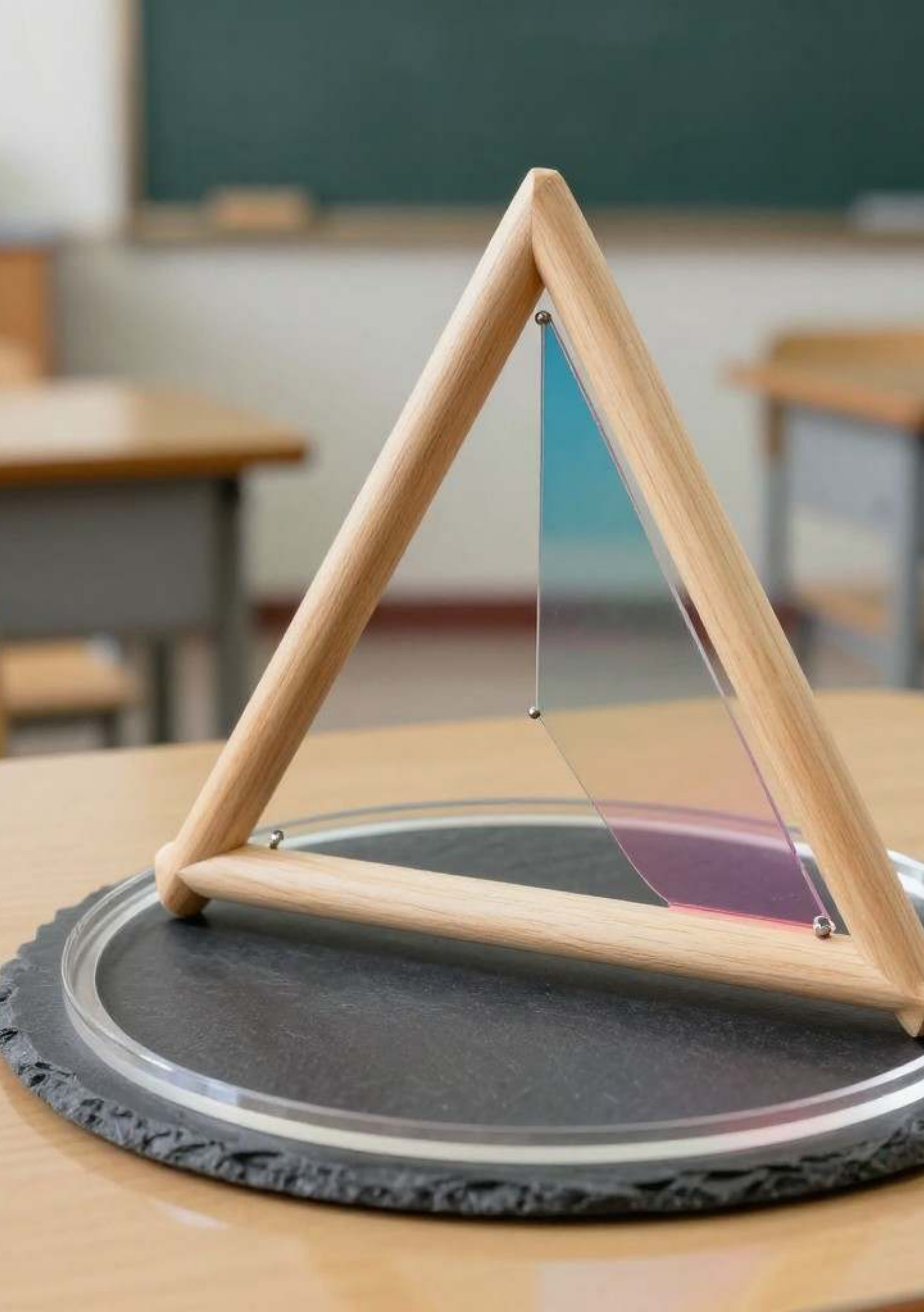




Теорема синусов: + как связаны стороны и углы треугольника

Связь сторон, углов и радиуса описанной окружности в одной формуле.

Где работает теорема синусов



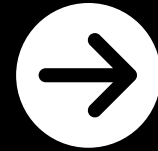
Она помогает находить стороны и углы в любом треугольнике, а не только в прямоугольном. Особенно полезна, когда известны угол, сторона и нужно восстановить остальные элементы чертежа.

