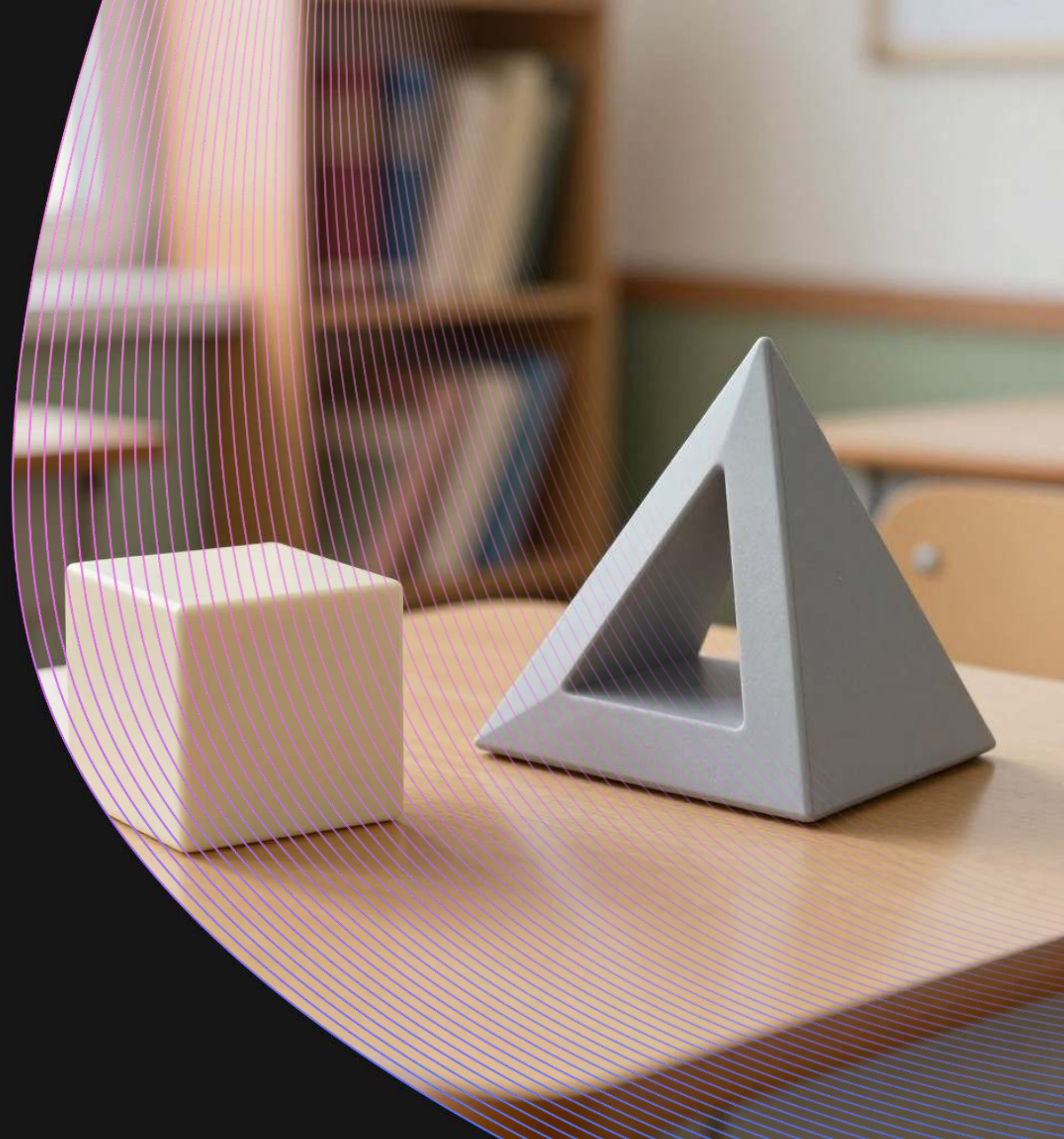
Многогранники: от формы к формулам

Разберём многогранники: от узнавания фигур
до точных формул.



Зачем изучать многогранники?

Многогранники помогают понимать пространство: у них все грани плоские, а формы легко строить, сравнивать и измерять.



Что такое многогранник

Плоские грани

Многогранник — это объёмная фигура, поверхность которой состоит только из плоских многоугольников. Так устроены коробки, кубики и многие архитектурные модели.

Фигуры вокруг нас

В жизни многогранники встречаются чаще, чем кажется: у зданий, кристаллов и упаковок можно заметить знакомые геометрические формы и общие черты.

Главные элементы

Чтобы описывать такую фигуру точно, используют грани, рёбра и вершины. Эти элементы помогают читать чертежи, считать части фигуры и решать задачи.



Элементы многогранника и обозначения

1 Грань

Грань — это плоская часть поверхности многогранника. По числу граней можно быстро определить, насколько сложной является фигура.

