

Касательная к окружности: главная идея урока

Касательная имеет одну общую точку с окружностью. Разберём определения и свойства.

Зачем в 8 классе изучают касательную

Тема касательной связывает окружность с углами и длинами отрезков. В задачах её применяют в доказательствах, построениях и вычислениях. Идеи касательной легко узнать в моделях колёс, дорожных дуг и шестерён.



Определение касательной и точки касания

01

Прямая называется касательной к окружности, если она пересекает окружность ровно в одной точке. Эта единственная общая точка называется точкой касания и лежит и на прямой, и на окружности.

02

Если у прямой с окружностью две общие точки, то она является секущей: прямая «входит» в окружность и «выходит» из неё. Два пересечения дают характерный рисунок пересечения.

03

Если общих точек нет, прямая не касается окружности. Она проходит выше или ниже окружности и не имеет общей точки с кругом, даже если «рядом» с ним находится на рисунке.

Основное свойство касательной

01

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. То есть угол между радиусом и касательной в точке касания всегда равен 90° . Это помогает быстро находить углы.

02

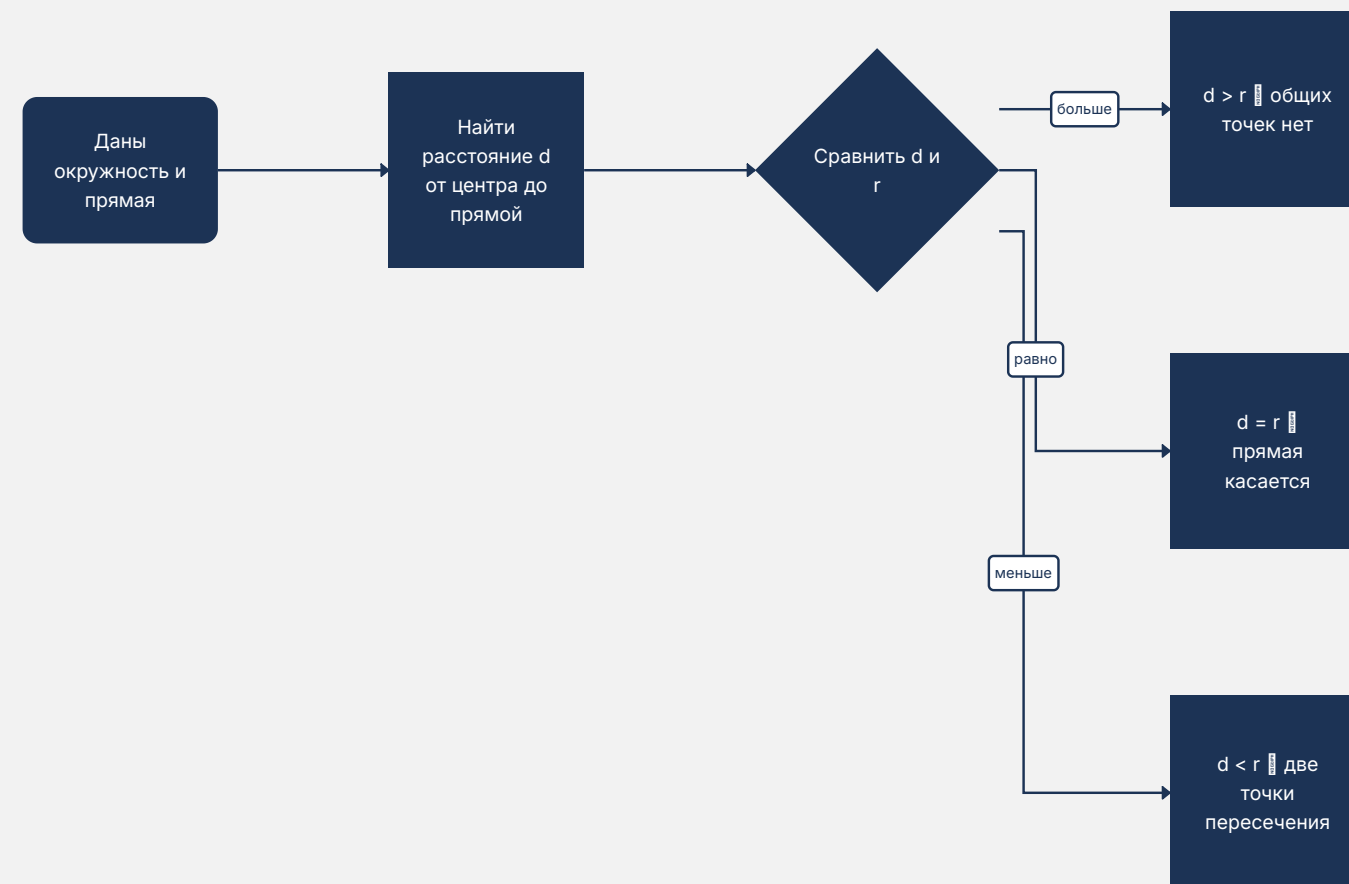
Обратное утверждение также верно: если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая касательна. Значит, проверка сводится к прямому углу.