Сторона и противолежащий угол



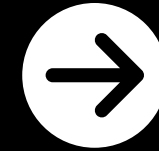
Пара a и A

Стороне a всегда соответствует угол A , который лежит напротив неё. Именно такие пары сравнивает теорема синусов, поэтому важно сразу правильно читать обозначения на рисунке.



Пара b и B

Сторона b связана с углом B по тому же правилу. Если на чертеже перепутать стороны и углы, формула даст неверный результат, даже при правильных вычислениях.



Пара c и C

Стороне c противолежит угол C . Такая запись удобна для решения задач: нужно лишь найти нужную пару и подставить её в отношение стороны к синусу угла.



Проверка по величине

Чем больше угол, тем больше противолежащая ему сторона. Это свойство помогает проверить чертёж и быстро заметить ошибку, если порядок сторон или углов записан неверно.

Обозначения в треугольнике и на чертеже

Стороны

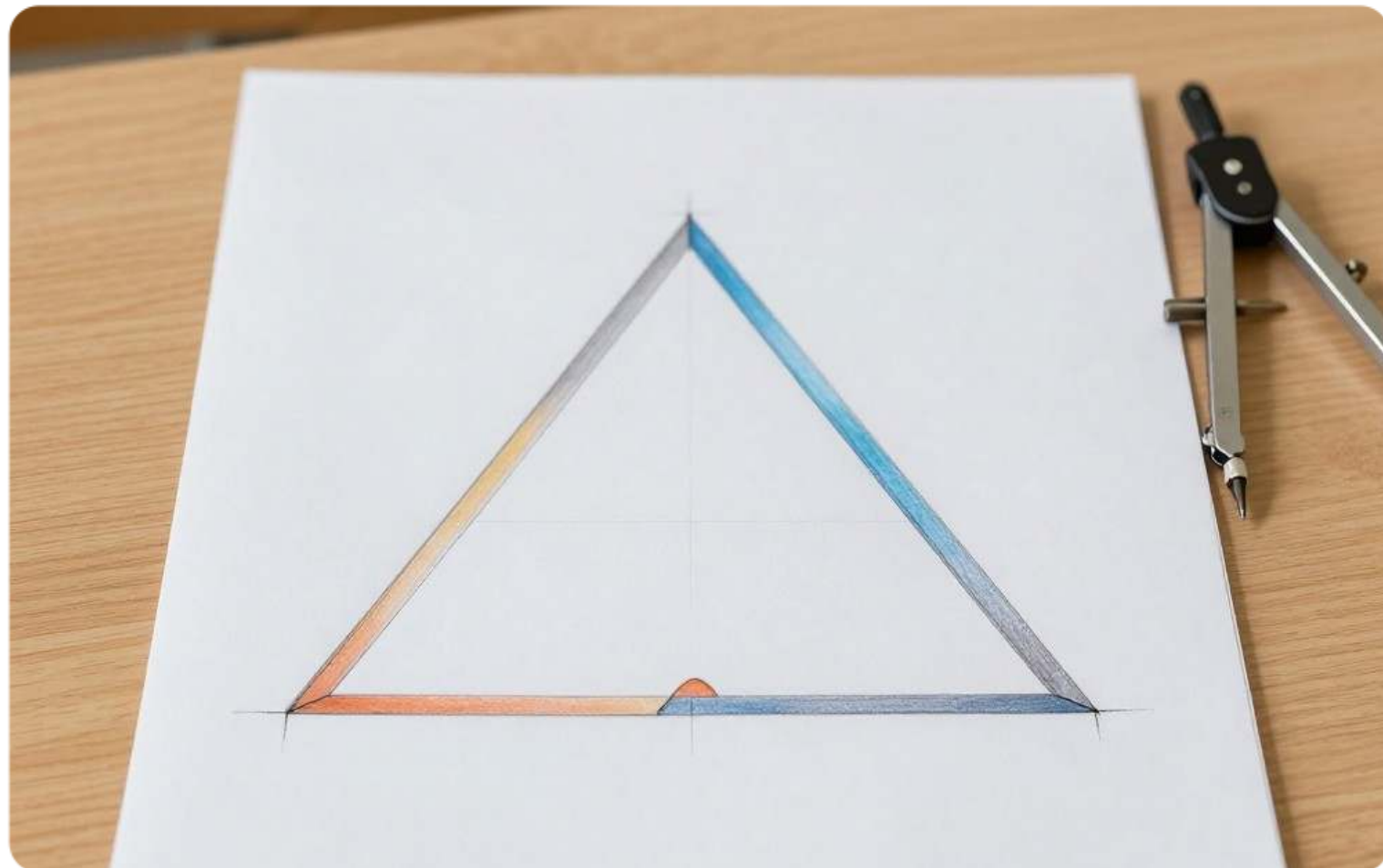
- В школьной геометрии стороны треугольника обозначают буквами a , b и c . Такая запись позволяет коротко записывать формулы, не перегружая чертёж лишними словами и числами.