2 Ребро

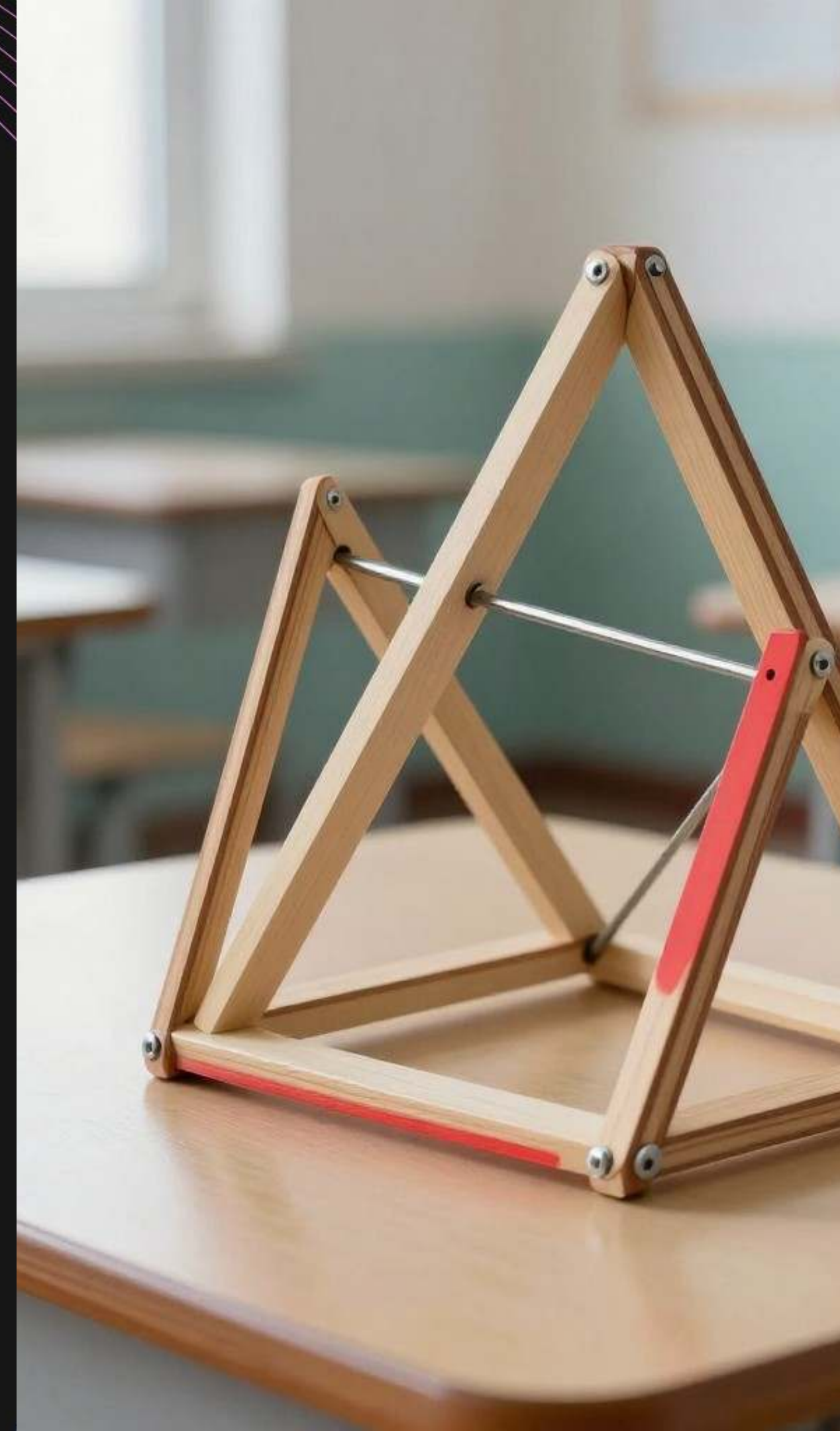
Ребро — линия, по которой сходятся две грани. На рисунке рёбра помогают увидеть каркас фигуры и понять её строение.

3 Вершина

Вершина — точка, где встречаются несколько рёбер. Именно вершины задают форму многогранника и делают его пространственным.

4 Диагональ

Диагональ соединяет две несоседние вершины. Она не лежит на грани целиком и часто используется для сравнения размеров и проверки чертежей.



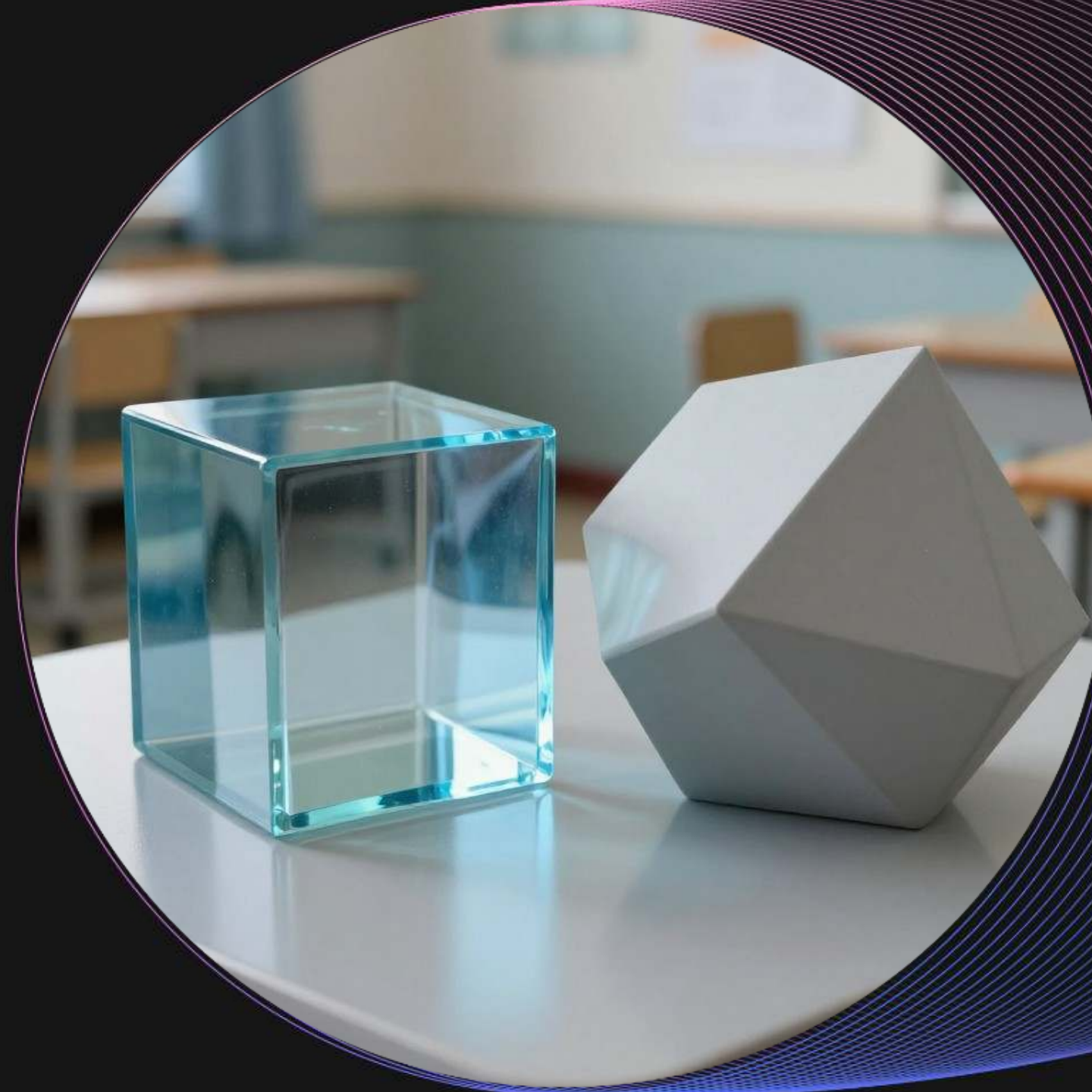
Выпуклый и невыпуклый многогранник

Выпуклая фигура

Выпуклый многогранник не имеет углублений: любой отрезок, соединяющий две точки внутри фигуры, остаётся внутри неё. Куб — самый понятный пример.

