

# Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0 до $\pi$

Как меняются  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ ?



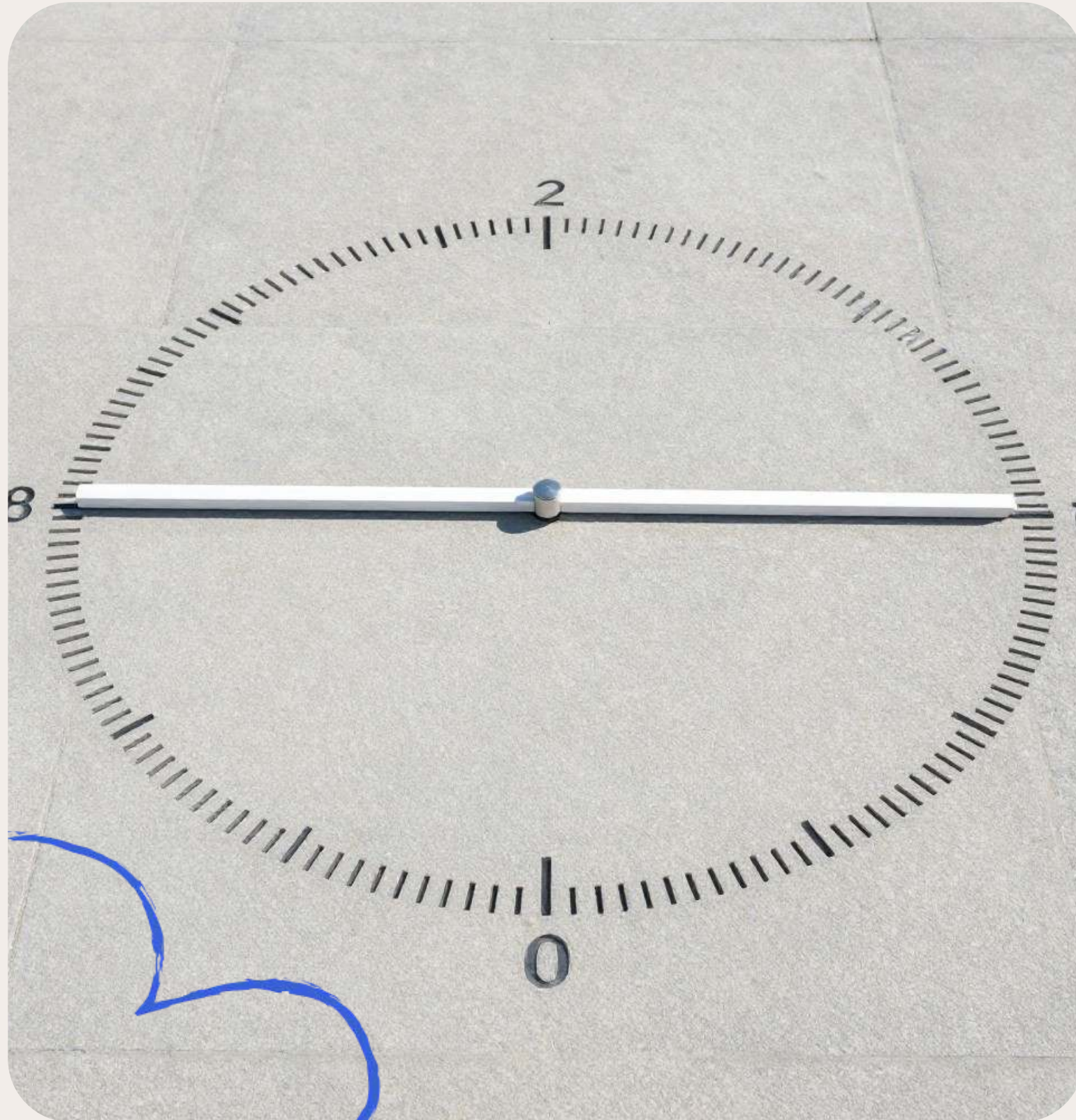
- Путь угла от 0 до  $\pi$



На единичной окружности этот промежуток показывает полный поворот от начального положения до полуоборота. Здесь особенно важно, как меняются координаты точки, знаки функций и их опорные значения: 0, 1 и  $-1$ .