Углы

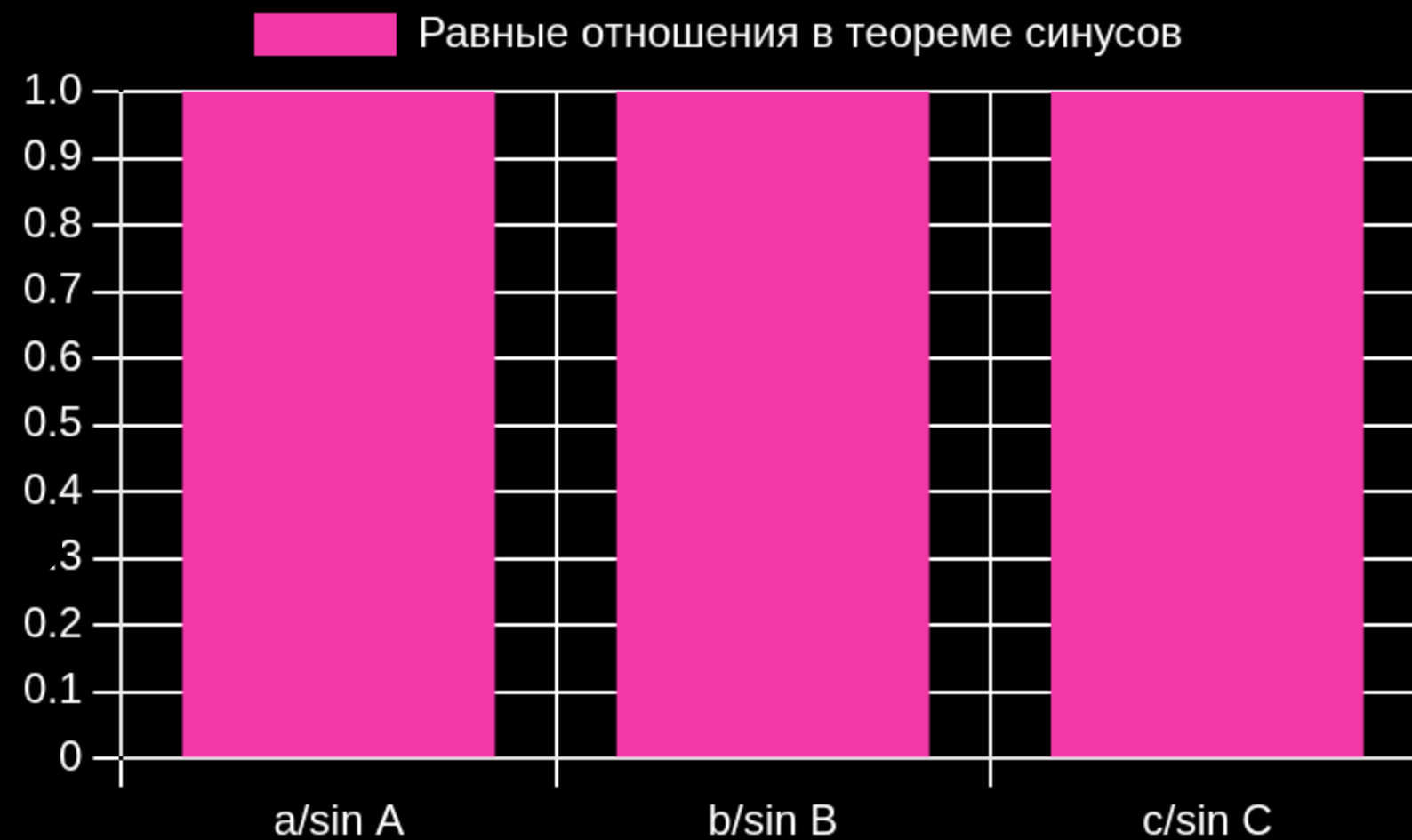
- Углы принято обозначать заглавными буквами A , B и C . Важно помнить, что каждой стороне соответствует именно противолежащий угол, а не соседний с ней.

