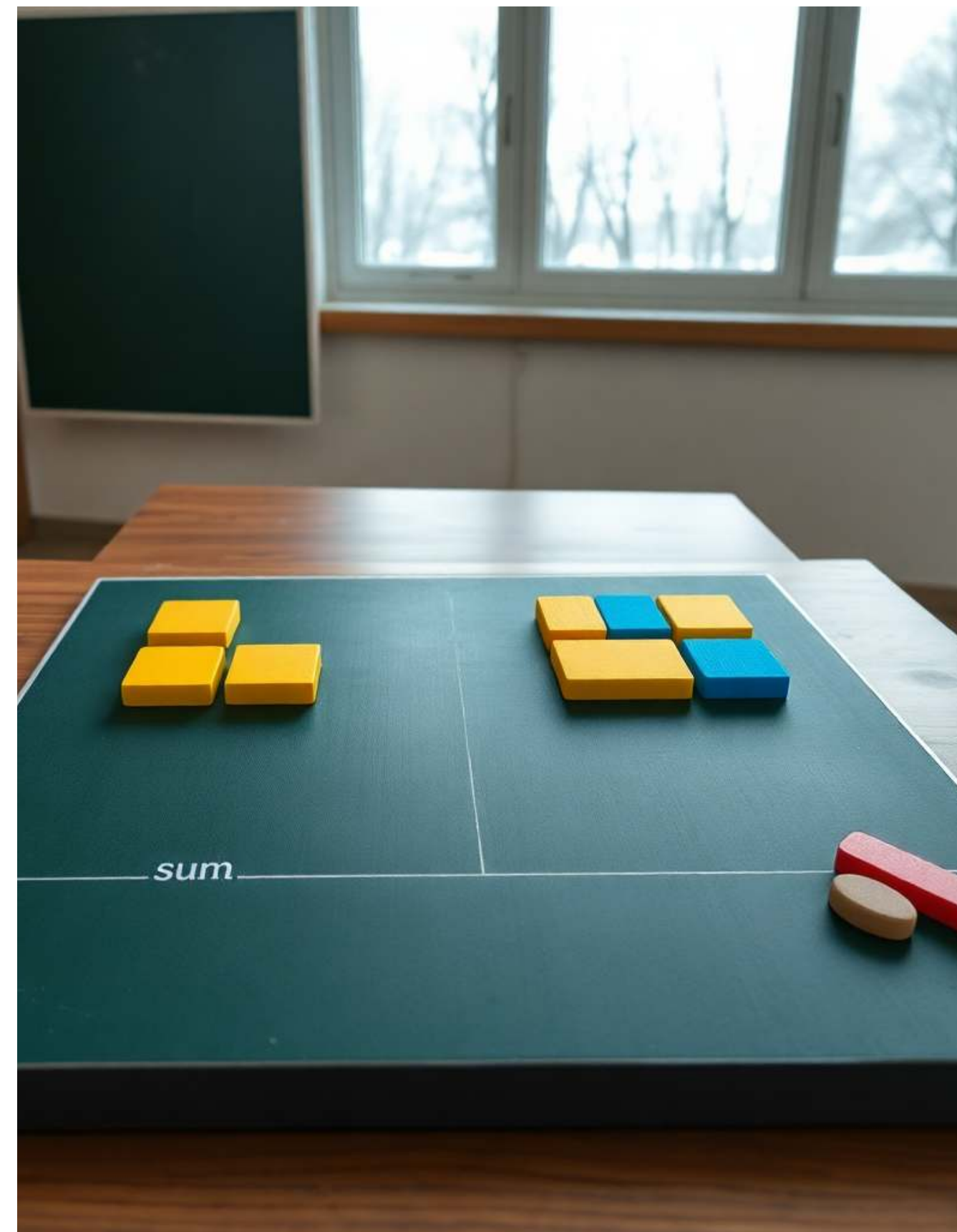


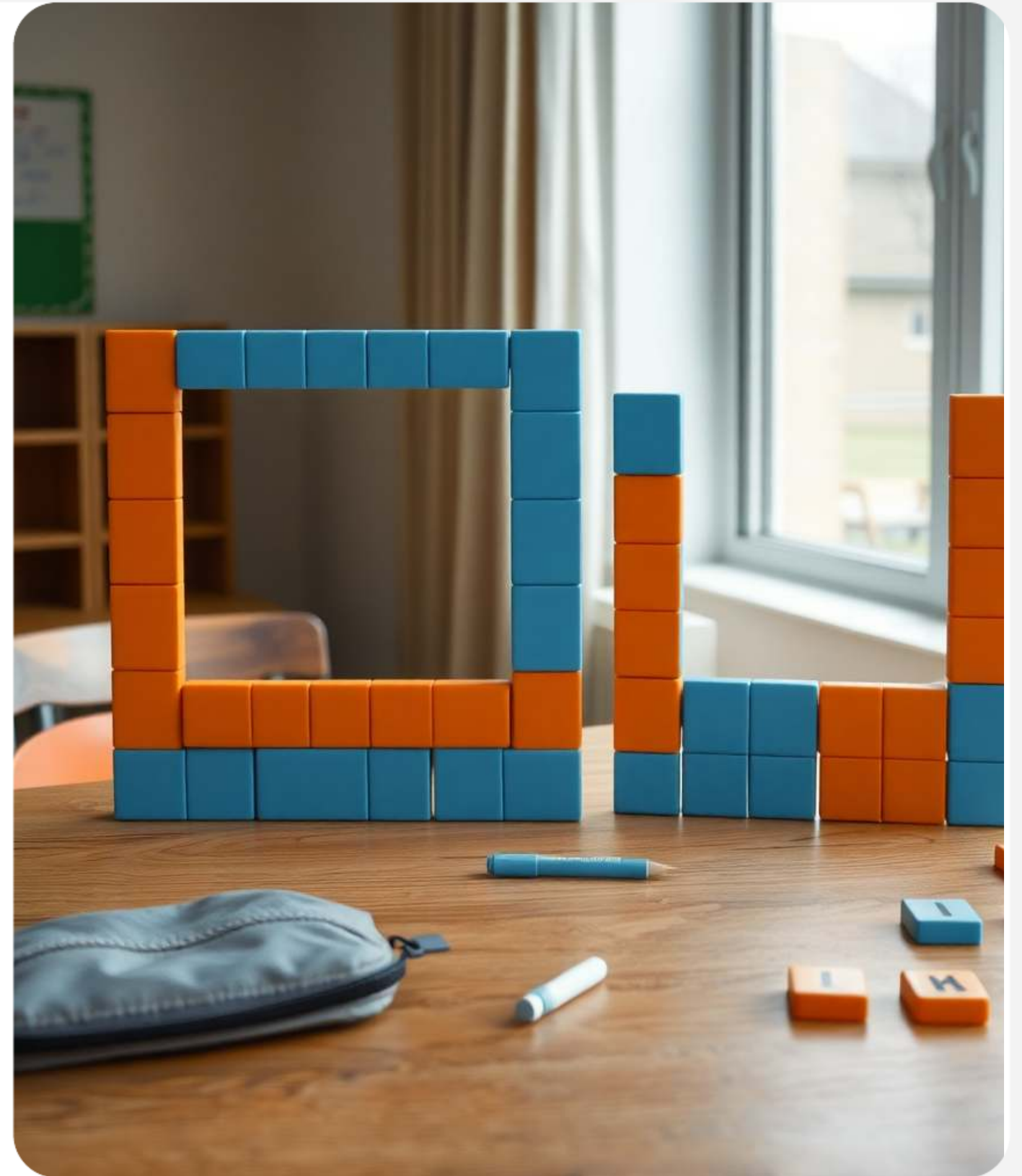
Преобразование выражений: квадрат суммы и квадрат разности

Изучаем две главные формулы и их применение.



Зачем нужны эти формулы в 7 классе

Формулы квадрата суммы и разности помогают быстрее раскрывать скобки, упрощать выражения и проверять вычисления. Они экономят время и позволяют сразу узнавать знакомый вид многочлена.



Формула квадрата суммы

1

Запись формулы

Квадрат суммы двух выражений записывают как $(a+b)^2$. Это означает произведение двух одинаковых скобок: $(a+b)(a+b)$, которое нужно раскрыть по правилам умножения двучленов.

2

Перемножение слагаемых

Каждый член первой скобки умножается на каждый член второй: $a \cdot a$, $a \cdot b$, $b \cdot a$ и $b \cdot b$. Так появляются четыре произведения, из которых складывается весь результат.

3

Появление средних членов

Произведения ab и ba равны, поэтому их можно объединить. После приведения подобных членов получается $2ab$, то есть удвоенное произведение двух выражений в середине формулы.

4

Итоговый вид

В итоге квадрат суммы принимает вид $a^2 + 2ab + b^2$. В этой записи первый и последний члены — квадраты, а средний член показывает сумму двух одинаковых произведений.

Формула квадрата разности

Исходная запись

Квадрат разности записывают как $(a-b)^2$. Это произведение двух одинаковых скобок $(a-b)$ $(a-b)$, поэтому при раскрытии нужно внимательно учитывать знак минус.

Четыре произведения

При умножении получаются $a \cdot a$, $a \cdot (-b)$, $(-b) \cdot a$ и $(-b) \cdot (-b)$. Первое и последнее произведения остаются положительными, а два средних содержат минус.

