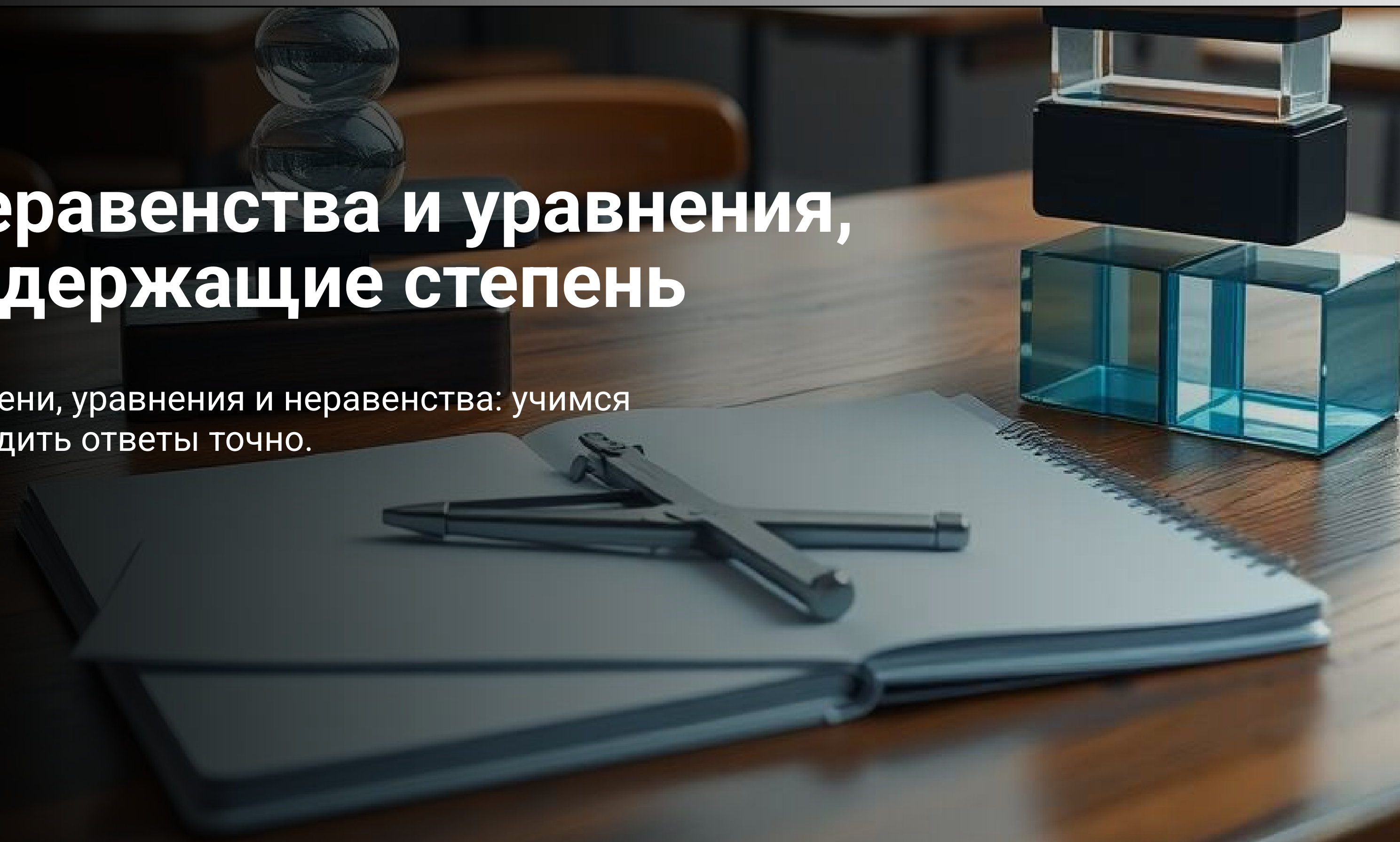


Неравенства и уравнения, содержащие степень

Степени, уравнения и неравенства: учимся
находить ответы точно.



Почему эта тема важна в 9 классе

Степенные выражения встречаются в задачах на площадь, объём и сравнение величин. Эта тема помогает повторить степени и перейти к новым способам решения уравнений и неравенств, которые пригодятся дальше в алгебре и при работе с графиками.



Степень числа: основные элементы записи

1

Запись степени

Выражение a^n означает, что число a умножается само на себя n раз. Такая запись позволяет компактно показать повторяющееся умножение и быстро работать с большими выражениями.