Окружность

- На схеме часто отмечают описанную окружность и её радиус R . Это помогает увидеть, как формула связывает треугольник не только с углами, но и с окружностью.



Одинаковые отношения в теореме синусов



- Все три отношения одинаковы для одного
- треугольника, даже если сами стороны и углы различаются.

Если отношения равны, можно

- использовать любое из них для поиска неизвестной стороны или угла.

Формулировка теоремы синусов

Формулировка теоремы синусов

01.

Основное равенство

В любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла одинаково для всех трёх сторон. Это и есть теорема синусов, одна из главных формул школьной геометрии.

02.

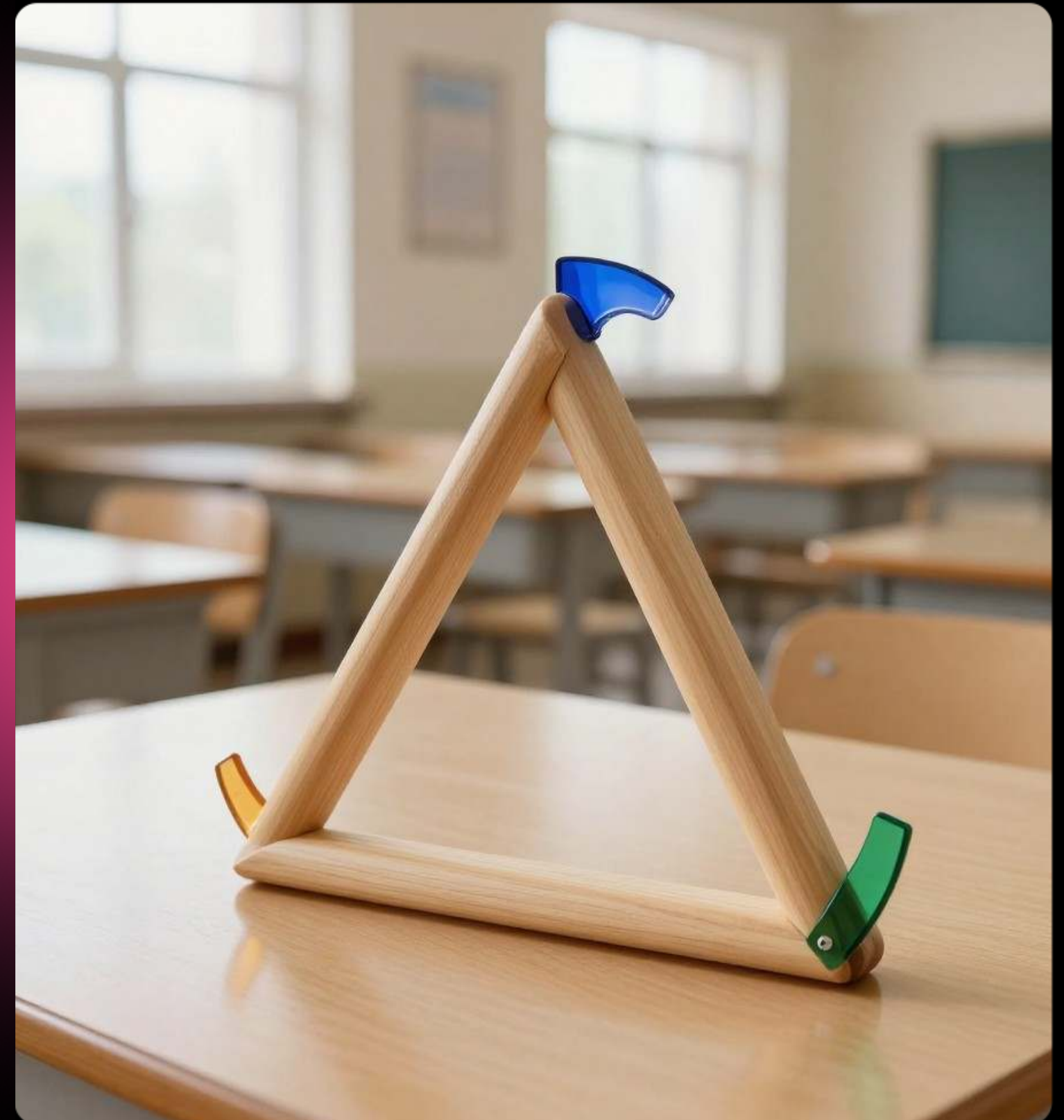
Что можно найти

Если известны одна сторона и её противолежащий угол, можно вычислить другие стороны. Если известны две стороны и один угол, теорема помогает найти недостающий угол.