Невыпуклая фигура

Невыпуклый многогранник имеет вогнутую часть, то есть «выемку» на поверхности. Такая форма помогает увидеть, чем он отличается от выпуклого тела.



Призмы и пирамиды

Призма

Призма имеет два равных и параллельных основания. Между ними расположены боковые грани, которые образуют как бы вытянутую по высоте фигуру.

Пирамида

Пирамида устроена иначе: у неё одно основание, а боковые грани сходятся в одной вершине. Поэтому она выглядит острее и уже.

Главные модели

В школьных задачах именно призмы и пирамиды встречаются чаще всего. На их примере удобно учиться находить площади, объёмы и читать развёртки.



Элементы призмы и боковая поверхность

- 1 Основания**
У призмы всегда есть два основания. Они равны по размеру и лежат в параллельных плоскостях, поэтому задают форму всей фигуры.
- 2 Боковые рёбра**
Боковые рёбра соединяют соответствующие вершины оснований. Если призма прямая, эти рёбра перпендикулярны основаниям и удобны для измерения высоты.
- 3 Боковая поверхность**
Боковые грани составляют боковую поверхность призмы. Их площадь считают по отдельности или сразу по общей формуле, если известны нужные размеры.
- 4 Удобная формула**
Для прямой призмы площадь боковой поверхности находят как периметр основания, умноженный на высоту. Это особенно удобно в задачах с правильными основаниями.



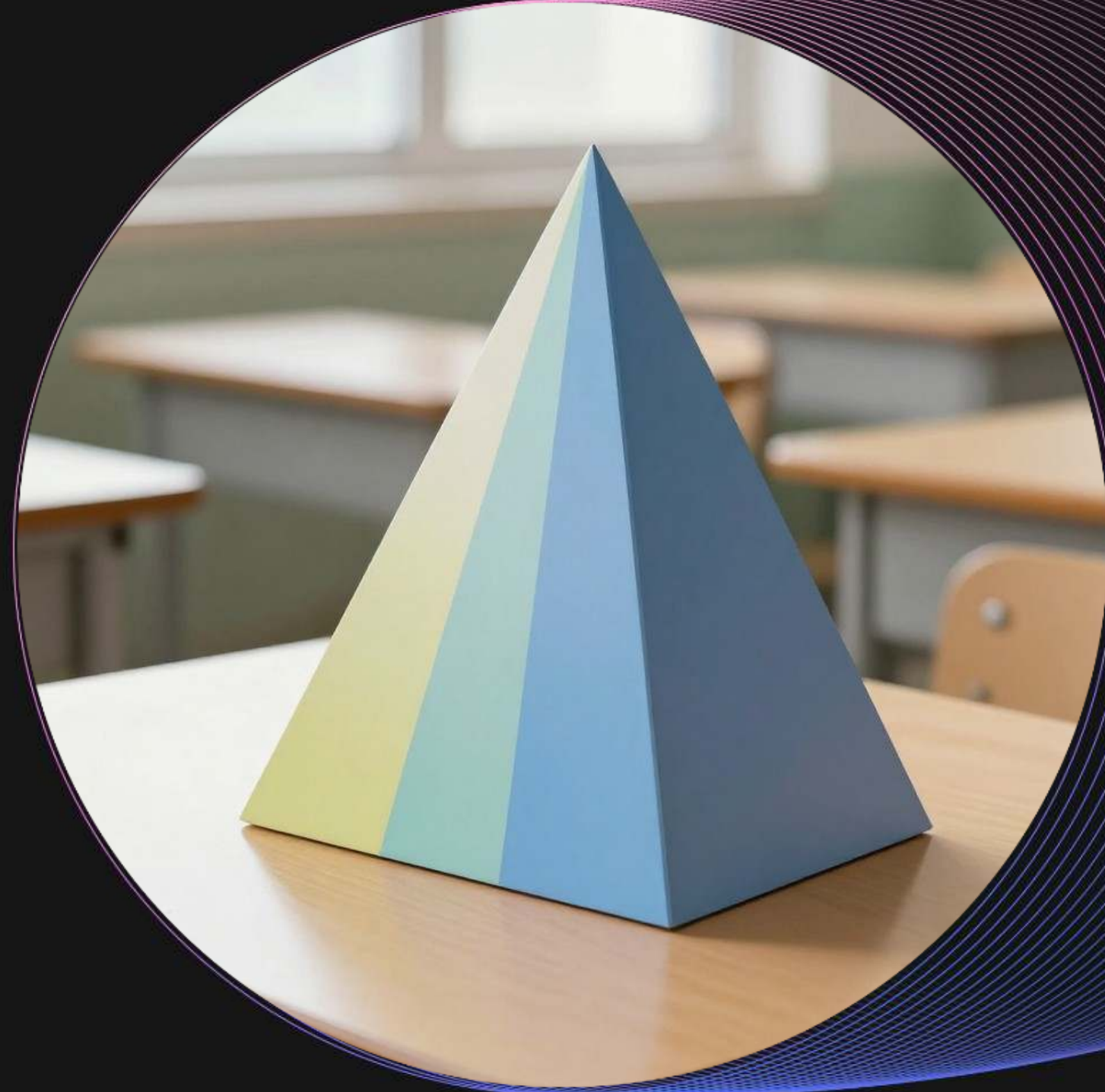
Полная поверхность призмы

Состав поверхности

Полная поверхность призмы включает боковую поверхность и две площади оснований. Так считают, сколько материала нужно для покрытия всей фигуры.

Единицы измерения

Все результаты записывают в квадратных единицах: см^2 , мм^2 , м^2 . Если единицы перепутать, ответ получится неверным даже при правильной формуле.



Объём призмы

1 Что показывает объём

Объём призмы показывает, сколько места занимает фигура в пространстве. По сути, это её «вместимость», которую можно сравнить с объёмом коробки.

2 Формула объёма

Для любой призмы объём находят по формуле: площадь основания умножить на высоту. Если площадь дана в см^2 , а высота в см, получится см^3 .



Элементы пирамиды и отличие от призмы

Основание

Основание пирамиды — это многоугольник, на котором она «стоит». От него зависят форма фигуры и дальнейшие вычисления площади и объёма.