- Синус на отрезке от 0 до  $\pi$



### Опорные значения

Синус проходит через три главные точки: в начале отрезка он равен 0, в середине достигает 1, а в конце снова возвращается к 0. Эти значения удобно запоминать по графику и окружности.

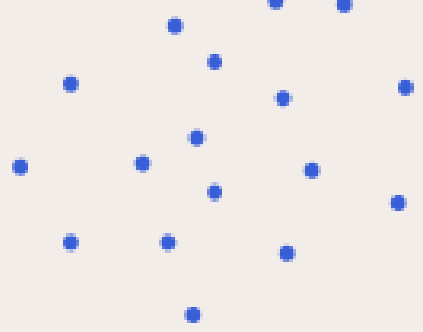
### Рост до середины

На участке от 0 до  $\pi/2$  синус увеличивается. Чем больше угол, тем выше точка на окружности, а значение  $\sin x$  поднимается от 0 до 1 без скачков и разрывов.

### Плавный спад

После  $\pi/2$  синус начинает уменьшаться. На отрезке  $[\pi/2; \pi]$  он опускается от 1 обратно к 0, образуя плавную дугу над осью  $x$ .

# • Графики синуса и косинуса на одном отрезке



Обе функции удобно сравнивать по одним и тем же опорным точкам. Так особенно заметно, как по-разному ведут себя их значения на полуокружности.

Синус имеет вершину в середине отрезка, а косинус непрерывно убывает от 1 до -1.

Значения основных тригонометрических функций в точках 0,  $\pi/2$  и  $\pi$

- Косинус: непрерывное убывание от 1 до -1

1

### Начало отрезка

При  $x = 0$  косинус равен 1. Это самое большое значение на рассматриваемом промежутке, поэтому график начинается выше всех остальных точек.

2

### Движение к нулю

На участке от 0 до  $\pi/2$  значение  $\cos x$  постепенно уменьшается. В точке  $x = \pi/2$  оно становится равным 0, то есть график пересекает ось  $x$ .

3

### Отрицательные значения

Во второй четверти косинус уже меньше нуля. Это помогает понять, почему точка на единичной окружности переходит в левую половину, где  $x$ -координата отрицательна.

4

### Конец отрезка

При  $x = \pi$  косинус равен -1. Таким образом, на всём промежутке от 0 до  $\pi$  функция убывает без разрывов и достигает наименьшего значения в конце.

# ● Ключевые значения тригонометрических функций в опорных точках

Таблица показывает значения в основных углах и отмечает точки, где функции не определены.