03

Именно это свойство чаще всего используют в задачах: находят радиус или расстояния, доказывают перпендикулярность и затем определяют, касательная ли данная прямая.

Проверка: касательная ли прямая?

Сравниваем расстояние от центра окружности до прямой с радиусом и выбираем случай.



1

В точке касания радиус задаёт единственный перпендикуляр, поэтому касательная получается единственной.

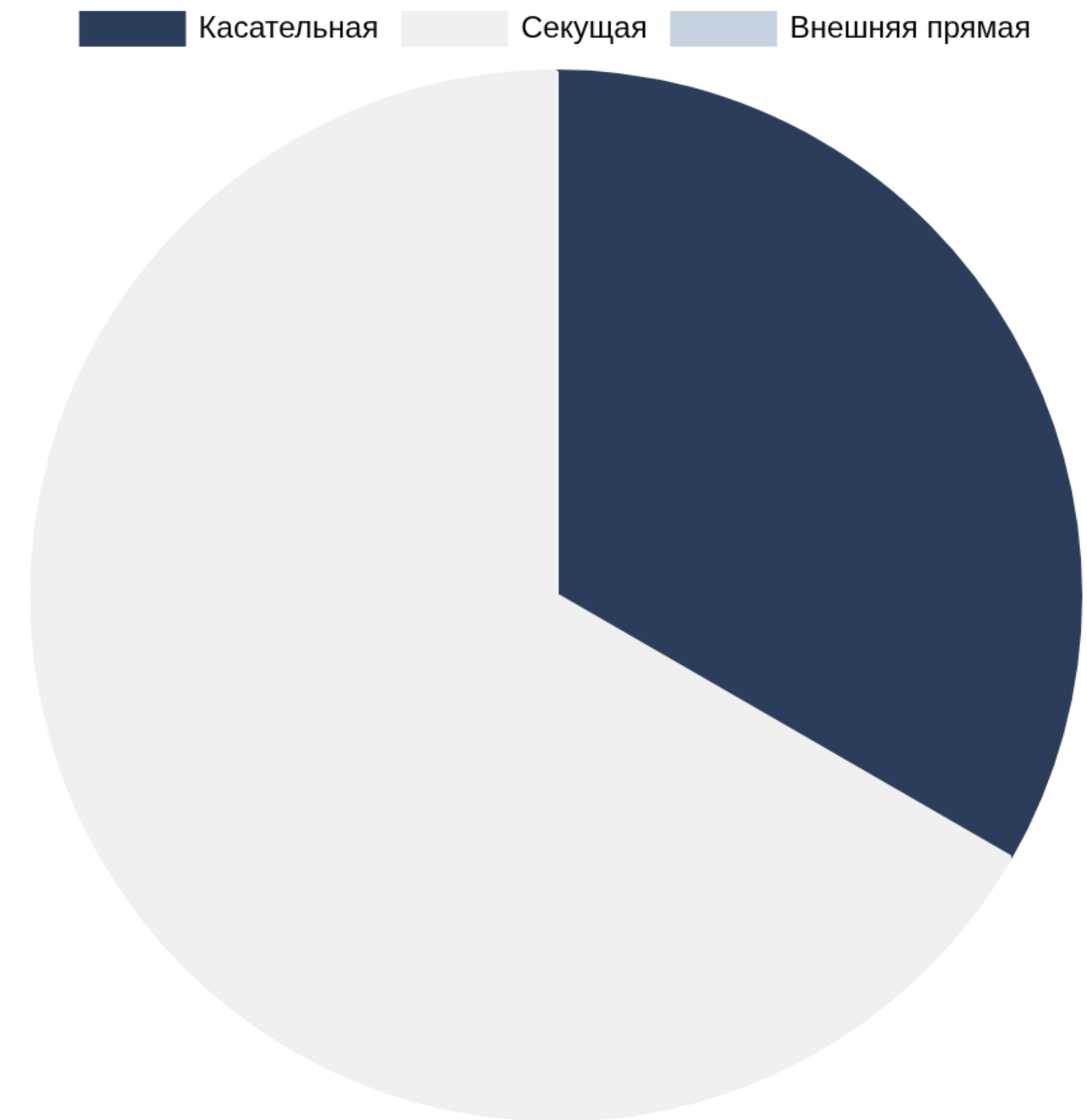
Через заданную точку окружности можно провести только одну касательную: перпендикуляр к радиусу в этой точке единственный. Поэтому касательная в точке касания всегда одна.