2

Основание и показатель

Основание — это число, которое возводят в степень, а показатель показывает, сколько одинаковых множителей берут. Например, в 2^3 основание равно 2, а показатель равен 3.

3

Примеры вычислений

$2^3 = 8$, потому что $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.
 $(-3)^2 = 9$, а $5^0 = 1$ для любого ненулевого числа. Эти примеры помогают понять, как ведут себя степени.

4

Степень с показателем 1

Если показатель равен 1, значение степени совпадает с самим числом: $a^1 = a$. Это удобно помнить при упрощении выражений и решении простых уравнений.

Свойства степеней, которые используются при решении

Свойство	Формула	Условие
Произведение	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	—
Частное	$a^m : a^n = a^{(m-n)}$	$a \neq 0$
Степень степени	$(a^m)^n = a^{(mn)}$	—
Произведение в степени	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	—
Дробь в степени	$(a/b)^n = a^n / b^n$	$b \neq 0$
Применение	Упрощение выражений	—

Основные формулы помогают упрощать выражения до того, как искать ответ. Важно помнить об ограничениях и не допускать деления на ноль.

Свойства степеней позволяют сокращать вычисления и приводить выражения к удобному виду перед решением уравнений и неравенств.

Чётная и нечётная степень числа

Чётная степень

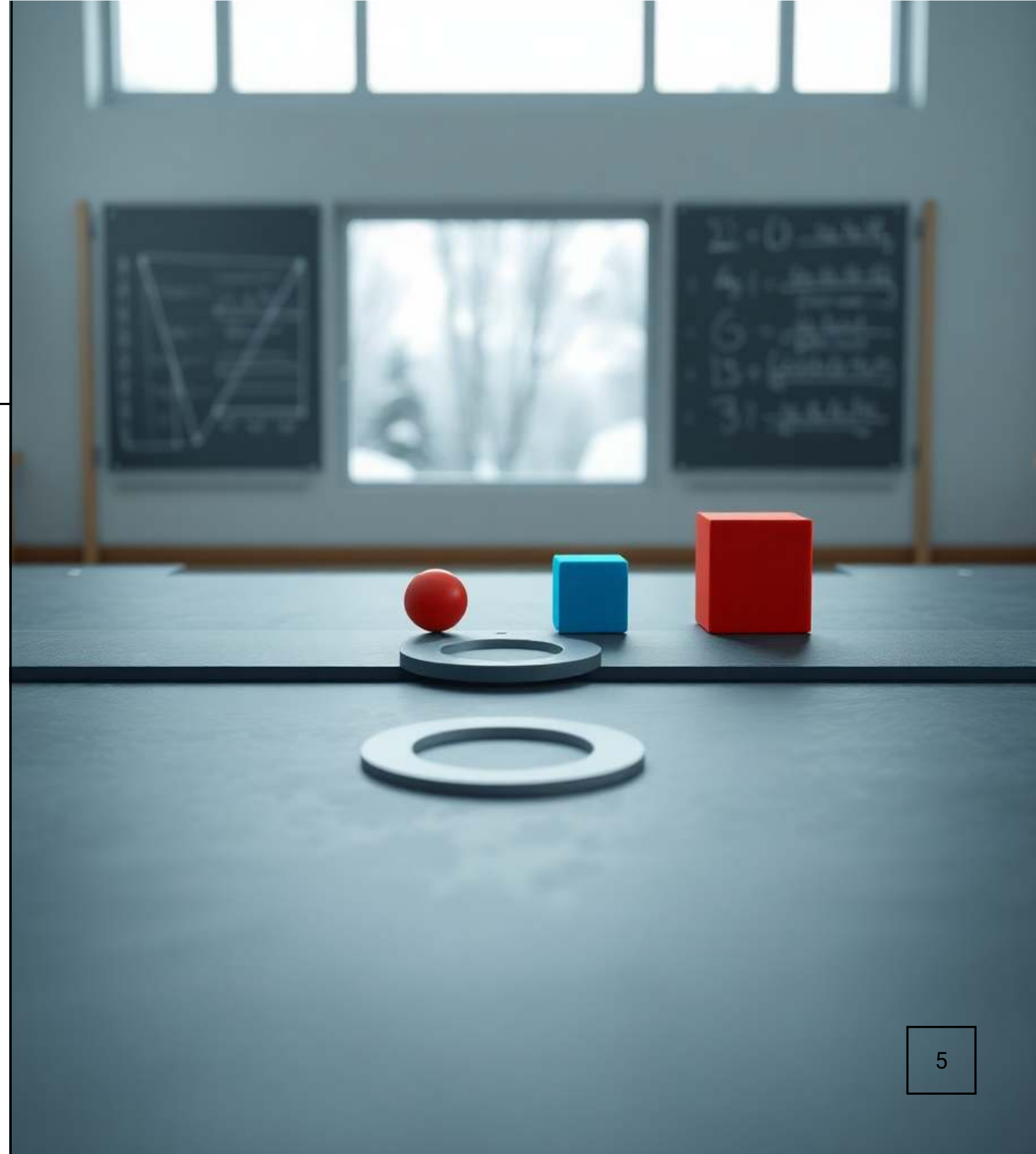
При чётной степени и положительное, и отрицательное число дают неотрицательный результат. Поэтому $(-4)^2 = 16$ и $(-2)^4 = 16$, а знак ответа не меняется.