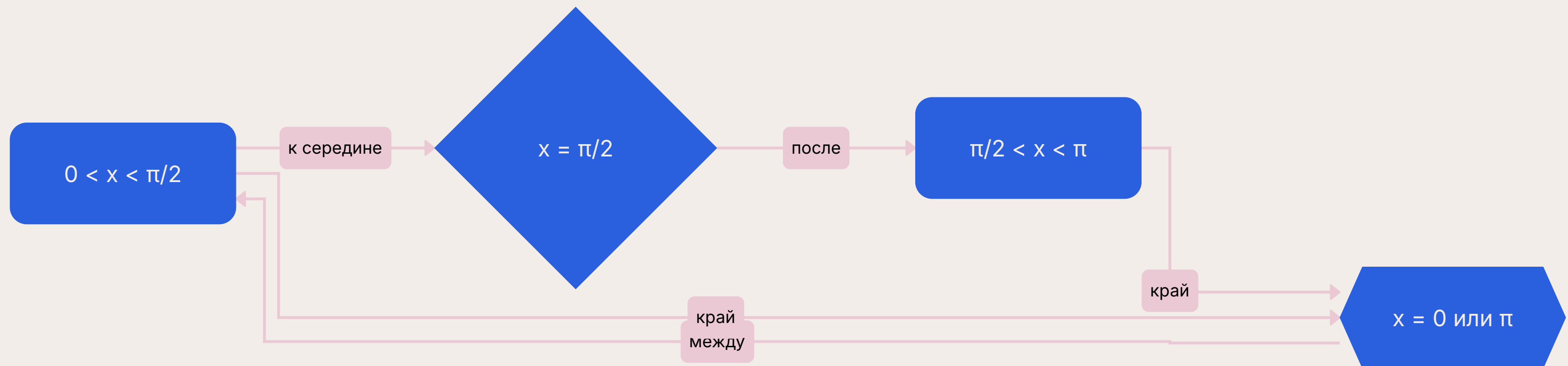
В опорных точках сразу видно, где функции равны 0, 1 или -1, а также где появляются разрывы.

| x       | sin x        | cos x        | tg x   | ctg x  |
|---------|--------------|--------------|--------|--------|
| 0       | 0            | 1            | 0      | неопр. |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1      | 1      |
| $\pi/2$ | 1            | 0            | неопр. | 0      |
| $\pi$   | 0            | -1           | 0      | неопр. |

Таблица значений тригонометрических функций для основных углов

# • Знаки тригонометрических функций на отрезке от 0 до $\pi$

Схема показывает, как меняются знаки функций в разных частях промежутка.



# • Тангенс и причина разрыва при $x = \pi/2$

## 1 Формула тангенса

Тангенс определяется как отношение  $\sin x$  к  $\cos x$ . Поэтому его поведение напрямую зависит не только от синуса, но и от того, равен ли косинус нулю.

## 3 Слева от середины

Когда угол приближается к  $\pi/2$  слева, знаменатель становится очень маленьким положительным числом. Из-за этого  $\operatorname{tg} x$  быстро растёт и принимает всё большие положительные значения.

## 2 Почему возникает разрыв

При  $x = \pi/2$  косинус равен 0. Делить на ноль нельзя, поэтому  $\operatorname{tg} x$  в этой точке не существует, и на графике появляется вертикальный разрыв.

## 4 Справа от середины

Сразу после  $\pi/2$  тангенс становится отрицательным. Дальше, по мере приближения к  $\pi$ , его значения поднимаются к нулю, но разрыв в середине остаётся.

# • Поведение тангенса и котангенса на интервале $0 \dots \pi$

На графике удобно видеть, что обе функции распадаются на две ветви. Их наклон и разрывы помогают быстро отличать  $\tan$  и  $\cot$  друг от друга.

Тангенс возрастает на каждом из двух промежутков, а котангенс убывает; разрывы определяют их особое поведение.