Боковые грани

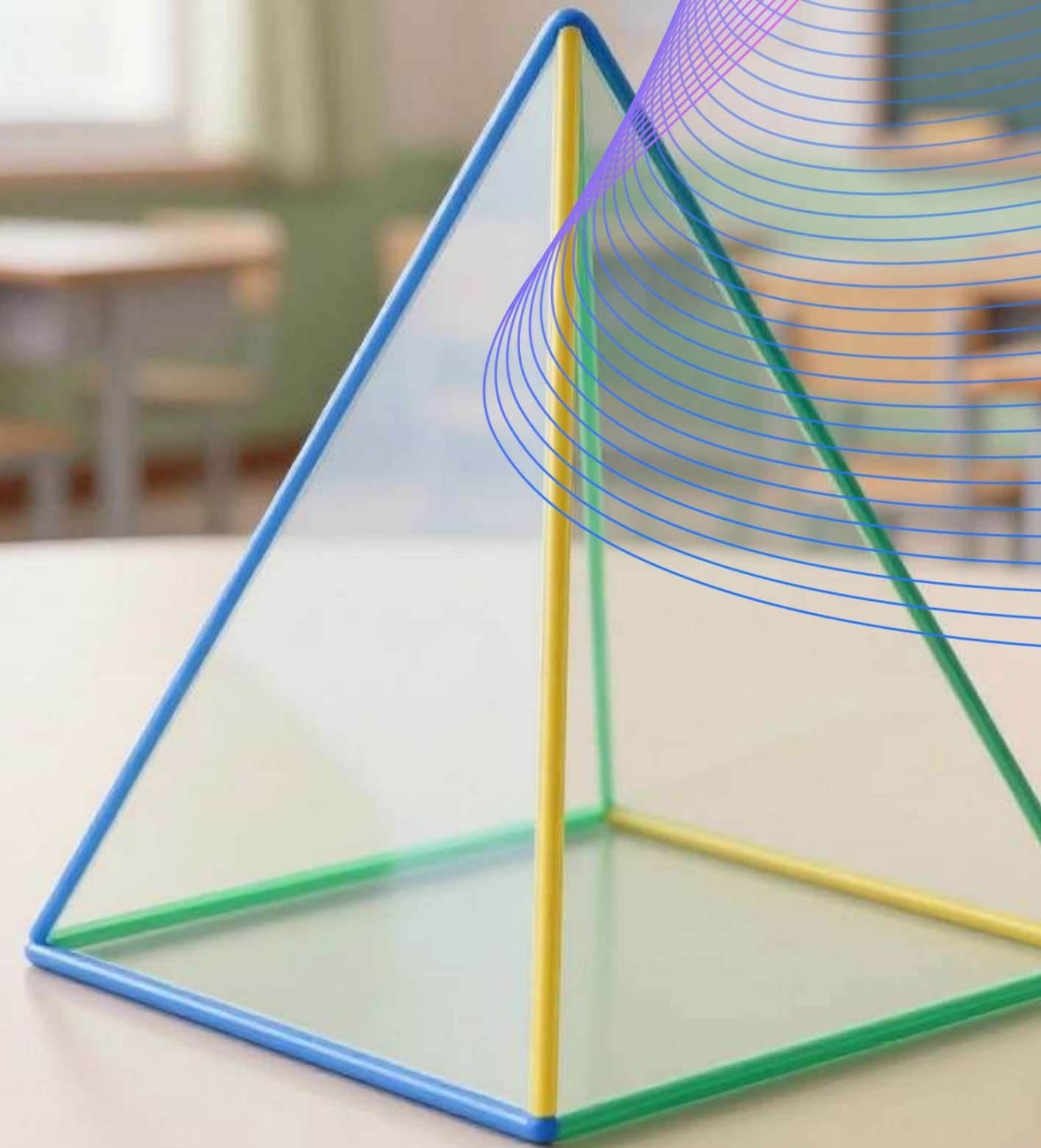
Боковые грани пирамиды всегда треугольники. У правильной пирамиды они одинаковы, поэтому рисунок выглядит симметрично и удобно для измерений.

Боковые рёбра

Боковые рёбра соединяют вершину пирамиды с вершинами основания. Именно они показывают, как поверхность сужается к одной общей точке.

Апофема

Апофема — это высота боковой грани правильной пирамиды. Она нужна в формулах площади, но не совпадает с высотой всей пирамиды.



Боковая поверхность пирамиды

1 Формула через периметр

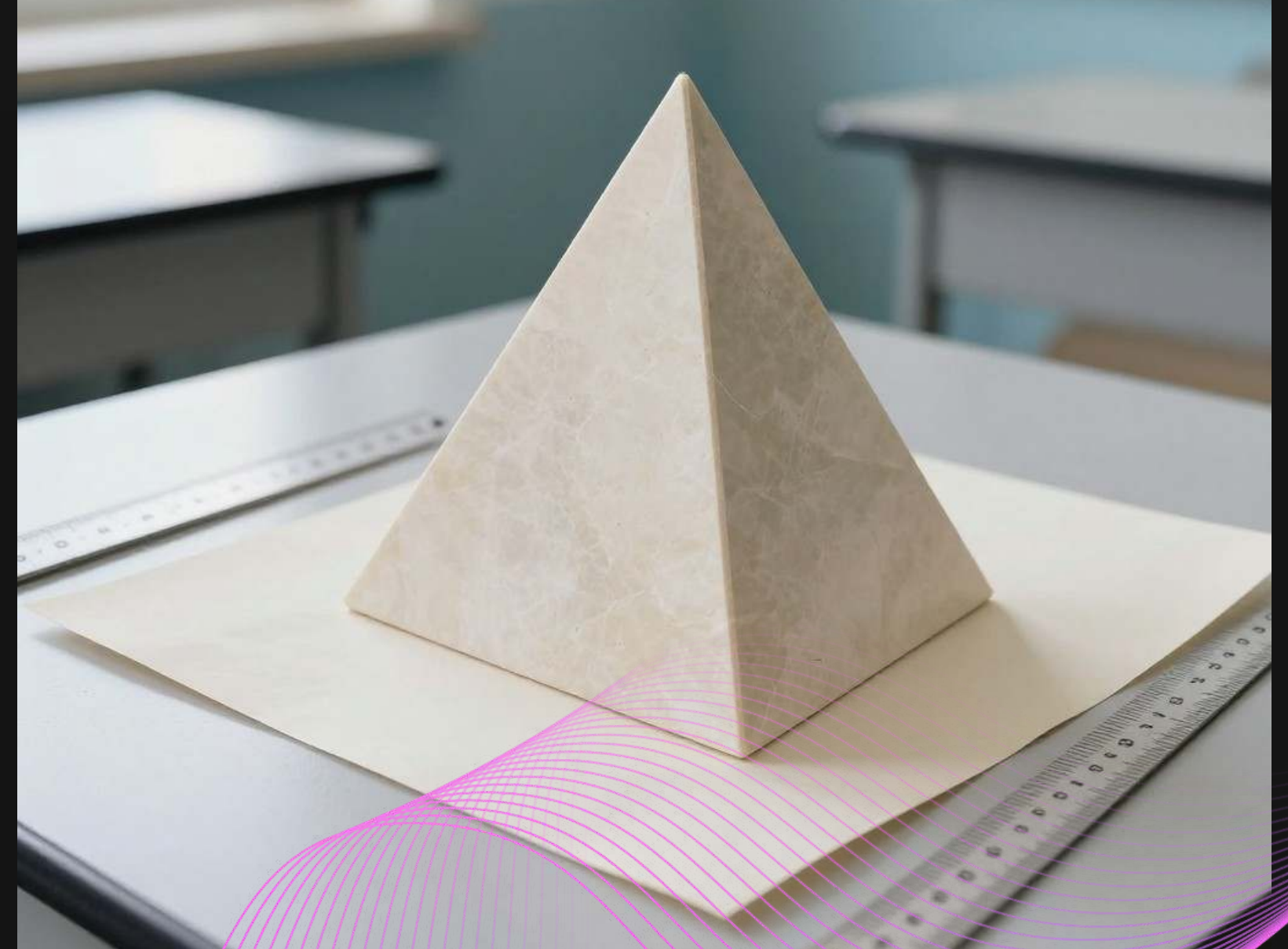
Для правильной пирамиды площадь боковой поверхности выражается через периметр основания и апофему. Это удобно, потому что все боковые грани одинаковы и их можно складывать как одинаковые треугольники.