Нечётная степень

Нечётная степень сохраняет знак основания. Если число отрицательное, результат тоже отрицательный: $(-4)^3 = -64$, $(-2)^5 = -32$. Это свойство помогает сразу оценивать ответ.

Что видно на числовой прямой

Для чётной степени значения симметричны по модулю, а для нечётной — знак результата совпадает со знаком основания. Такая закономерность упрощает решение уравнений и проверку ответа.



Уравнения вида $x^n = a$

1 Чётный показатель

Если n чётное, уравнение $x^n = a$ может иметь два действительных корня при $a > 0$, один корень при $a = 0$ и не иметь решений при $a < 0$.

2 Нечётный показатель

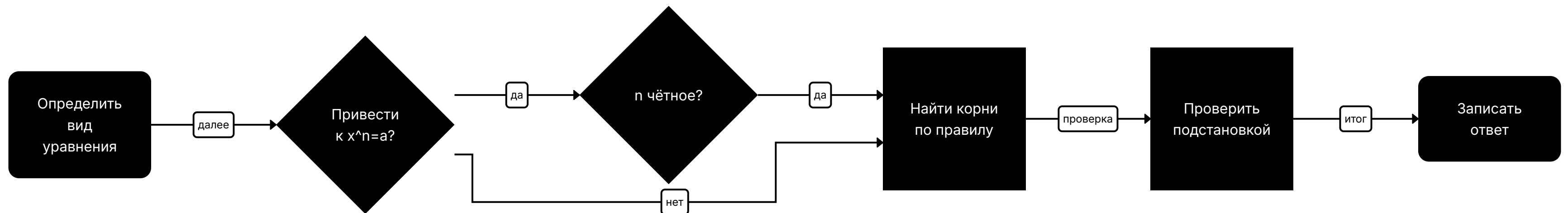
Если n нечётное, уравнение $x^n = a$ имеет один действительный корень при любом действительном a . Это связано с тем, что нечётная степень сохраняет знак числа.

3 Примеры

Уравнение $x^2 = 36$ имеет корни $x = 6$ и $x = -6$, $x^3 = -27$ даёт $x = -3$, а $x^4 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

Как решать простое степенное уравнение

Алгоритм помогает последовательно определить вид уравнения, найти корни и записать ответ.



Примеры решения уравнений со степенью

1

Квадратное уравнение

Уравнение $x^2 = 49$ имеет два действительных корня: $x = 7$ и $x = -7$. Для чётной степени всегда нужно помнить о двух возможных значениях, если правая часть положительна.

2

Кубическое уравнение

В уравнении $x^3 = 125$ один корень: $x = 5$. Нечётная степень даёт только одно действительное решение, потому что знак и порядок чисел сохраняются.

3

Сравнение оснований

Уравнение $2^x = 8$ удобно решать через одинаковые основания: $8 = 2^3$. Тогда $x = 3$, потому что одинаковые основания можно сравнивать по показателям.

4

Нулевая степень

В уравнении $3^x = 1$ подходит $x = 0$, так как любое ненулевое число в нулевой степени равно 1. Этот случай часто помогает быстро найти ответ.