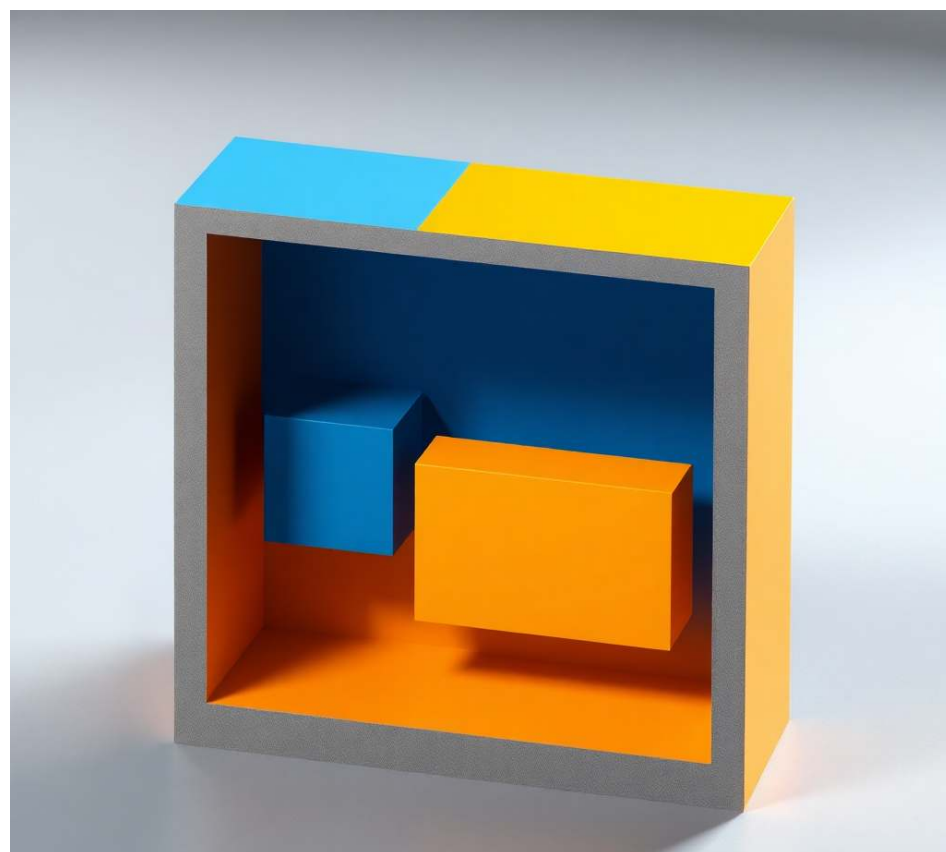
Удвоенное произведение

Произведения $a \cdot (-b)$ и $(-b) \cdot a$ равны, поэтому после приведения подобных членов они дают $-2ab$. Именно этот знак отличает формулу квадрата разности от квадрата суммы.

Финальный результат

После раскрытия скобок получается $a^2 - 2ab + b^2$. В этой формуле минус стоит только перед средним членом, а крайние части записываются как квадраты.

Геометрический смысл формул



Квадрат со стороной $a+b$

Если сторона квадрата равна $a+b$, его площадь выражается формулой $(a+b)^2$. Такой квадрат можно мысленно разделить на четыре части: два квадрата и два одинаковых прямоугольника. Именно поэтому появляется член $2ab$.



Почему возникает удвоение

Два прямоугольника имеют одинаковые размеры a и b , поэтому их площади равны. Вместе они дают $2ab$, что точно соответствует среднему члену в формуле квадрата суммы. Геометрия помогает увидеть, откуда берётся каждый элемент.



Разность и знак в середине

Для квадрата разности идея похожа: меняется только длина одной стороны и, следовательно, знак среднего члена. Это показывает, что формулы связаны не только алгебраически, но и через наглядный образ площади.

Строение формул и роль знака

1

Начало и конец

Обе формулы начинаются с квадрата первого выражения и заканчиваются квадратом второго. Это помогает сразу заметить общую структуру и не перепутать порядок слагаемых.

2

Средний член

В середине всегда стоит удвоенное произведение выражений. Оно показывает связь между двумя частями формулы и служит главным признаком, по которому узнают квадрат двучлена.

3

Знак сложения

Если в скобках стоит плюс, средний член тоже положительный: $a^2 + 2ab + b^2$. Этот знак указывает, что два одинаковых произведения складываются, а не вычитаются.