2 Что такое апофема

Апофема — это высота боковой грани, а не высота всей пирамиды. Её берут с чертежа или из развёртки, поэтому важно не путать эти две разные величины.

3 Порядок вычисления

При решении задач сначала находят периметр основания, затем умножают его на апофему и делят пополам. Так получают площадь боковой поверхности без подсчёта каждой грани отдельно.



Полная поверхность пирамиды

— Что входит в сумму

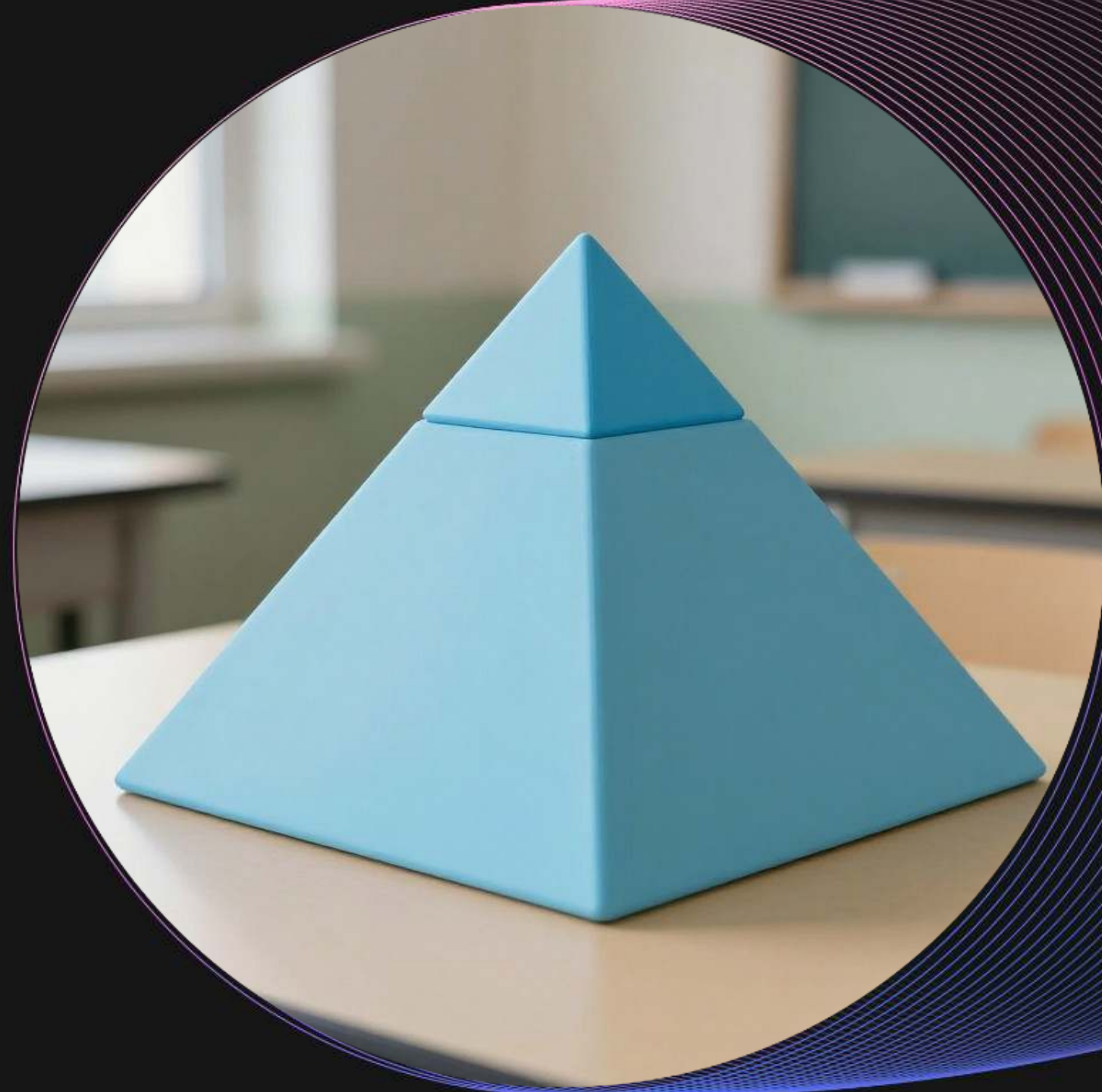
Полная поверхность пирамиды показывает всю внешнюю площадь фигуры. В неё входят основание и все боковые грани, поэтому результат всегда больше площади одного основания.

— Два этапа расчёта

Сначала отдельно находят площадь основания: квадрата, треугольника или другого многоугольника. После этого прибавляют площадь боковой поверхности, полученную по нужной формуле.

— Практический смысл

Такой способ помогает не забыть ни одну часть фигуры и правильно оценить, сколько материала потребуется для модели, коробки или декоративной конструкции.