Сколько действительных корней дают уравнения разных видов

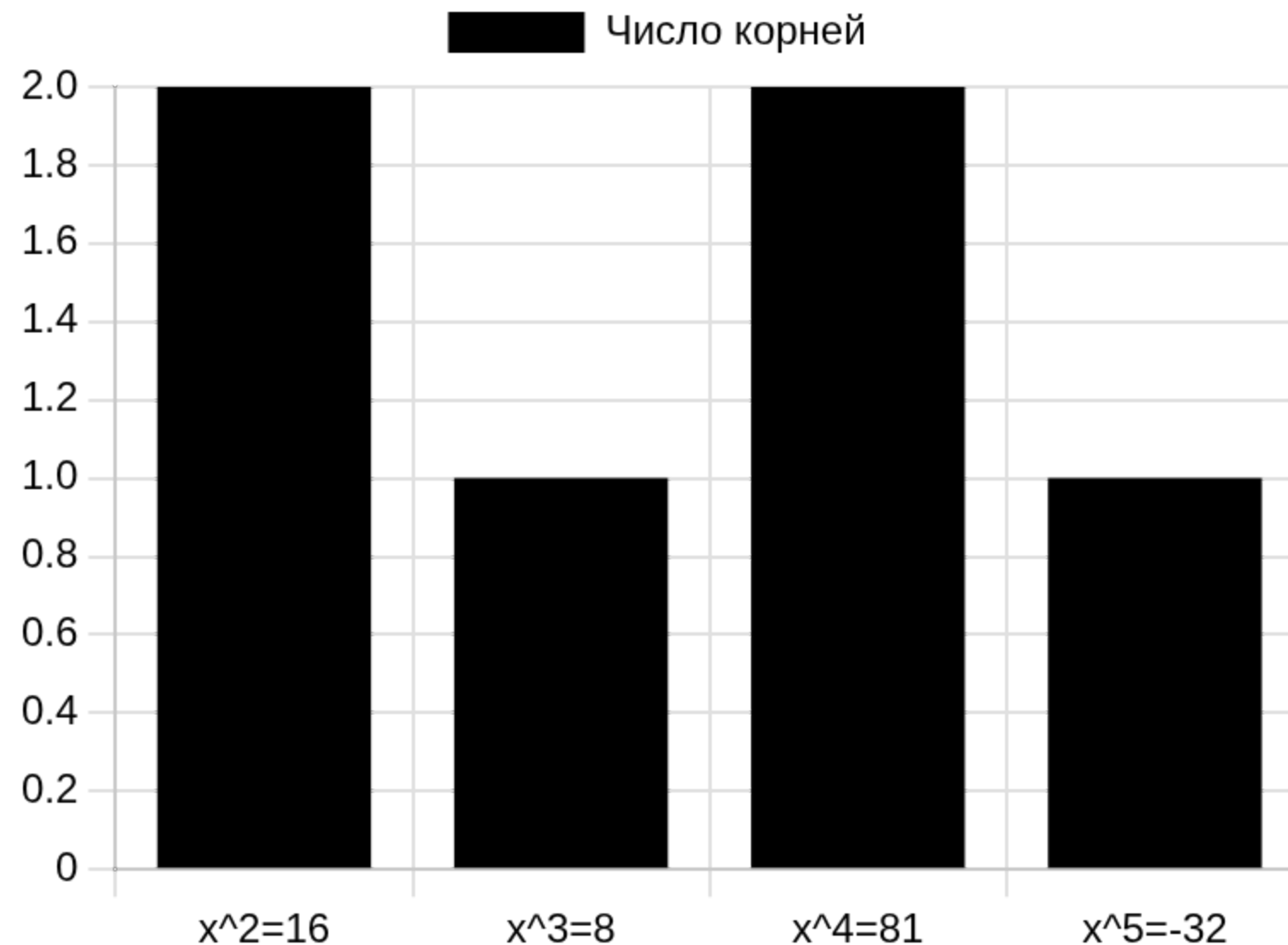


Диаграмма показывает только количество решений, а не сами значения корней. Это удобно для сравнения разных уравнений.

Чётная степень чаще даёт два корня, а нечётная — один. Число решений зависит от вида уравнения и знака правой части.

По правилам решения уравнений вида $x^n=a$, 9 класс

Неравенства со степенью: что важно для знака ответа

1 Чётная степень неотрицательна

При любой чётной степени значение выражения не может быть отрицательным. Поэтому $x^2 \geq 0$ и $x^4 \geq 0$ для любого действительного x , и это важно сразу учитывать.

2 Квадрат меньше числа

Если $x^2 < 9$, нужно искать такие значения x , при которых квадрат числа меньше 9. Ответом будет промежуток $-3 < x < 3$, а не отдельные числа.