4

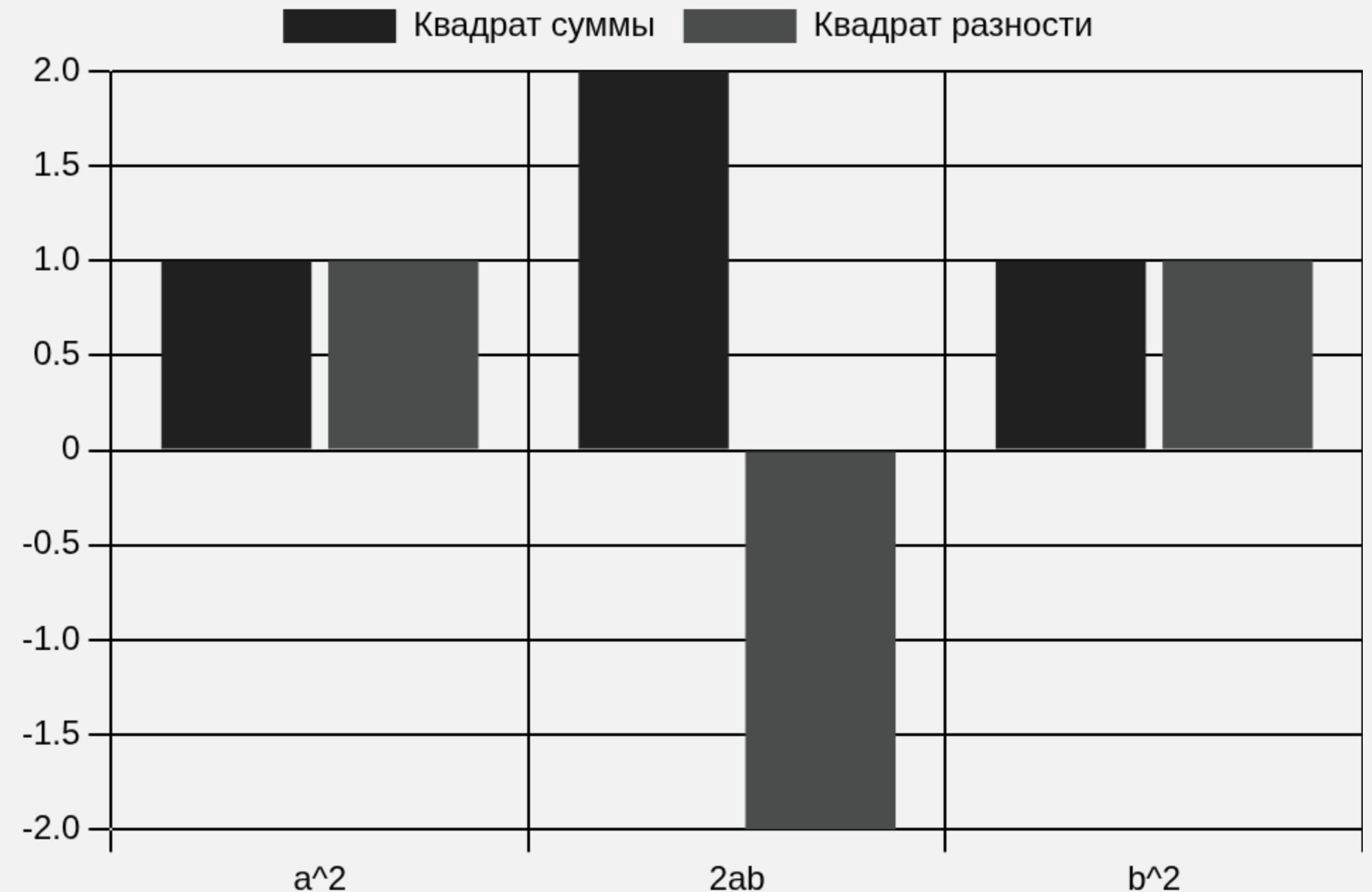
Знак вычитания

Если в скобках стоит минус, средний член становится отрицательным: $a^2 - 2ab + b^2$. Здесь важно помнить, что меняется только знак среднего члена, а крайние части остаются квадратами.

Сравнение формул квадрата суммы и квадрата разности

На диаграмме видно: крайние части совпадают, а различие сосредоточено в среднем члене.

Одна смена знака меняет всю формулу, поэтому именно средний член нужно проверять особенно внимательно.



Как раскрывается квадрат суммы по шагам

1. Записываем произведение

Выражение $(a+b)^2$ заменяем произведением $(a+b)(a+b)$. Так становится видно, что нужно умножать каждое слагаемое первой скобки на каждое слагаемое второй.

2. Первые произведения

Получаем $a \cdot a$, $a \cdot b$, $b \cdot a$ и $b \cdot b$. Каждое действие выполняется отдельно, чтобы не пропустить ни одного слагаемого при раскрытии скобок.

3. Собираем результаты

После умножения записываем a^2 , ab , ba и b^2 . Эти части пока не объединены, поэтому выражение ещё можно упростить, если заметить одинаковые произведения.

4. Приводим подобные

Произведения ab и ba равны, значит их можно сложить. В результате получается $a^2 + 2ab + b^2$ — стандартный вид квадрата суммы.

Как раскрывается квадрат разности по шагам

1

Переход к произведению

Записываем $(a-b)^2$ как $(a-b)(a-b)$. Это помогает рассматривать выражение как обычное умножение двух одинаковых скобок и внимательно следить за знаком минус.

2

Умножаем по частям

Получаем $a \cdot a$, $a \cdot (-b)$, $(-b) \cdot a$ и $(-b) \cdot (-b)$. Здесь особенно важно не забыть, что минус действует на b в обеих скобках.