03.

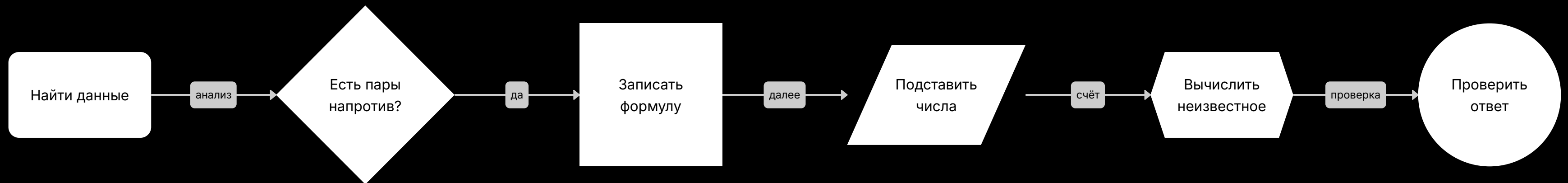
Почему это удобно

Формула работает не только для прямоугольных, но и для любых треугольников. Поэтому она особенно полезна в задачах, где нельзя сразу применить простые правила.



Как решать задачи по теореме синусов

Последовательность действий при решении школьных задач по треугольникам



Когда теорема синусов особенно удобна



Два угла и сторона

Если известны два угла и одна сторона, сначала находят третий угол, затем по теореме синусов вычисляют остальные стороны. Такой случай встречается очень часто.



Сторона и её угол

Когда известны две стороны и угол, лежащий напротив одной из них, формула сразу даёт нужное отношение. Это позволяет находить второй угол без лишних построений.



Любой треугольник

Теорема синусов подходит и для остроугольных, и для тупоугольных треугольников. Благодаря этому её можно применять в самых разных школьных задачах.

Какие данные даны и что можно найти

Дано	Что найти	Подходит
2 угла, 1 сторона	2 стороны	Да
2 стороны, 1 угол напротив	Другой угол	Да
3 стороны	Лучше косинусы	Нет
1 угол, 1 сторона	Недостаточно	Нет

Таблица показывает, в каких случаях теорема синусов помогает сразу, а когда данных ещё недостаточно.

Главный признак подходящей задачи — наличие противолежащей пары: стороны и угла напротив неё.