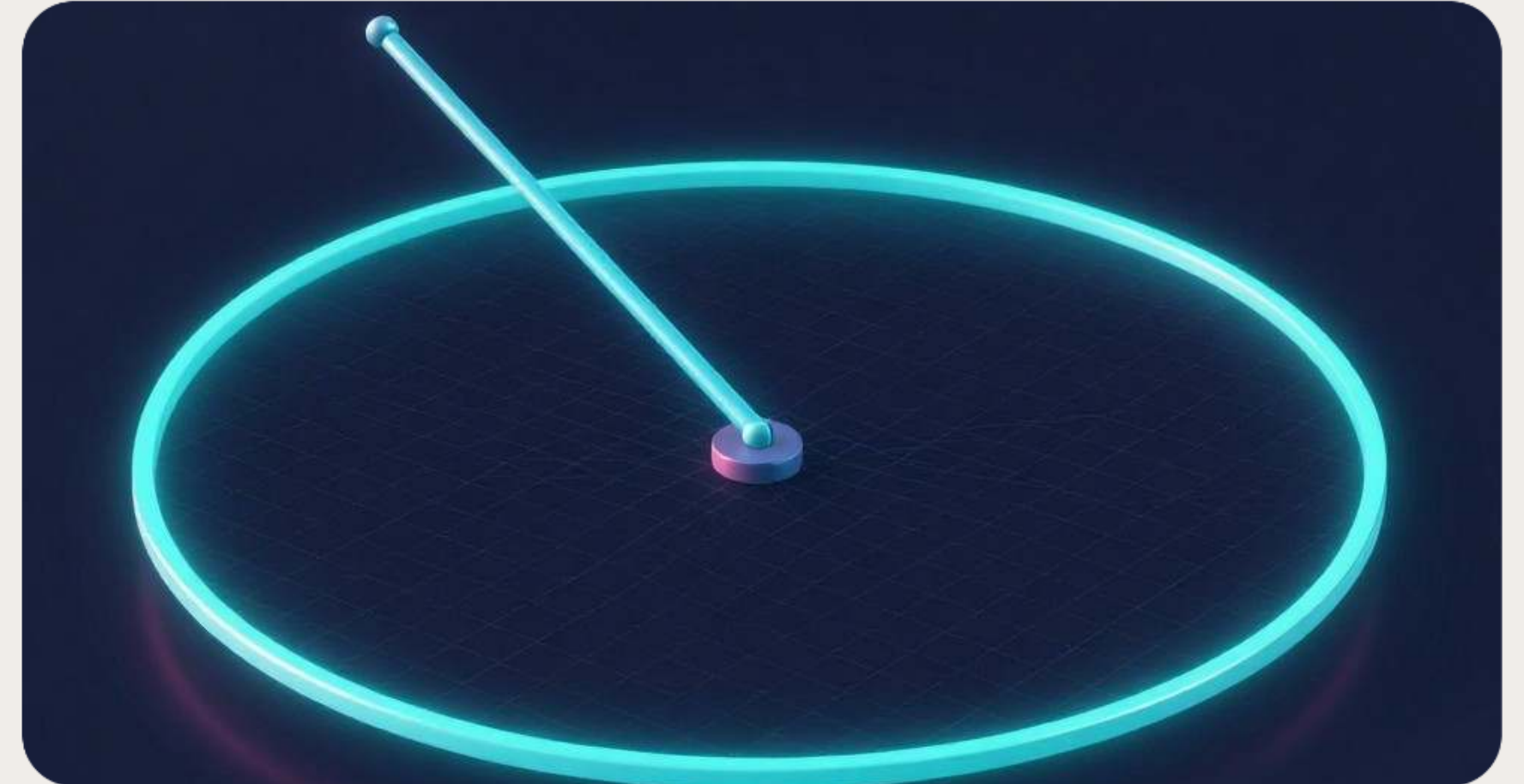
Значения тангенса и котангенса вблизи опорных точек  $0$ ,  $\pi/2$  и  $\pi$

- Единичная окружность и координаты точки



Как движется точка

Если вести точку по единичной окружности от 0 до  $\pi$ , она проходит от правой крайней точки через верх до левой крайней. При этом её  $x$ -координата меняется от 1 до  $-1$ , а  $y$ -координата сначала растёт, затем снова убывает до 0.



Что это говорит о функциях

Координаты точки равны  $(\cos x, \sin x)$ , поэтому поведение функций видно прямо на окружности. Косинус уменьшается, потому что точка уходит влево, а синус сначала растёт, потому что точка поднимается вверх, и затем убывает при спуске.