3

Собираем выражение

После вычислений получается $a^2 - ab - ab + b^2$. Два одинаковых отрицательных произведения стоят рядом, поэтому их удобно объединить в один средний член.

4

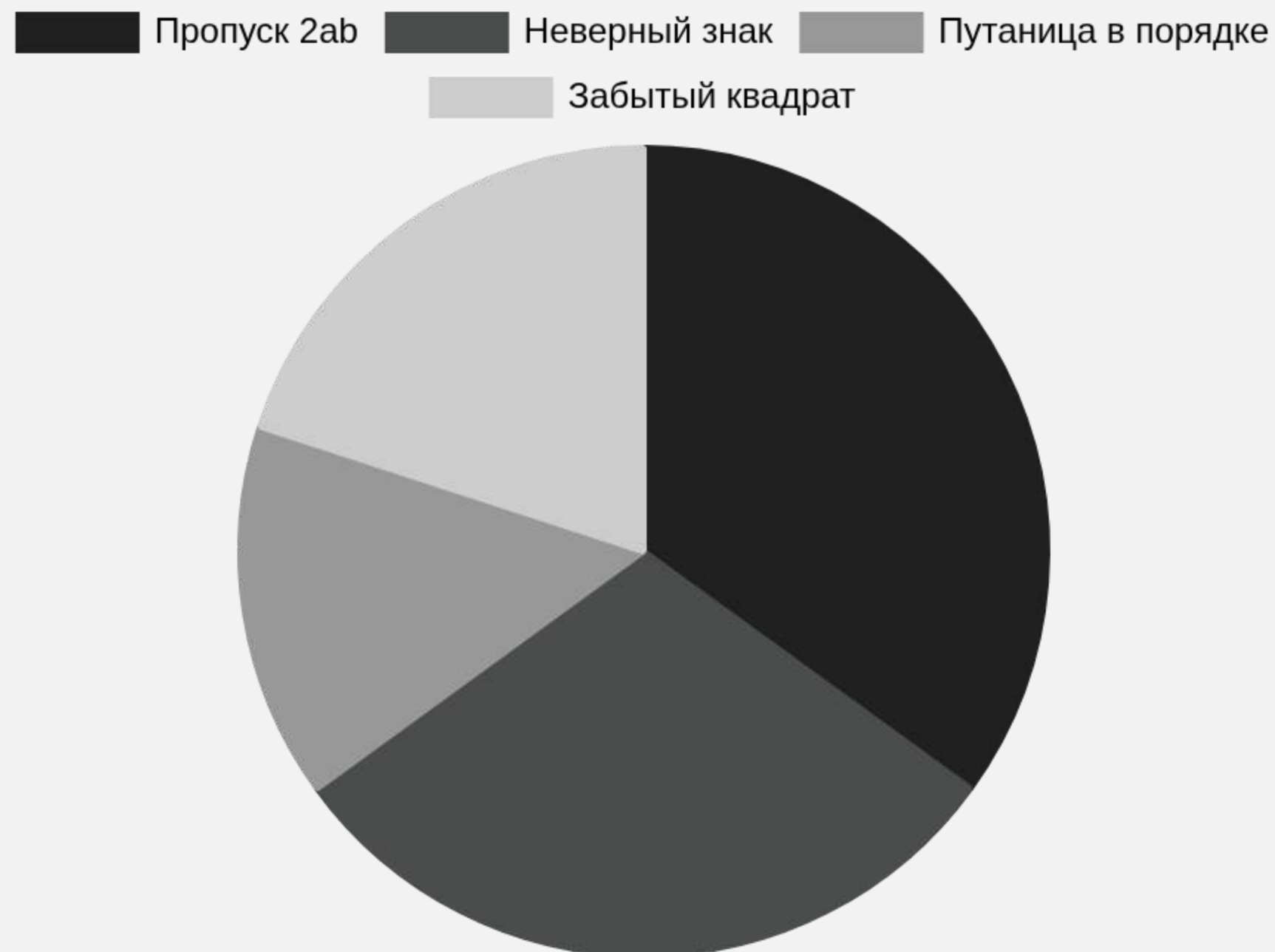
Итоговая формула

После приведения подобных членов выходит $a^2 - 2ab + b^2$. Положительными остаются только крайние части, а середина обязательно содержит минус.