Свойство единственного перпендикуляра к прямой через точку (геометрический факт)

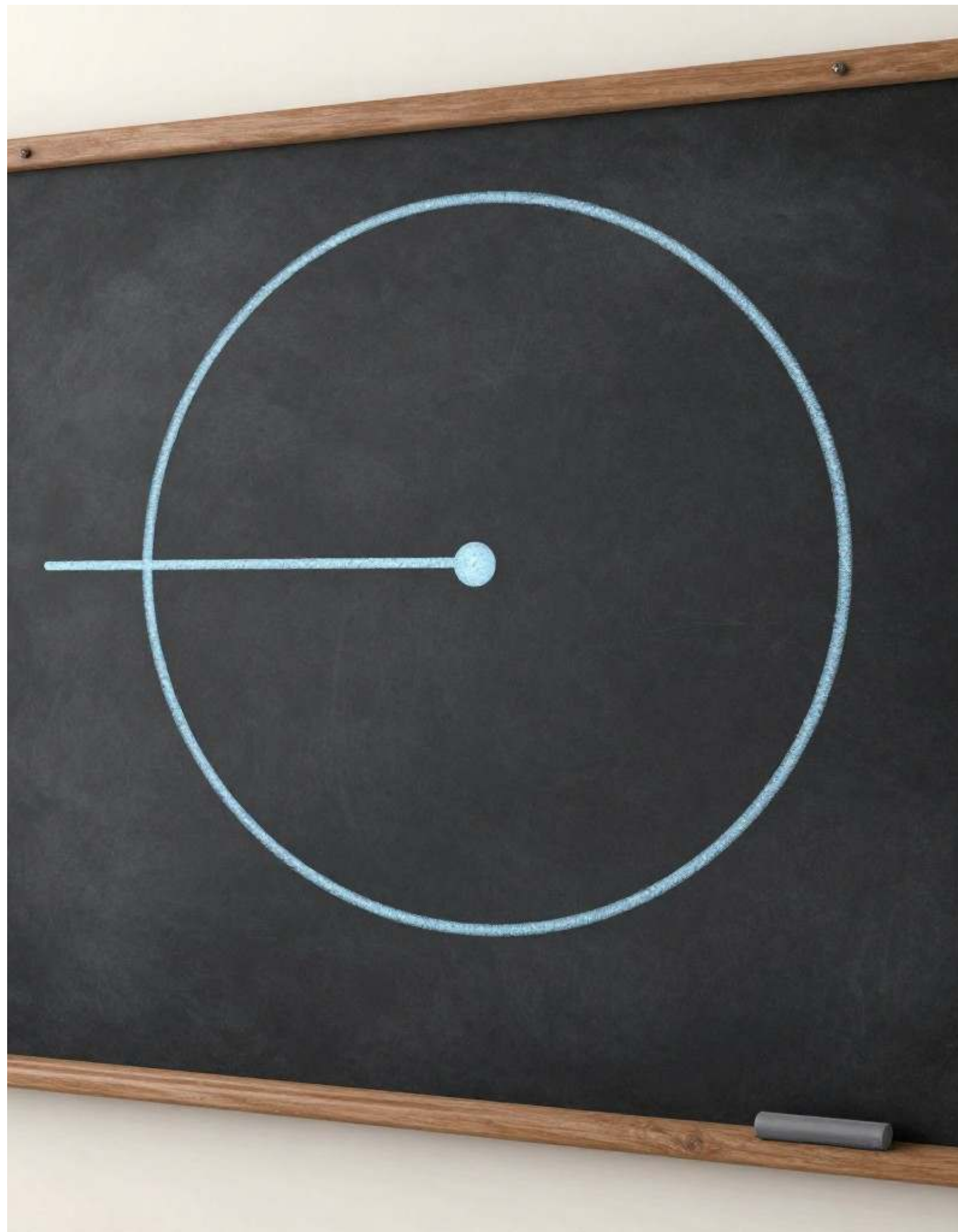
Взаимное расположение прямой и окружности