- Сравнение значений в основных точках  $0$ ,  $\pi/2$  и  $\pi$

| $x$     | $\sin x$ | $\cos x$ | $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{ctg} x$ |
|---------|----------|----------|-----------------------|------------------------|
| $0$     | $0$      | $1$      | $0$                   | не опр.                |
| $\pi/2$ | $1$      | $0$      | не опр.               | $0$                    |
| $\pi$   | $0$      | $-1$     | $0$                   | не опр.                |

В таблице сопоставлены значения четырёх функций в трёх опорных точках отрезка  $0 \dots \pi$ .

Сравнение показывает, что именно в точках  $0$ ,  $\pi/2$  и  $\pi$  меняются знак, направление изменения и наличие разрывов у  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ .

Точные значения тригонометрических функций в опорных точках единичной окружности

# • Где функции достигают наибольших и наименьших значений

## Синус в вершине

Функция  $\sin x$  достигает наибольшего значения 1 в точке  $x = \pi/2$ . На отрезке от 0 до  $\pi$  это единственный максимум, после которого значения снова уменьшаются.

## Косинус на концах

У  $\cos x$  наибольшее значение равно 1 и достигается при  $x = 0$ , а наименьшее значение равно -1 и наблюдается при  $x = \pi$ . Между ними функция убывает непрерывно.

## Тангенс без предела

У  $\operatorname{tg} x$  нет общего максимума и минимума на всём отрезке  $0 \dots \pi$ , потому что при  $x = \pi/2$  возникает разрыв. Значения резко меняются по обе стороны этой точки.

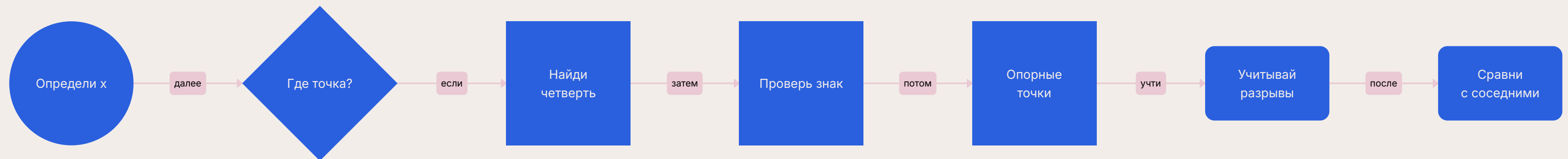
## Котангенс тоже прерывается

Функция  $\operatorname{ctg} x$  также не имеет общего максимума и минимума на всём отрезке. Её поведение нарушается разрывами в точках  $x = 0$  и  $x = \pi$ , где выражение не определено.



# • Как читать график тригонометрической функции

Последовательность действий по опорным точкам, знакам и разрывам на отрезке  $0 \dots \pi$



# • Почему отрезок от 0 до $\pi$ особенно важен

## Середина отрезка

Точка  $x = \pi/2$  показывает поворот на  $90^\circ$  и помогает заметить максимум синуса, нуль косинуса и разрыв тангенса.

## Начало движения

При  $x = 0$  функции начинают своё изменение с опорных значений. На этом участке удобно видеть исходное положение точки на единичной окружности.

## Завершение полуоборота

При  $x = \pi$  виден полный переход к противоположной стороне окружности. Здесь особенно заметны нули синуса, минимум косинуса и разрыв котангенса.

# • Знаки функций на двух половинах отрезка

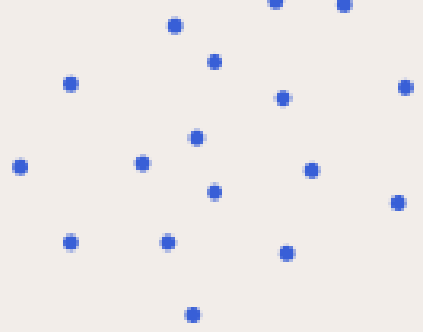


Диаграмма показывает только знак функции на каждом полупространстве: положительный, отрицательный или переход через нуль.

На первой половине отрезка все функции, где они определены, положительны. На второй половине синус остаётся положительным, а остальные три функции меняют знак.