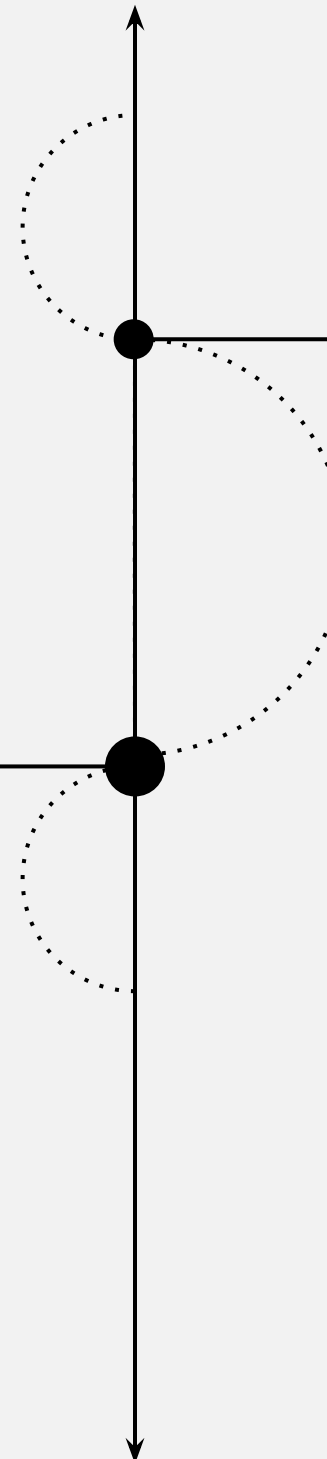
Частые ошибки при использовании формул

Диаграмма показывает, какие неточности встречаются чаще всего при записи и проверке формул.

Сначала нужно проверить средний член, затем крайние квадраты: так проще заметить большинство ошибок.



Проверка формул на числовых примерах



Первый пример: сумма

Подставляем числа в выражение $(3+5)^2$ и получаем $8^2 = 64$. Затем считаем по формуле: $3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64$.

Второй пример: разность

Теперь проверяем $(7-2)^2$: сначала получаем $5^2 = 25$. По формуле выходит $7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2^2 = 49 - 28 + 4 = 25$.

Как формулы помогают преобразовывать выражения

1

Узнаём знакомый вид

Когда в выражении видны квадрат первого и последнего слагаемого и средний член, его можно быстро сравнить с формулами квадрата суммы или разности.

2

Проверяем средний член

Если крайние члены дают квадраты x^2 и 9, а средний член равен $6x$, выражение удобно записать как $(x+3)^2$, потому что $6x = 2 \cdot x \cdot 3$.

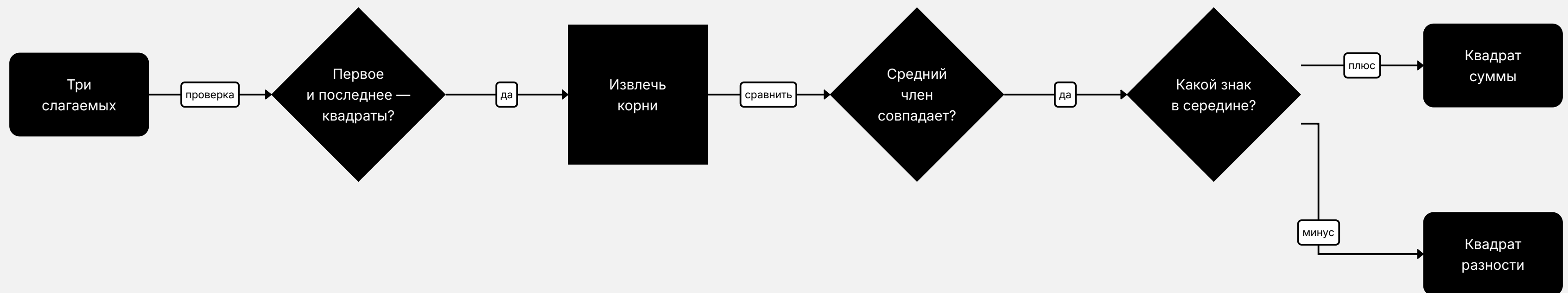
3

Свертываем трёхчлен

Аналогично, выражение $y^2 - 10y + 25$ превращается в $(y-5)^2$: здесь 25 — это 5^2 , а средний член совпадает с $-2 \cdot y \cdot 5$.

Как распознать квадрат двучлена

Последовательность признаков помогает проверить, можно ли представить трёхчлен как квадрат суммы или разности.



Обратное преобразование: из трёхчлена в квадрат

Узнаваемая форма

Если многочлен имеет вид $a^2+2ab+b^2$ или $a^2-2ab+b^2$, его можно записать короче — как квадрат двучлена. Это упрощает дальнейшие преобразования.

Проверка по признакам

Чтобы не ошибиться, нужно убедиться, что крайние члены действительно являются квадратами, а средний член соответствует удвоенному произведению выбранных корней.

Польза для вычислений

Свернутая запись помогает быстрее считать, легче сравнивать выражения и аккуратно проверять ответ после раскрытия скобок. Особенно это удобно в школьных задачах.

Соответствие между многочленами и квадратами двучленов

Примеры показывают, как по крайним членам и среднему члену распознавать квадрат двучлена.

Крайние члены задают квадраты, а средний член показывает знак и величину удвоенного произведения.