Касательная выделяется тем, что прямой «достаточно коснуться» окружности: общая точка одна, а радиус в точке касания перпендикулярен прямой.

Сравнение трёх случаев показывает логику: сколько общих точек получается при пересечении, столько и «ведущих» геометрических свойств мы используем в решении.



Учебная схема: число общих точек прямой и окружности



Элементы рисунка: центр, радиус и точка касания

Центр и радиус в точку касания

На схеме отмечают центр окружности и точку на окружности — точку касания. Из центра проводят радиус к этой точке: он является ключевой «линией связи» между окружностью и касательной прямой.

Перпендикуляр и обозначения на схеме

Касательная прямая проходит через точку касания и образует прямой угол с радиусом. Обычно на рисунке это подчёркивают маленьким квадратом, а рядом ставят подписи: точка касания и радиус.

Касательные из одной внешней точки

Отрезки касательных от внешней точки до точек касания равны: $PA = PB$. Это свойство позволяет находить неизвестные длины без лишних вычислений.

01

Если точка P находится вне окружности, из неё можно провести две касательные. Они касаются окружности в двух разных точках, обычно обозначают их как A и B .

02

03

Расположение двух касательных симметрично относительно прямой, проходящей через точку P и центр окружности. Поэтому на рисунке касательные «повторяют» друг друга по направлению.

Сравнение касательной, секущей и внешней прямой

Сравнение помогает быстро определить нужное свойство: касательная даёт один общий пункт и перпендикулярность радиусу, секущая — два пересечения, а внешняя прямая — ни одного.

Главный ориентир: если есть ровно одна общая точка, то прямая касательная, и тогда радиус в эту точку перпендикулярен.

Тип прямой	Общих точек	Связь с радиусом
Касательная	1	Радиус $\perp$ прямой
Секущая	2	Радиус не перпендикулярен
Внешняя прямая	0	Пересечений нет

Как находят длину касательной

01

Пусть из внешней точки P к окружности проведена касательная PA . Опускаем радиус OA в точку касания A — он перпендикулярен касательной, образуя прямоугольный треугольник OAP .

02

В треугольнике OAP катет OA равен радиусу r . Второй катет OP — это расстояние от внешней точки до центра. Тогда отрезок PA можно найти как гипотенузу по теореме Пифагора.