3 Нечётная степень сохраняет знак

Для нечётной степени знак выражения совпадает со знаком основания. Поэтому $x^3 < 0$ при $x < 0$, а $x^3 > 8$ при $x > 2$, если сравнивать с кубом числа 2.

4 Ответ записывают промежутком

В неравенствах важно не только найти число, но и показать, где оно подходит. Поэтому ответ часто записывают как один промежуток или объединение нескольких промежутков.

Типовые неравенства и их решения

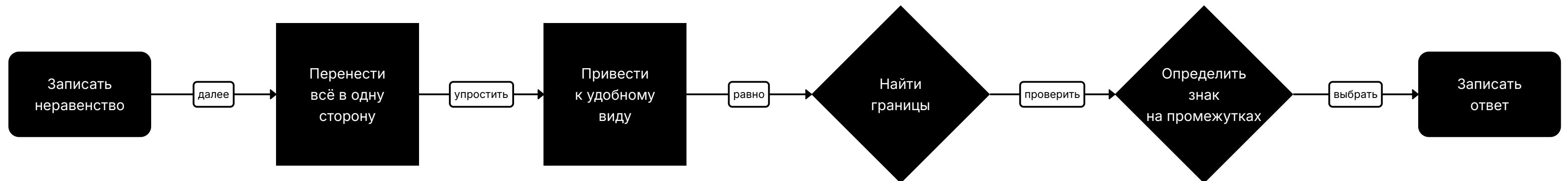
Таблица показывает самые распространённые случаи и форму ответа: один промежуток, два промежутка или отдельное значение.

При чётной степени решение часто симметрично относительно нуля или точки сдвига, а при нечётной степени знак выражения задаёт один промежуток.

Неравенство	Ответ	Форма
$x^2 < 25$	$-5 < x < 5$	1 промежуток
$x^2 \geq 16$	$x \leq -4$ или $x \geq 4$	2 промежутка
$x^3 > 8$	$x > 2$	1 промежуток
$(x-1)^2 \leq 9$	$-2 \leq x \leq 4$	1 промежуток

Как решать неравенство с квадратом

Последовательность действий при решении квадратных неравенств.