Многочлен	Квадрат
$x^2+8x+16$	$(x+4)^2$
$x^2-12x+36$	$(x-6)^2$
$4a^2+20a+25$	$(2a+5)^2$
$9y^2-30y+25$	$(3y-5)^2$

2

похожих на круглые числа,
достаточно, чтобы быстро раскрыть
квадрат и проверить результат
без длинного умножения.

Примеры преобразования чисел $49^2 = (50-1)^2$ и $101^2 = (100+1)^2$

Формулы особенно полезны, когда число
близко к круглому. Тогда вычисление
можно разложить на удобные части
и сделать устно быстрее.

Связь с квадратным трёхчленом

Особый вид

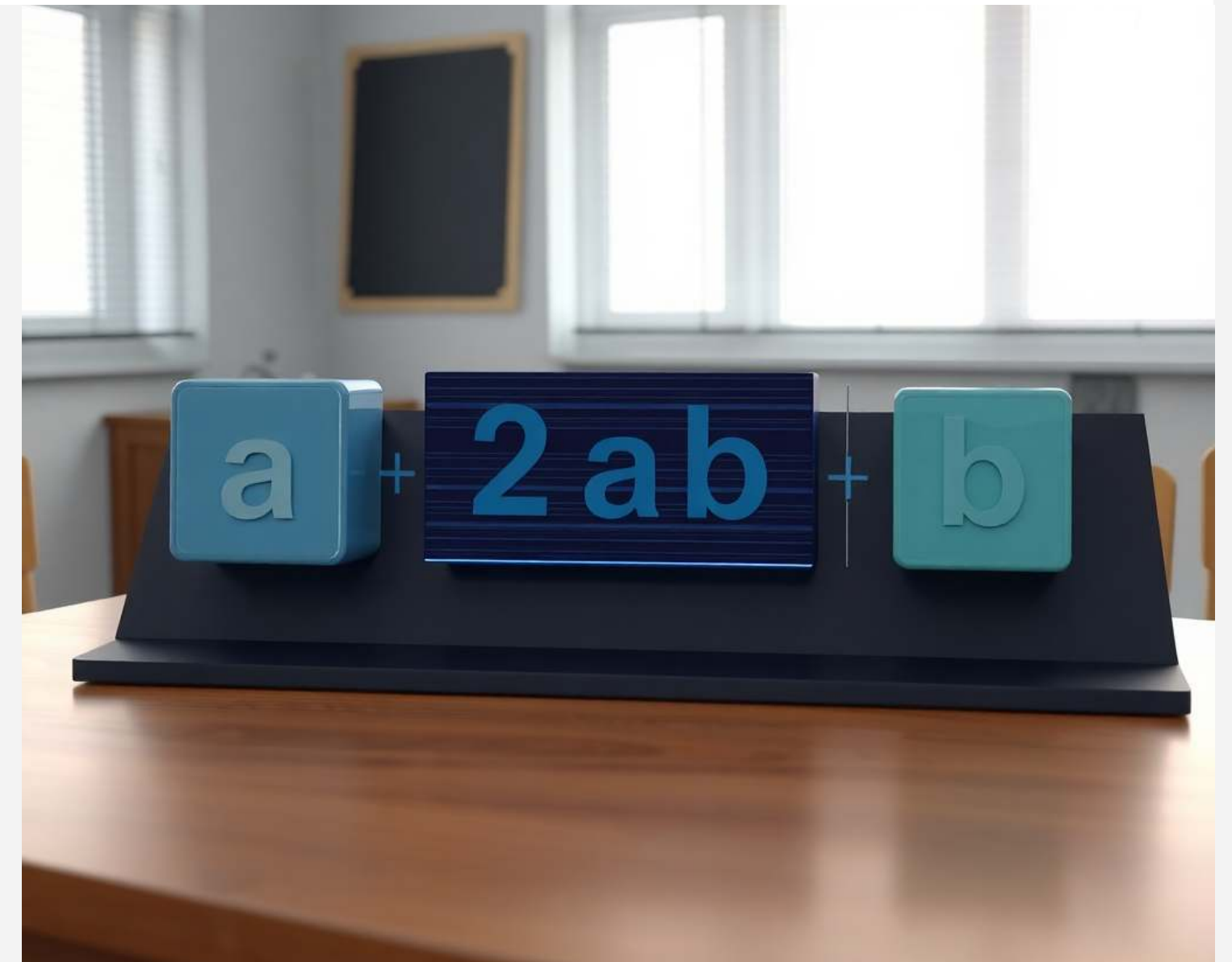
После раскрытия скобок получается трёхчлен вида $a^2 \pm 2ab + b^2$. В нём всегда три слагаемых, а крайние члены являются квадратами.

Как распознать

Если первый и последний члены можно представить как квадраты, стоит проверить средний член. Он должен быть удвоенным произведением найденных корней.