Объём пирамиды

1 Сравнение с призмой

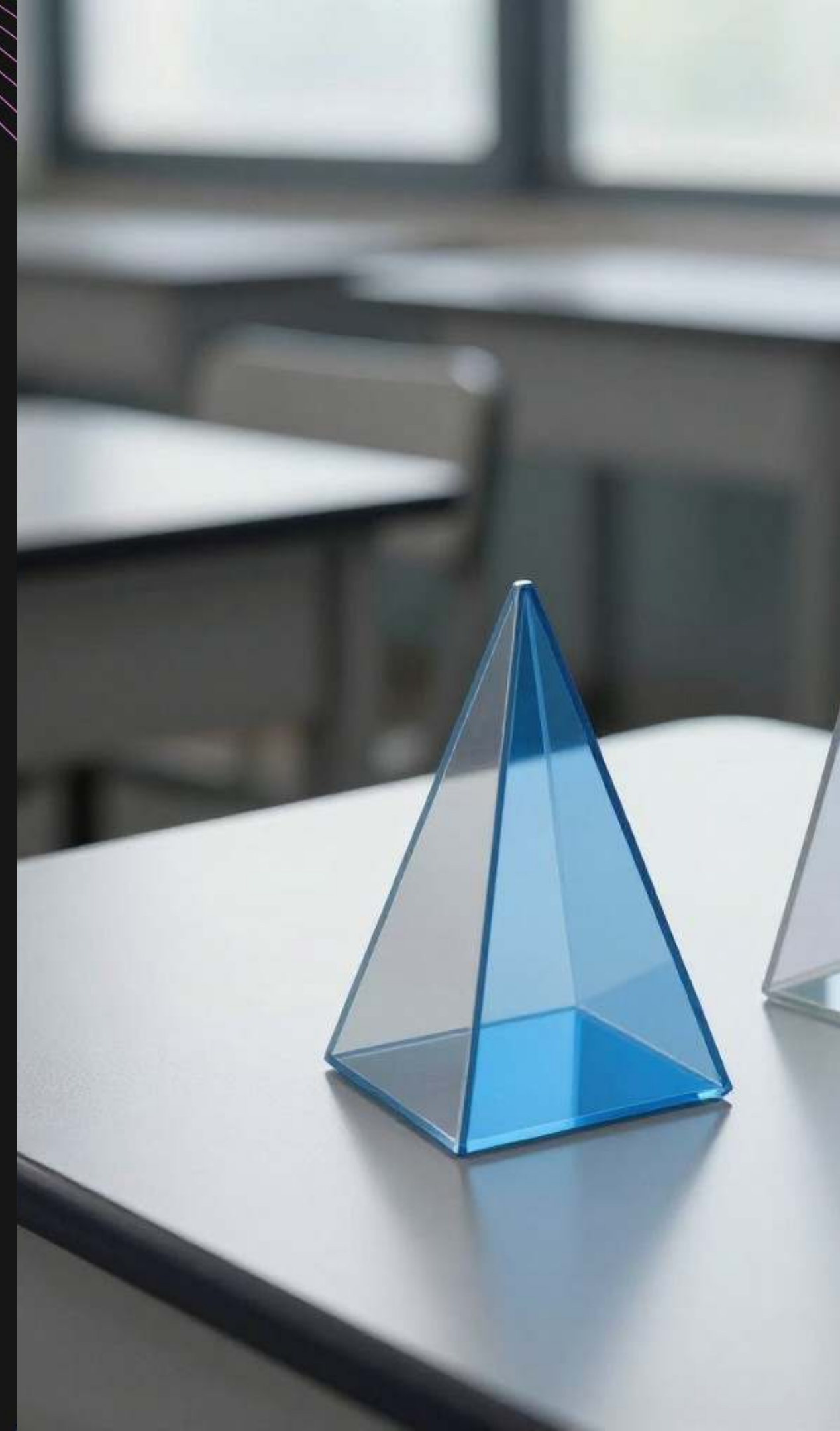
Объём пирамиды сравнивают с объёмом призмы с тем же основанием и высотой. Пирамида занимает ровно одну треть этого объёма, что легко запомнить.

2 Главная формула

Основная формула выглядит так: одна треть умножить на площадь основания и на высоту. Она применяется ко всем пирамидам, если известны эти два параметра.

3 Какая высота нужна

Высота пирамиды всегда перпендикулярна основанию. Именно её подставляют в формулу, а не апофему, поэтому при чтении чертежа нужно внимательно смотреть на обозначения.