Графики функций и проверка решений

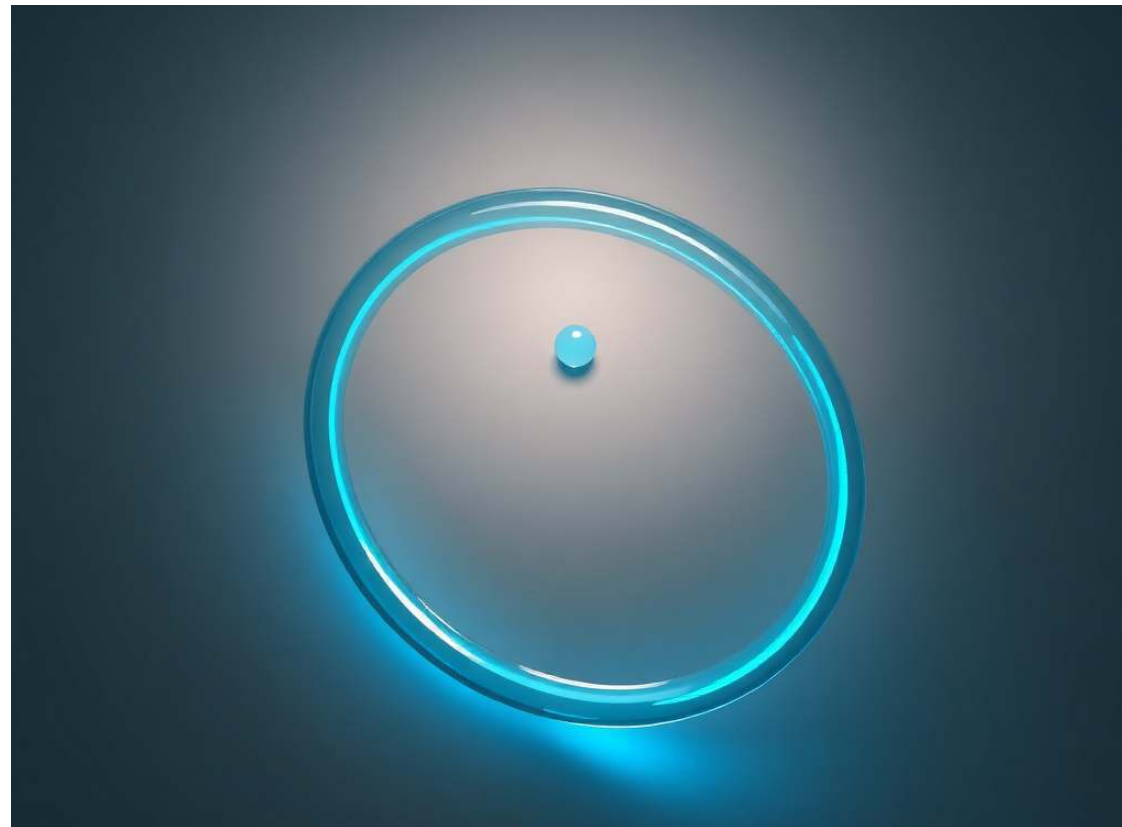
Парабола как подсказка

График $y=x^2$ открывается вверх и помогает сразу увидеть, где значение равно нулю или лежит ниже заданной прямой. Точки пересечения с горизонтальной линией показывают, сколько решений имеет уравнение и где начинается ответ неравенства.



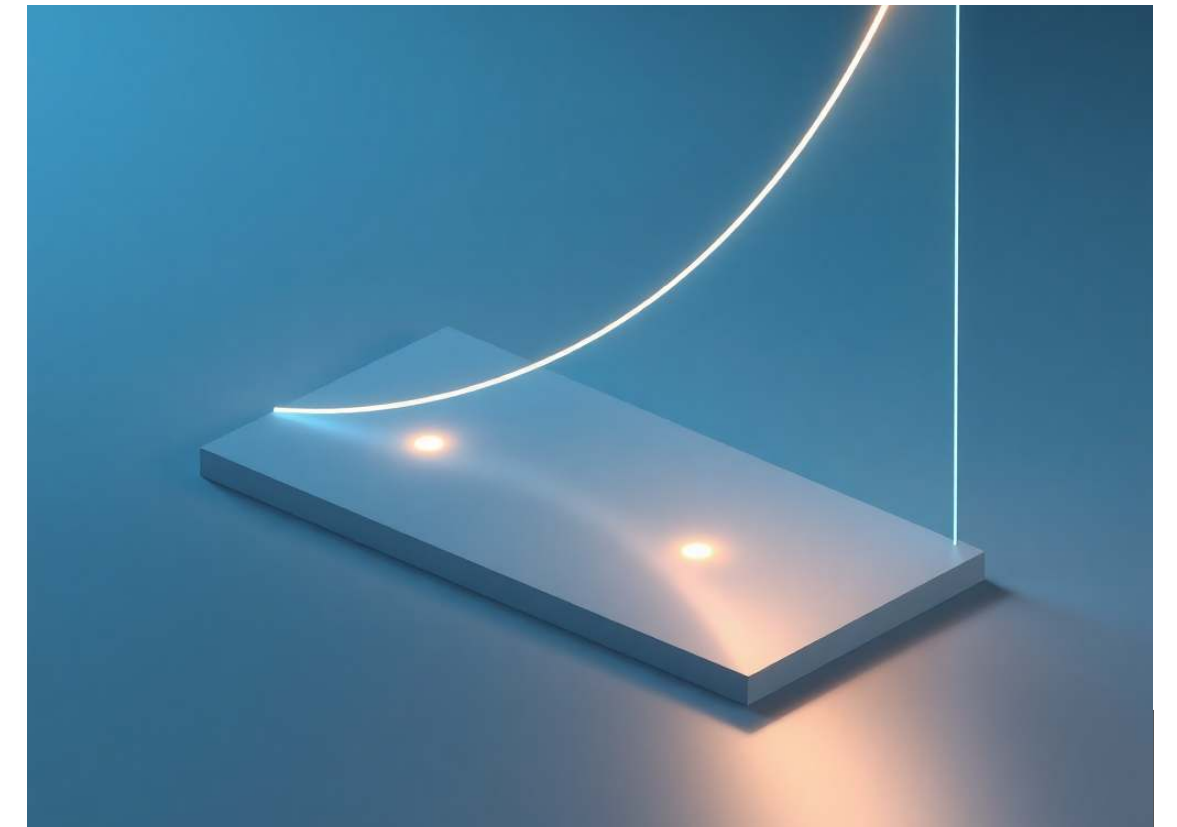
Кубическая кривая и смена знака

График $y=x^3$ проходит через начало координат и плавно переходит из отрицательных значений в положительные. По нему удобно замечать, на каких участках выражение меньше нуля, а на каких — больше, не строя длинные таблицы.