Школьная геометрия, теорема синусов

Связь теоремы синусов с описанной окружностью

Формула с радиусом

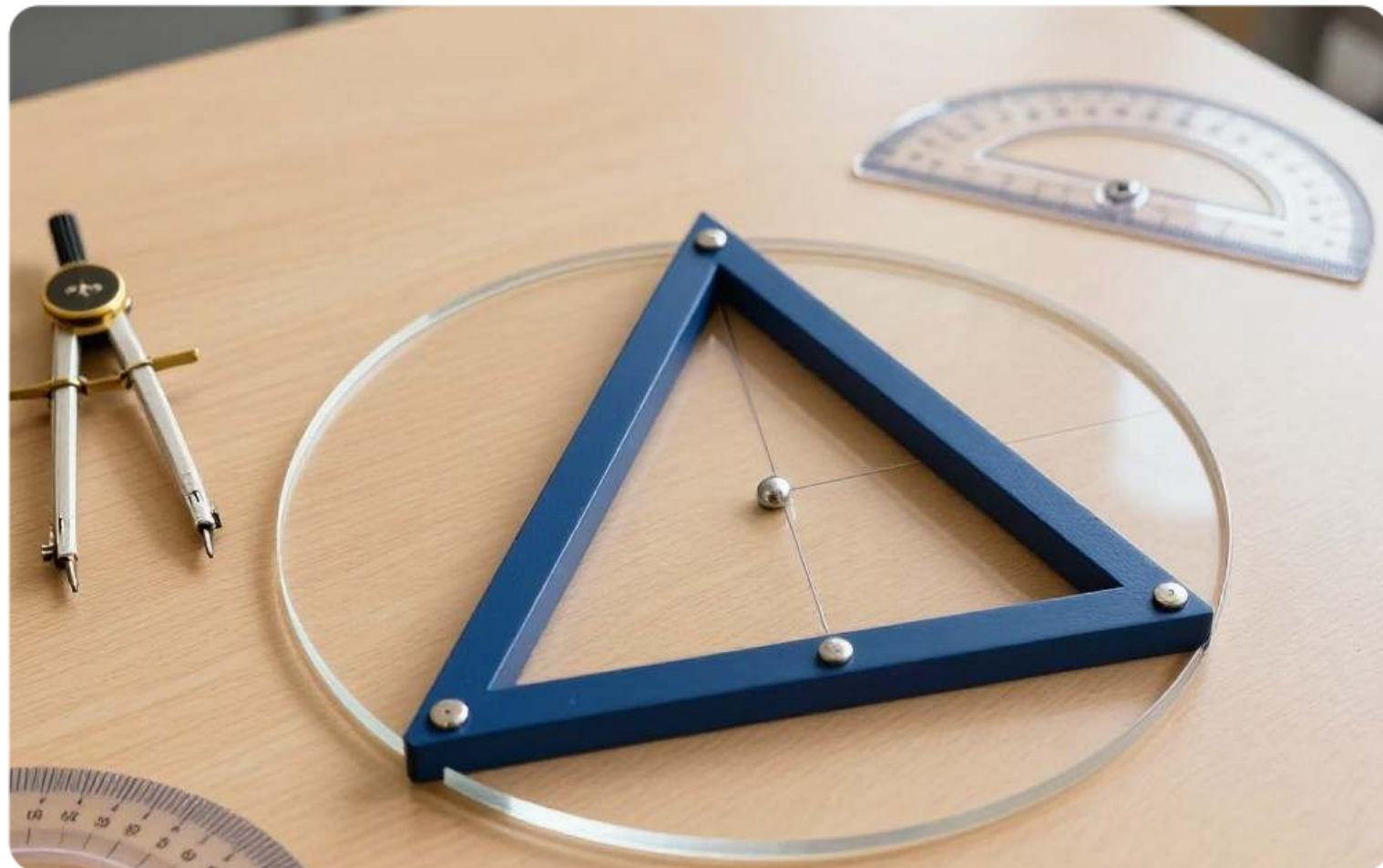
- Запись $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$ показывает, что все отношения равны одной и той же величине. Здесь R — радиус описанной окружности.