Правильные многогранники

Признаки правильности

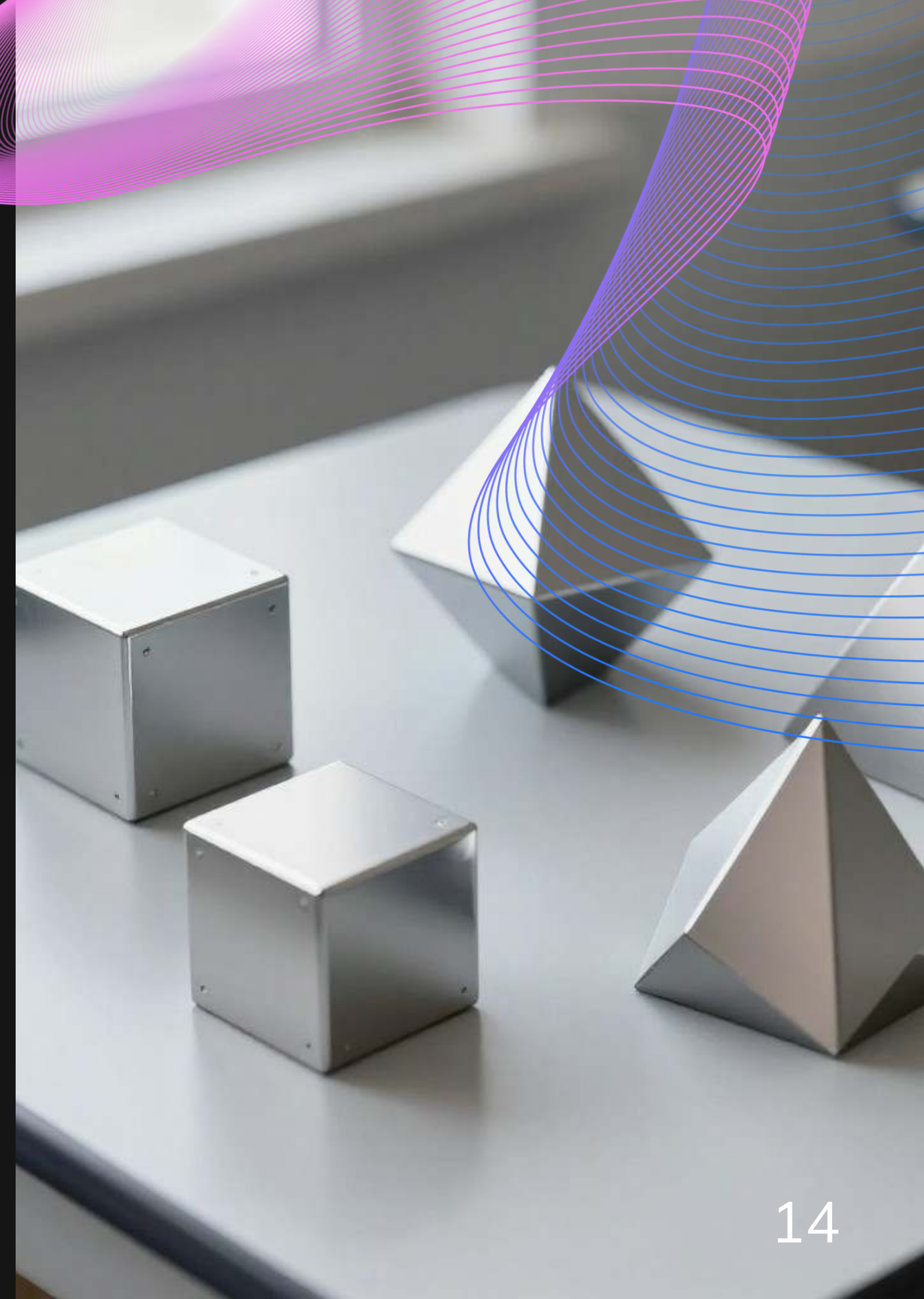
Правильный многогранник отличается тем, что все его грани равны между собой, а вокруг каждой вершины повторяется одинаковый набор рёбер. Фигура выглядит симметрично со всех сторон.

Пять платоновых тел

В школьном курсе изучают пять платоновых тел: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Эти тела известны ещё с античности и отличаются очень строгой симметрией.

Как их узнают

Такие фигуры удобно распознавать по одинаковым граням и регулярному расположению вершин. Это помогает сравнивать модели, строить чертежи и проверять геометрические свойства.



Что такое развёртка

Плоский шаблон

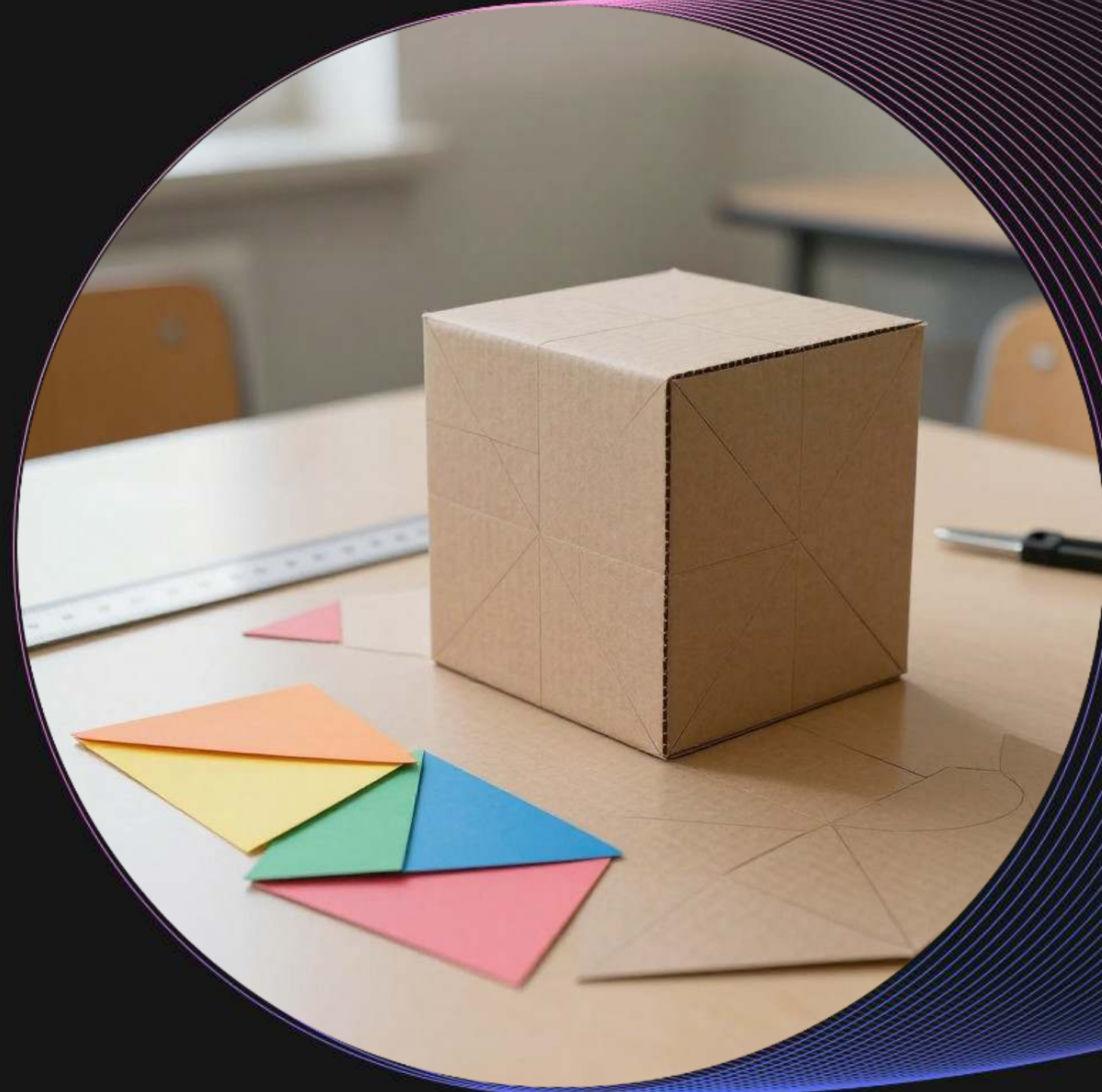
Развёртка — это плоский чертёж поверхности фигуры. Если аккуратно вырезать и согнуть его по линиям, получится объёмный многогранник с теми же гранями.