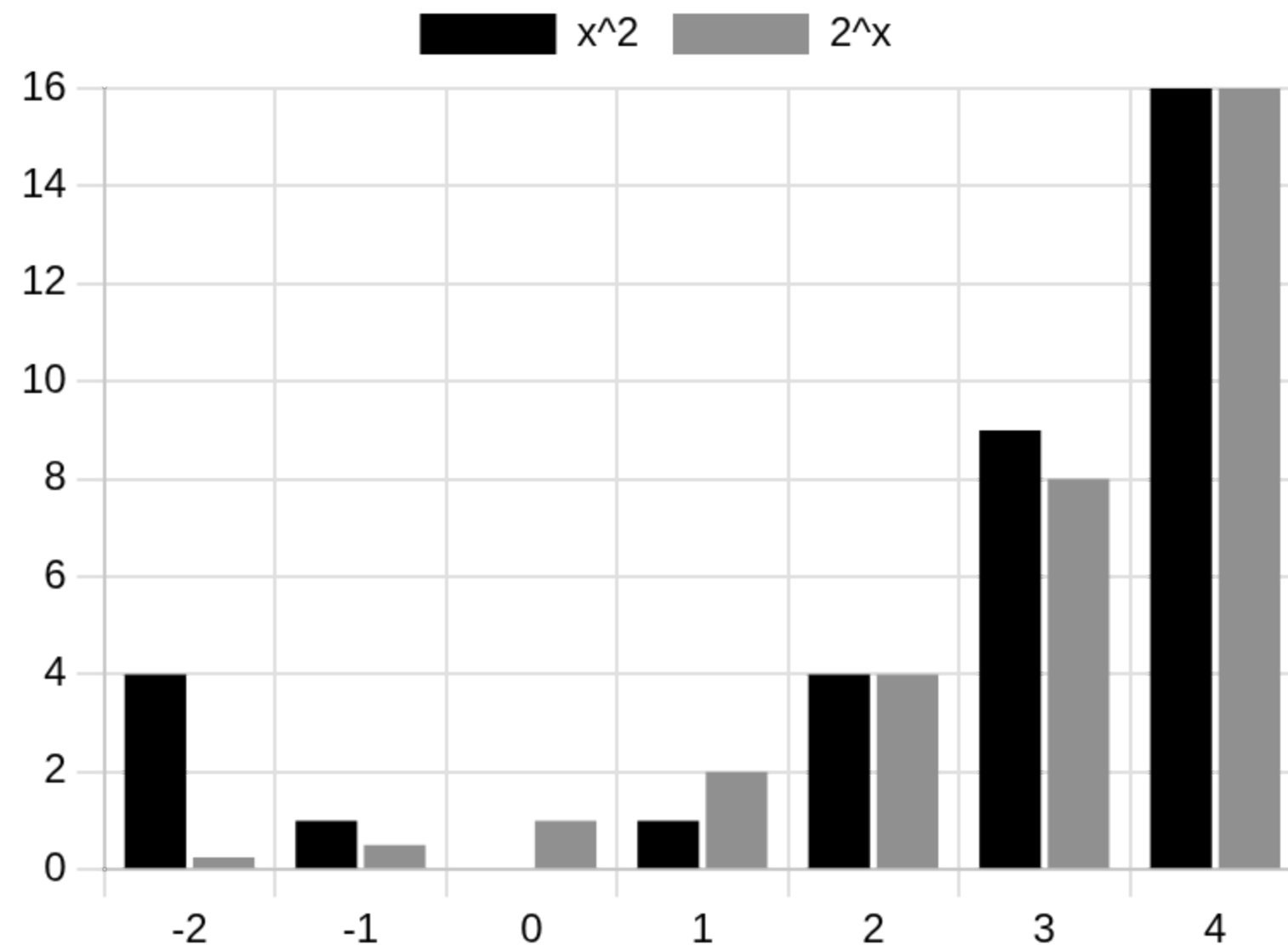


Показательная функция в действии

График $y=2^x$ быстро поднимается вверх, поэтому даже при небольшом увеличении x значения резко растут. На рисунке это видно по пересечениям с линией $y=\text{const}$: они помогают найти корни и границы промежутков.



Сравнение роста функций x^2 и 2^x



Значения показательной функции сначала меньше квадрата, но быстро догоняют и перегоняют его при увеличении x .