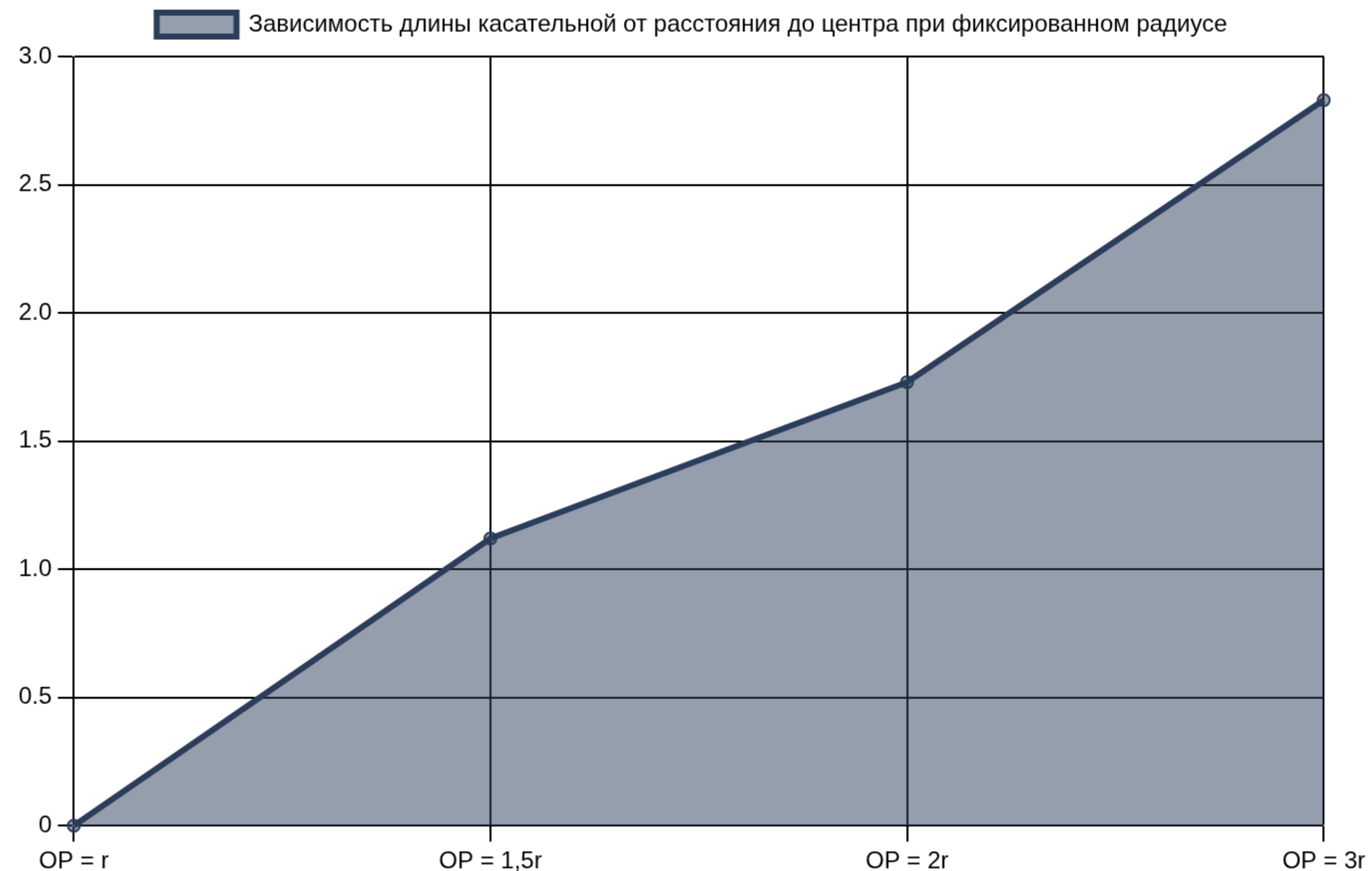
03

Получится формула $PA = \sqrt{OP^2 - r^2}$. Она применяется, когда в условии даны OP и радиус, а нужно вычислить длину касательной или проверить найденный ответ.

Как меняется длина касательной при удалении от центра

Если радиус фиксирован, то длина касательной растёт вместе с OP , потому что в формуле $\sqrt{OP^2 - r^2}$ увеличивается разность под корнем.

График показывает: при приближении внешней точки к окружности касательная «укорачивается» и стремится к нулю; чем дальше точка, тем длиннее отрезок до точки касания.



Построено по теоретической зависимости из теоремы Пифагора: $PA = \sqrt{OP^2 - r^2}$. Значения рассчитаны для примера при $r = 1$.

Угол между касательной и хордой

01

Рассмотрим касательную в точке касания A и хорду AB . Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, который опирается на ту же дугу.

02

Это означает: вместо того чтобы «считать касательную», можно искать нужный угол в окружности через известные равенства углов. Угол берётся в треугольнике с вершиной на окружности.

03

В задачах часто встречается приём: находят один угол, затем используют равенство углов, опирающихся на одну дугу, и находят остальные углы в треугольниках и четырёхугольниках.