Зачем это нужно

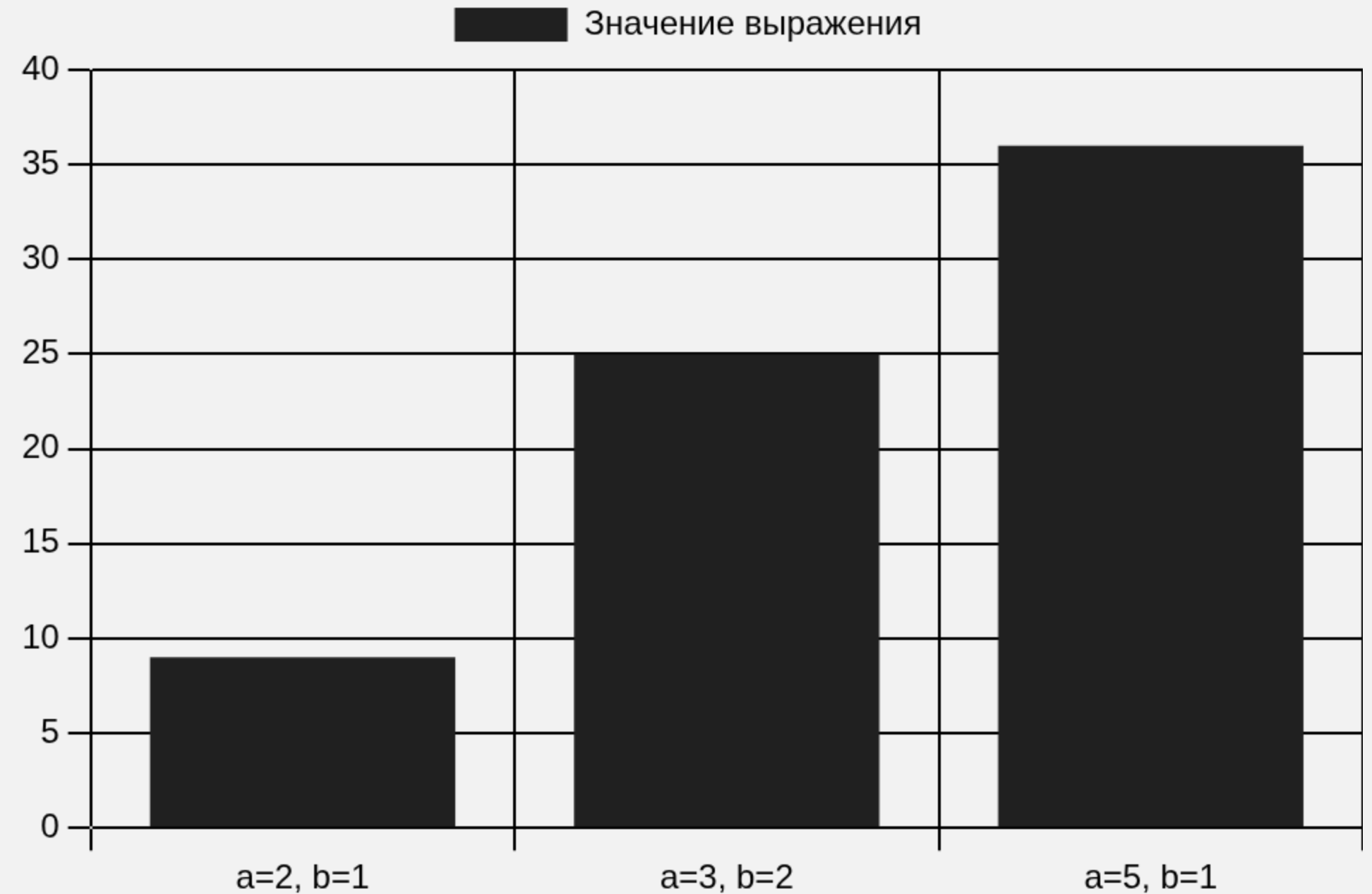
Такой анализ помогает отличить обычный многочлен от выражения, которое можно снова свернуть в квадрат двучлена, не выполняя лишних действий.



Как меняется результат при смене знака

Во всех примерах числа a и b одинаковы, меняется только знак в середине формулы. Это удобно видеть при сравнении близких выражений.

Чем больше произведение ab , тем заметнее различие между квадратом суммы и квадратом разности.



Самопроверка при выполнении заданий

Крайние члены

Проверь, являются ли первое и последнее слагаемые квадратами. Если хотя бы одно из них не подходит, выражение нельзя сразу записать как квадрат двучлена.

Правильный знак

Знак в середине должен совпадать со знаком внутри скобок. Плюс означает квадрат суммы, а минус — квадрат разности, поэтому эта деталь особенно важна.

Средний член

Убедись, что средний член равен удвоенному произведению найденных корней. Именно он показывает, верно ли выбраны числа для раскрытия скобок.

Две формулы, один надёжный приём

Формулы квадрата суммы и квадрата разности помогают быстро раскрывать и свертывать выражения, замечать структуру трёхчлена и проверять вычисления. Главное — внимательно следить за знаком среднего члена.