Для больших x функция 2^x растёт быстрее x^2 , поэтому её график становится выше на правой части координатной плоскости.

Расчёт значений по формулам x^2 и 2^x для $x=-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Частые ошибки при решении

1

Два корня забывают

При чётной степени нужно помнить о двух возможных ответах. Если $x^2=36$, то подходят и 6, и -6, потому что оба числа при возведении в квадрат дают 36.

2

Путают знак числа

Запись $(-3)^2$ означает квадрат отрицательного числа, поэтому результат равен 9. Ошибка возникает, когда минус выносят за скобки мысленно и получают неверное значение.

3

Смешивают a^2 и $-a^2$

Выражения a^2 и $-a^2$ не равны. В первом случае квадрат берётся от числа, во втором знак минус стоит перед всем квадратом, поэтому результаты могут сильно отличаться.

4

Не проверяют ОДЗ

Если в уравнении есть дроби или корни, сначала нужно учесть допустимые значения переменной. Иначе можно получить ответ, который не подходит из-за деления на ноль или отрицательного подкоренного выражения.



Проверка корней и область допустимых значений

Выражение	Условие	Проверка
$1/(x-2)^2$	$x \neq 2$	подставить
$\sqrt{x^2-9}$	$x \leq -3$ или $x \geq 3$	подставить
$x^2=4$	$x=2, -2$	оба верны
Любой ответ	ОДЗ и проверка	обязательно

Таблица напоминает: сначала проверяют ограничения на переменную, затем подставляют найденный корень в исходное выражение.

Корень считается верным только тогда, когда он удовлетворяет и уравнению, и всем ограничениям записи. Проверка подстановкой помогает избежать лишних ответов.



Где встречаются степени в реальной жизни

1 Площадь квадрата

Формула $S=a^2$ показывает, что площадь зависит от стороны не линейно, а по закону квадрата. Если сторону увеличить в 2 раза, площадь станет в 4 раза больше.

2 Объём куба

Для куба используется запись $V=a^3$. При удвоении ребра объём возрастает в 8 раз, поэтому степень удобно описывает быстрый рост размеров и результатов измерения.

3 Большие числа

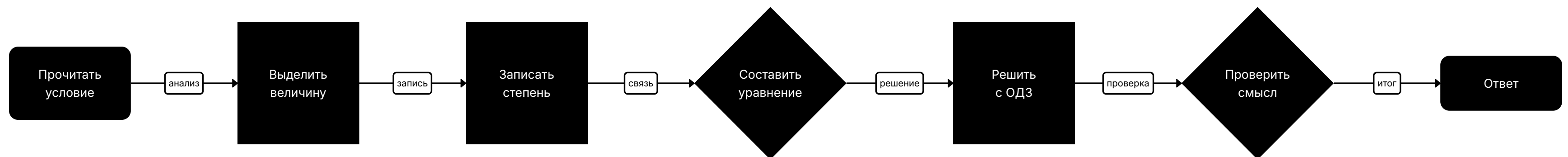
В науке и технике степени помогают записывать очень большие и очень маленькие числа. Такая запись экономит место и делает вычисления понятнее, особенно при работе с масштабами.

4 Модели роста

Степени часто встречаются в задачах, где величина изменяется повторным умножением. Это помогает описывать рост, сравнивать скорости изменения и делать выводы по условию задачи.

Переход от условия задачи к уравнению или неравенству

Общий алгоритм составления и решения степенных задач.



Краткий итог по теме

Удобный вид записи

Степень помогает коротко записывать повторное умножение и быстро переходить к уравнениям и неравенствам, где неизвестное стоит в показателе или основании.

Чётность показателя

От чётности степени зависит число решений и знак результата. Этот признак особенно важен в уравнениях вида $x^n=a$ и при сравнении значений.

Ответ в виде промежутка

Для неравенств важно не только найти числа, но и правильно записать промежутки. Иногда ответ состоит из одного отрезка, а иногда — из двух отдельных частей.

Графики помогают понять

Рисунки и графики показывают, где функция растёт, убывает, пересекает ось или заданную прямую. Это делает решение наглядным и помогает проверить себя.

Проверка обязательна

Любой найденный корень нужно проверить подстановкой и сопоставить с областью допустимых значений. Так можно избежать ошибок и лишних ответов.

Степени как опора для новых тем

Степени помогают решать уравнения и неравенства, видеть закономерности и аккуратно записывать ответ. Эти умения станут основой для дальнейшего изучения функций, графиков и более сложных преобразований.