Теорема о двух касательных

01

Если из одной внешней точки P к окружности проведены две касательные и они касаются в точках A и B , то отрезки касательных равны.

02

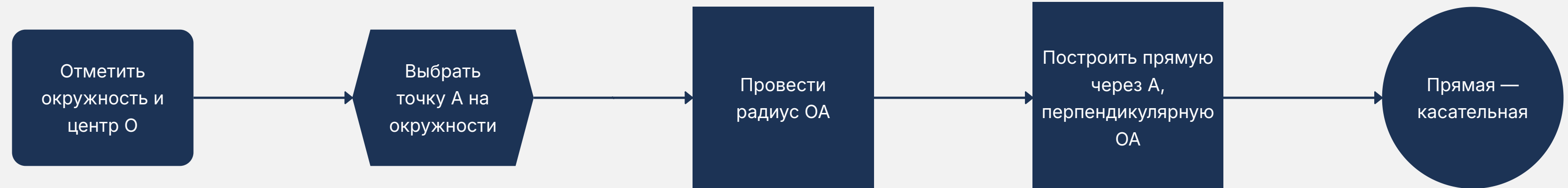
Запишем это так: $PA = PB$. Смысл теоремы в том, что касательная «ведёт себя симметрично» относительно положения точки P и радиусов в точках касания.

03

Свойство удобно для вычислений: можно найти неизвестный отрезок, если известен другой. Также оно помогает доказывать равенство треугольников в решениях задач.

Построение касательной к окружности в точке

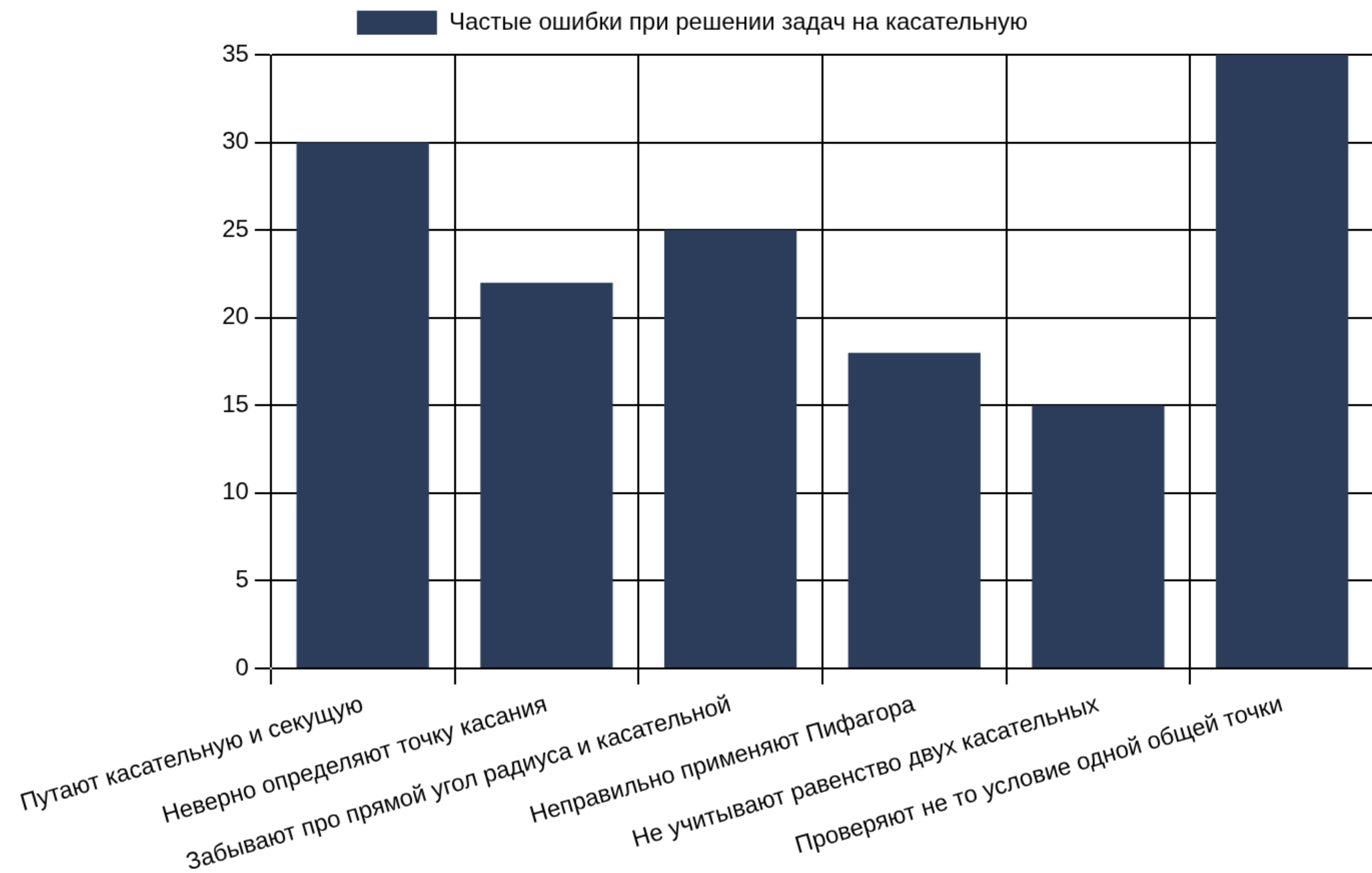
Алгоритм построения по условию: касательная проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку.