Что такое R

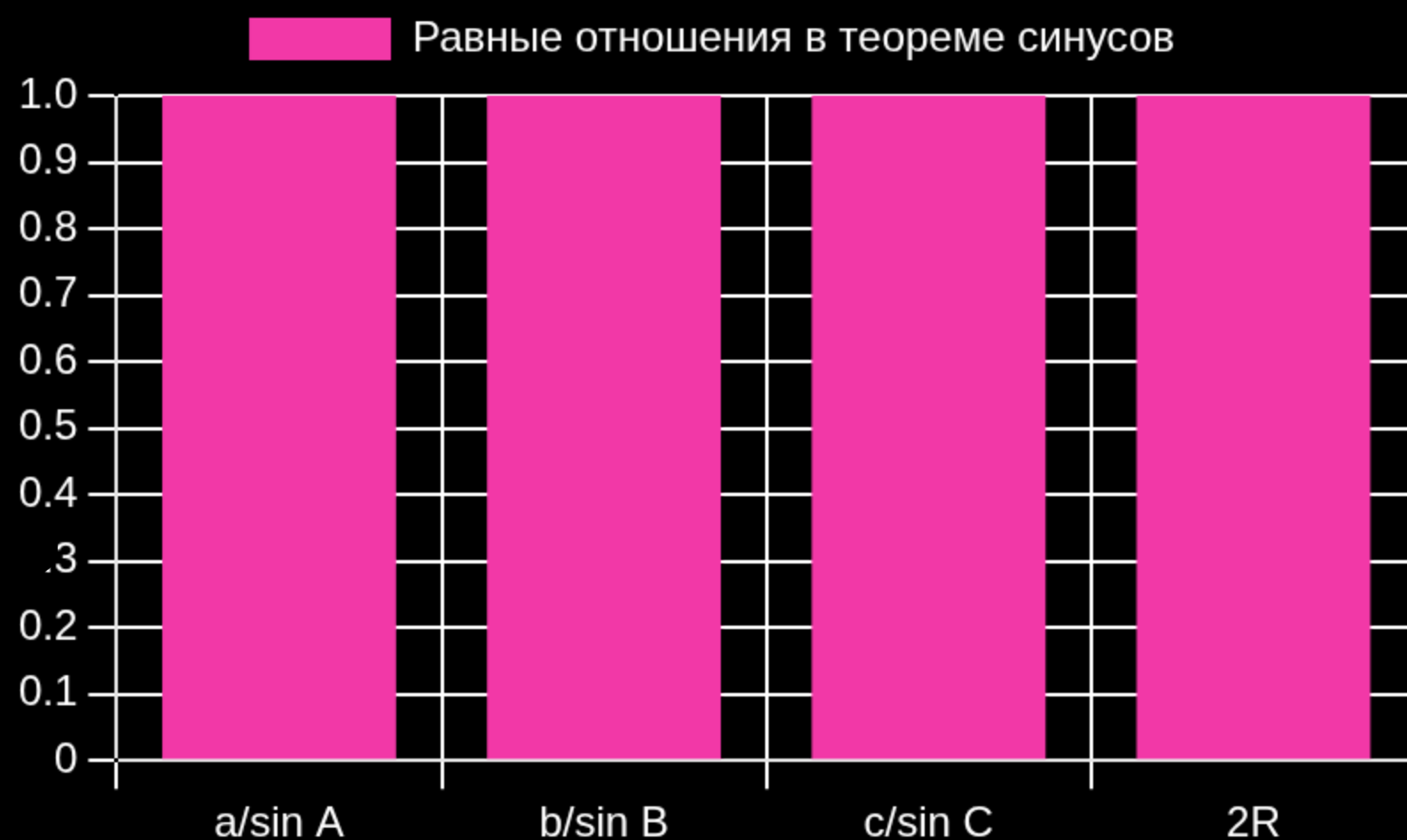
- Описанная окружность проходит через все вершины треугольника. Её радиус связывает стороны и углы с геометрией окружности, а не только с самим треугольником.

Зачем это нужно

- Эта форма теоремы помогает решать задачи, где удобно использовать радиус окружности. Она показывает, что одна формула объединяет треугольник и окружность вокруг него.



Что связывает формула $a/\sin A = 2R$



Одна запись объединяет стороны треугольника, его углы и радиус описанной окружности в единую зависимость.

Равенство показывает, что все три отношения одинаковы, а значит любую известную пару можно использовать для поиска неизвестных элементов.

Школьная формулировка теоремы синусов; курс планиметрии 7 класса.

Пример нахождения стороны

01.

1. Записываем данные

Даны углы $A = 30^\circ$ и $B = 45^\circ$, а также сторона $a = 8$ см. Сначала определяем, какая сторона лежит напротив каждого угла, чтобы не перепутать дроби.

02.

2. Подставляем синусы

Используем точные значения: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Теперь можно составить пропорцию $b = a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$ и заменить буквы числами.

03.

3. Выполняем вычисление

Подставляем значения: $b = 8 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}) / (\frac{1}{2})$. Деление на половину увеличивает результат вдвое, поэтому получаем $b = 8\sqrt{2}$ см без округления.

04.

4. Проверяем ответ

Новая сторона должна быть больше 8 см, потому что угол 45° больше угла 30° . Полученный ответ подходит по смыслу и по правилу противолежащих сторон.



Как найти угол по теореме синусов

Шаг 1. Находим известную пару

Выбираем сторону и противолежащий ей угол, которые даны в условии. Именно с этой пары начинается уравнение, связанное с синусами.

Шаг 3. Проверяем весь треугольник

После нахождения второго угла вычисляем третий по правилу 180° . Так можно убедиться, что решение согласуется с геометрией треугольника.

Шаг 2. Составляем уравнение

Записываем пропорцию и подставляем известные значения. Затем выражаем синус неизвестного угла и находим сам угол по таблице или калькуляции.