Что показывает схема

На развёртке хорошо видно, какие грани соединяются друг с другом и какой у них размер. Поэтому она помогает понять устройство фигуры до её сборки.

Зачем она нужна

Развёртку используют не только для построения модели, но и для нахождения площади поверхности. Достаточно сложить площади всех изображённых на ней частей.



Как строят развёртки призм и пирамид

От основания к готовой развёртке: сначала выделяют главные элементы, затем соединяют их по общим рёбрам.



Развёртка на практике: проверка ошибок

- 1 Проверка состава**
Сначала сравните число граней на развёртке с моделью многогранника. Если одной части не хватает или их слишком много, схема сразу становится неверной.
- 2 Проверка размеров**
Затем убедитесь, что одинаковые элементы действительно равны по размерам. Особенно важно сверять стороны, которые должны совпасть после сгибания и склеивания.
- 3 Проверка соединений**
После этого посмотрите, образуют ли соседние части общие рёбра. Ошибка часто появляется, когда пытаются соединить элементы, которые в фигуре не соприкасаются.
- 4 Проверка сборки**
В конце мысленно сложите развёртку и проверьте, получится ли замкнутая поверхность без зазоров и наложений. Это лучший способ заметить скрытую ошибку.



Связь вершин, рёбер и граней

1 Общее правило

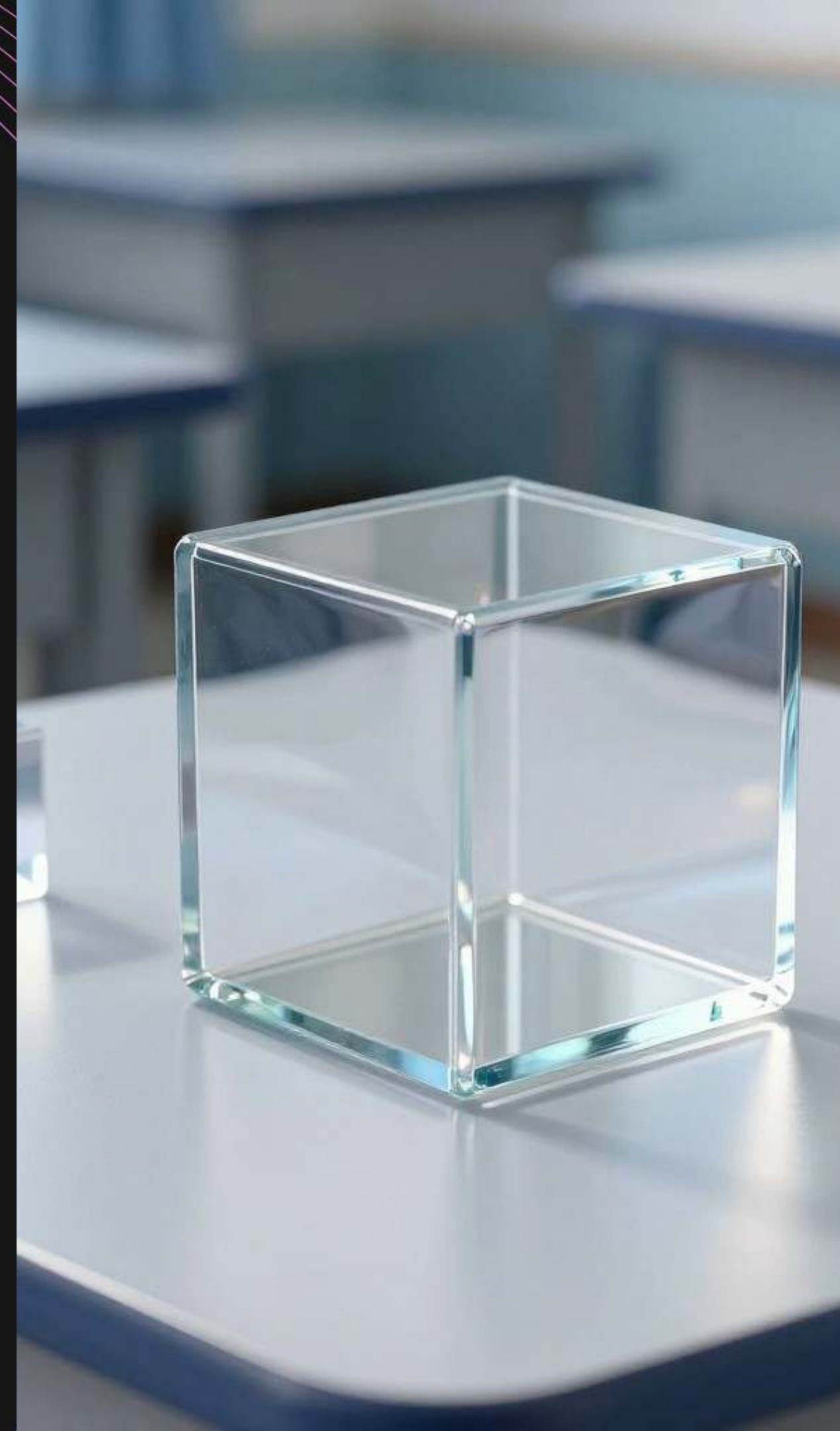
Для выпуклого многогранника выполняется формула Эйлера: число вершин плюс число граней равно числу рёбер плюс два. Она связывает все основные элементы фигуры.

2 Пример куба

На кубе легко проверить соотношение: 8 вершин, 6 граней и 12 рёбер. Подстановка даёт равенство $8 + 6 = 12 + 2$.

3 Как использовать

Эта формула полезна как проверка. Если при подсчёте элементов равенство не выполняется, значит, где-то допущена ошибка в чертеже или в ответе.



Типовые задачи на площадь и объём

- Сравните два типа задач: в одной ищут поверхность, в другой — объём. В обоих случаях важно сначала выбрать нужные данные, а потом подставить их в правильную формулу.

Тип задачи	Что известно	Что делают
Призма	$S_{\text{осн}}$, $P_{\text{осн}}$	$S_{\text{бок}}$, затем $S_{\text{полн}}$
Пирамида	$S_{\text{осн}}$, h	$V = 1/3$

Сначала определяют, идёт ли речь о поверхности или объёме, затем выбирают формулу и последовательность вычислений.

Типовые правила решения задач по теме многогранников

Что важно запомнить

Многогранники помогают понять, как устроены реальные предметы вокруг нас. Повторите элементы фигур, основные виды, формулы площади и объёма, развёртки и формулу Эйлера — тогда задачи будут решаться увереннее.