Типичные ошибки при решении задач на касательную

Перед вычислениями сначала проверьте геометрию: касательная должна иметь ровно одну общую точку и быть перпендикулярна радиусу в точке касания.

Самый рискованный этап — неверная проверка «одной общей точки». Если это условие не выполнено, остальные выводы становятся ошибочными независимо от формул.



Обобщение типичных ошибок, встречающихся в школьных решениях (качественная диаграмма, без привязки к конкретному статистическому сбору).

Касательная в окружающем мире



Колесо и линия контакта

В момент касания колеса с дорогой точка соприкосновения напоминает «точку касания» окружности. Линия контакта идёт так, что радиус, проведённый к этой точке, становится перпендикулярен направлению касания. Поэтому траектория движения получается ровной и предсказуемой.



Детали механизма и касание дуг

При вращении шестерён или колёс на поверхностях появляется «линия» касания, которая меняет направление движения без проскальзывания. Геометрия касательной помогает понять, где детали соприкасаются и почему важен прямой угол между радиусом и касательной в момент контакта.

Главные формулы и свойства темы

Ситуация	Формула/свойство	Что даёт в задаче
Касательная в А	$OA \perp \text{касательная}$	Быстро проверять и доказывать касание
Из точки Р две касательные	$PA = PB$	Находить неизвестные отрезки
Касательная и хорда	$\angle$ между касательной и хорда = вписанному углу	Искать углы через дуги
Длина касательной	$PA = \sqrt{OP^2 - r^2}$	Вычислять длину отрезка
Проверка касания по расстоянию	$d(\text{центр, прямая}) = r$	Решать геометрические задачи без лишних построений

Таблица собрала опорные утверждения, которые чаще всего используют при решении задач про касательную: перпендикулярность, две равные касательные, углы и формула длины.

Ключ к решению — сначала установить тип отношения «радиус—касательная—дуга». После этого углы и длины находятся по единому набору формул.

Как распознать задачу на касательную



Одна общая точка

Если прямая касается окружности, у неё с окружностью ровно одна общая точка. Именно это условие часто прямо указано или подразумевается в рисунке.



Прямой угол с радиусом

В точке касания радиус, проведённый к этой точке, перпендикулярен касательной. Поэтому можно ожидать отметку 90° или выводить её самостоятельно.



Две касательные равны

Когда от внешней точки проводят две касательные, соответствующие отрезки до точек касания равны. Это помогает находить неизвестные длины без сложных вычислений.



Угол с хордой

Если в условии фигурируют касательная и хорда, часто требуется использовать равенство углов: угол между касательной и хордой равен вписанному углу.

Касательная: кратко о главном

Касательная к окружности имеет одну общую точку с окружностью. Радиус в точку касания перпендикулярен касательной, из внешней точки можно провести две равные касательные — это основа для углов и вычислений.