Точные значения синусов для углов из школьных задач

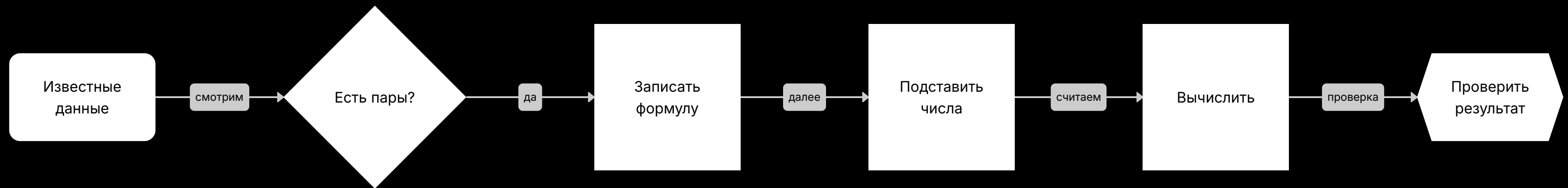
- Эти значения помогают быстро считать по теореме синусов без лишних преобразований и округлений.
- Четыре стандартных значения нужно знать наизусть: они ускоряют вычисления и делают ответы точнее.

Табличные значения синусов из школьного курса геометрии.

Угол	Синус	Использование
30°	$\frac{1}{2}$	очень часто
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	очень часто
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	часто
90°	1	вспомогательно

Алгоритм решения задачи по теореме синусов

Последовательность действий при решении школьной задачи на треугольник.



Типичные ошибки при решении задач



Путаница в парах

Часто путают сторону и угол, которые должны быть напротив друг друга. Из-за этого в пропорцию подставляют не те значения и получают неверный ответ.



Градусы вместо синуса

Нельзя подставлять в формулу число градусов напрямую. Сначала нужно найти значение синуса угла, иначе вычисление не будет иметь смысла.



Неправильное чтение чертежа

Если стороны и углы подписаны не по правилу, легко ошибиться в обозначениях. Перед решением полезно ещё раз проверить, какая вершина и какая сторона чему соответствуют.



Нет проверки суммы углов

После вычислений стоит убедиться, что все углы треугольника дают 180° . Такая проверка помогает заметить арифметические и логические ошибки до сдачи ответа.

Теорема синусов и теорема косинусов



Обе теоремы дополняют друг друга

- и закрывают почти все типы задач на треугольники в школьном курсе.

Если известна противолежащая пара

- или два угла, удобнее синусы; если даны стороны и включённый угол, чаще выбирают косинусы.

Сравнение по условиям применения из школьного курса геометрии.

История появления теоремы синусов



От измерений к формуле

Сначала люди решали практические задачи: как измерить расстояние, не проходя его шагами, и как построить точный чертёж. Из этих наблюдений постепенно выросли правила, связывающие стороны и углы треугольника.



Геометрия для звёзд и карт

Знание свойств треугольников оказалось особенно полезным в астрономии и картографии. По углам и небольшим отрезкам можно было вычислять большие расстояния, а затем переносить их на карту или небесную схему.



Окружность как подсказка

Связь треугольника с описанной окружностью помогла увидеть более общую закономерность. Когда вершины лежат на одной окружности, отношения сторон и синусов углов становятся особенно наглядными и удобными для вычислений.

Зачем теорема синусов нужна в жизни



Задачи на местности

В геодезии и при простых измерениях на участке треугольники помогают определить длины сторон, которые сложно измерить рулеткой. Это делает формулу полезной не только в классе.



Точный расчёт по данным

Если известны только отдельные элементы фигуры, теорема позволяет восстановить остальные. Она учит получать точный результат из ограниченной информации, а это важный навык в математике.



Измерение недоступного

Теорема помогает находить расстояния, которые нельзя измерить напрямую: например, ширину реки или расстояние до удалённого объекта. Достаточно нескольких доступных измерений и правильной схемы.



Работа с картой

При чтении карт и планов важно переводить углы и отрезки в реальные размеры. Теорема синусов даёт способ связать чертёж с действительным положением объектов на местности.

Теорема синусов — ключ к треугольнику



Теорема синусов связывает стороны, противолежащие углы и радиус описанной окружности. Она помогает решать треугольники там, где прямых измерений недостаточно, и требует прежде всего внимательности к обозначениям.