Знаки тригонометрических функций по четвертям на отрезке  $0 \dots \pi$

# • Связь с прямоугольным треугольником

1

## Определение через стороны

Для острого угла  $\sin x$  показывает отношение противолежащего катета к гипотенузе, а  $\cos x$  — прилежащего катета к гипотенузе. Поэтому значения зависят от размера угла.

2

## Как меняется синус

Когда угол увеличивается от 0 до  $\pi/2$ , противолежащий катет становится длиннее. Из-за этого отношение, которое задаёт синус, растёт от 0 к 1.

3

## Как ведёт себя косинус

В то же время прилежащий катет укорачивается, и отношение для косинуса уменьшается от 1 к 0. Так геометрия треугольника объясняет убывание функции.



# • Типичные ошибки при изучении графиков

## 1 Тангенс в середине

Нельзя считать, что  $\operatorname{tg} x$  определён при  $x = \pi/2$ . В этой точке  $\cos x$  равен нулю, поэтому деление на  $\cos x$  невозможно, и возникает разрыв.

## 3 Нули синуса

Важно помнить, что  $\sin 0 = 0$  и  $\sin \pi = 0$ . Эти точки не являются максимумом или минимумом, а только местами пересечения с осью.

## 5 Путаница с четвертями

Полезно сначала определить, в какой части отрезка находится угол. Тогда сразу ясно, какие функции положительны, а какие становятся отрицательными.

## 2 Знак косинуса

Во второй четверти, то есть при  $\pi/2 < x < \pi$ , косинус отрицателен. Ошибка со знаком часто приводит к неверному чтению графика и вычислений.

## 4 Разрывы котангенса

У  $\operatorname{ctg} x$  есть разрывы при  $x = 0$  и  $x = \pi$ . Поэтому нельзя искать там обычное значение функции или сравнивать его с соседними точками.

# ● Сводка поведения каждой функции на отрезке от 0 до $\pi$

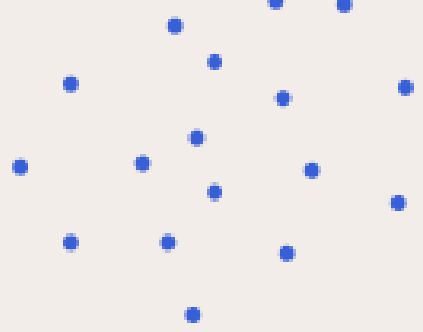
Таблица собирает главные свойства четырёх функций: направление изменения и особые точки на отрезке  $0 \dots \pi$ .

Сводка помогает быстро сравнить функции: синус имеет один максимум, косинус — плавное убывание, а тангенс и котангенс выделяются разрывами.

| Функция                | Изменение                | Особые точки         |
|------------------------|--------------------------|----------------------|
| $\sin x$               | растёт, потом убывает    | макс. при $\pi/2$    |
| $\cos x$               | непрерывно убывает       | 0 при $\pi/2$        |
| $\operatorname{tg} x$  | растёт на двух участках  | разрыв при $\pi/2$   |
| $\operatorname{ctg} x$ | убывает на двух участках | разрывы при 0, $\pi$ |

Свойства тригонометрических функций  
на отрезке  $0 \dots \pi$

# ● Сводный графический обзор четырёх функций



Графики построены в одних и тех же масштабах, чтобы было проще заметить различия в направлении изменения и знаках.

Синус и косинус меняются плавно, а тангенс и котангенс резко расходятся по знакам после середины отрезка. Это делает опорные точки особенно важными.

Точные значения тригонометрических функций в стандартных углах

- Тригонометрия на отрезке, который всё проясняет

На отрезке от 0 до  $\pi$  хорошо видно, как ведут себя основные тригонометрические функции: синус проходит через максимум, косинус убывает, а тангенс и котангенс показывают разрывы и смену знака.

