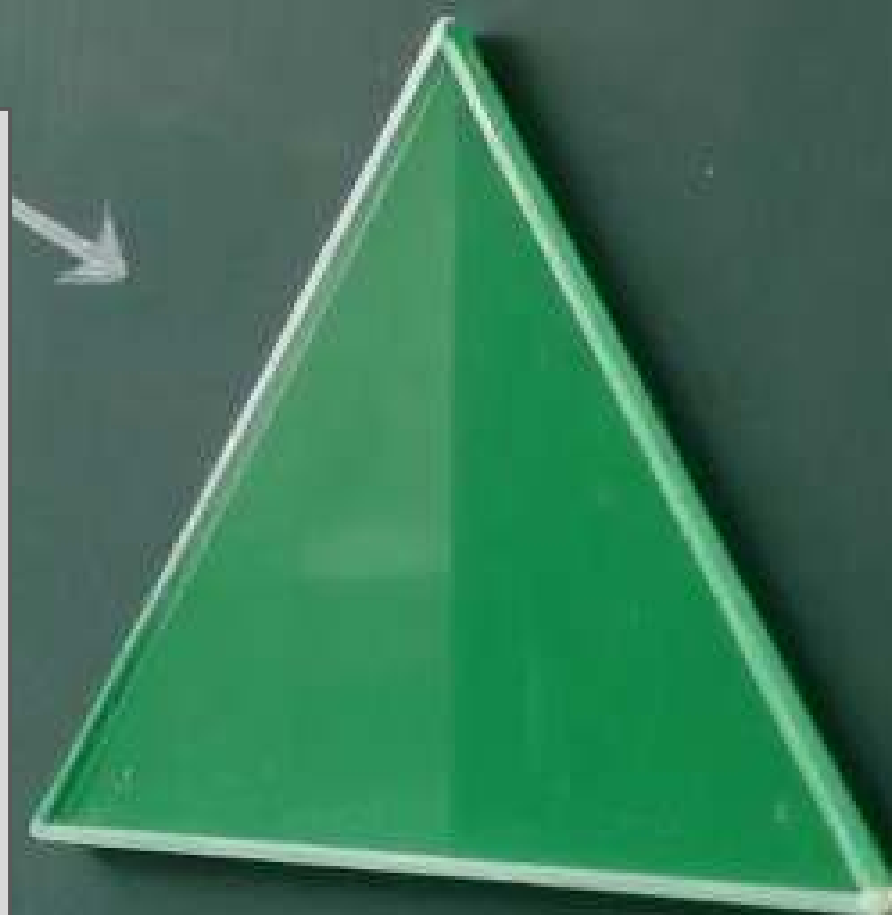


File Edit Search Help

Понятие преобразования в геометрии

Преобразование задаёт правило соответствия между
исходной фигурой и её образом.

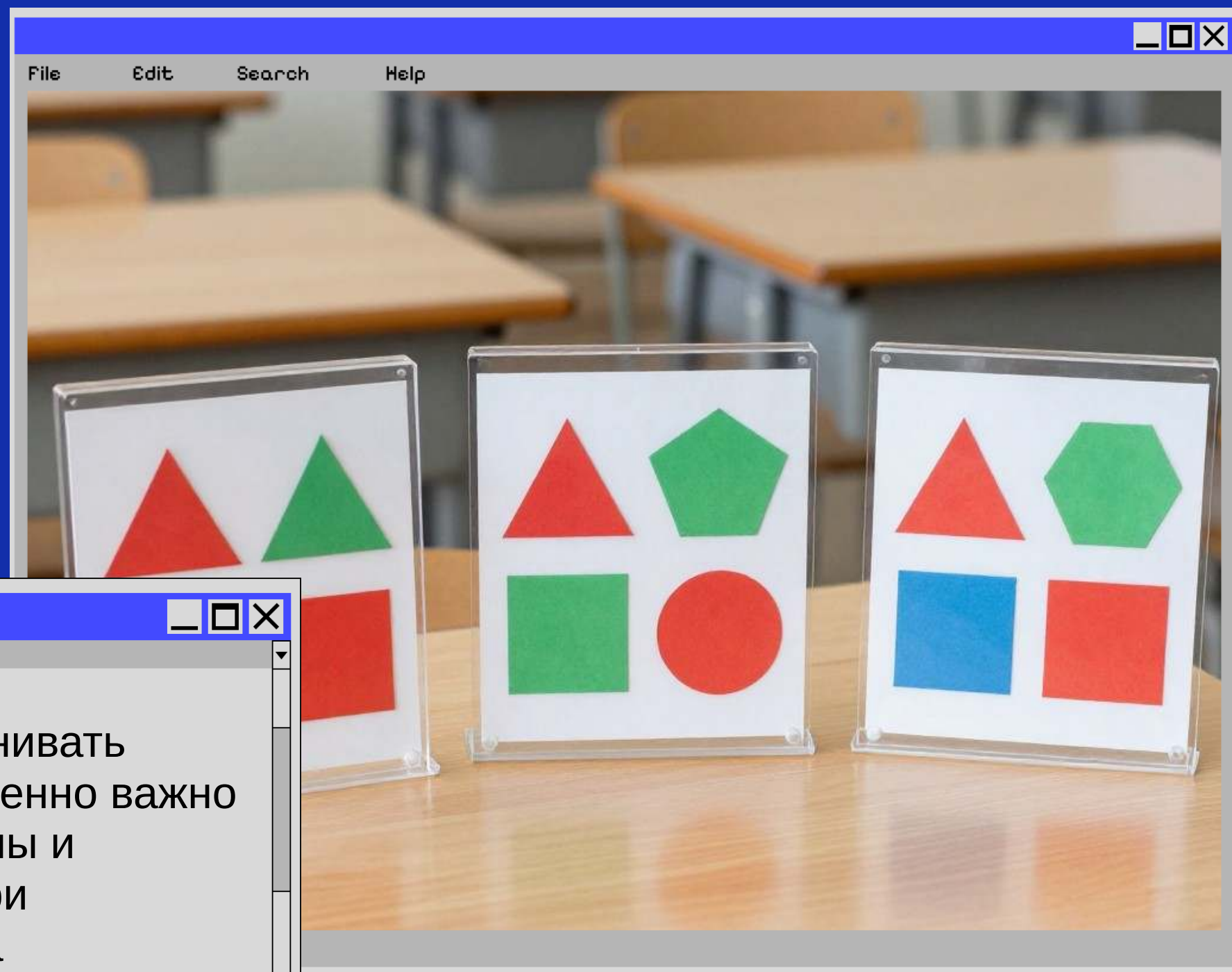
Ok



Геометрические преобразования в курсе 9 класса

Ok

В 9 классе преобразования помогают сравнивать фигуры и связывать их друг с другом. Особенно важно понимать, что сохраняется: расстояния, углы и параллельность прямых, а что меняется при гомотетии. Тема пригодится при задачах на симметрию и координаты, а также в черчении и графике.



Что называют преобразованием фигуры

- 1 У преобразования есть три ключевых элемента: исходная фигура, правило действия и полученный образ. Это правило задаёт, как именно «переводятся» точки фигуры в новые точки.
- 2 Для каждой точки исходной фигуры находится соответствующая точка образа. Важно, что при одном и том же преобразовании соответствия задаются одинаково для всех точек фигуры.
- 3 При этом одни свойства могут сохраняться — например, длины отрезков, углы, параллельность прямых и даже площадь. Другие меняются: положение, ориентация и размер. Образ — результат работы правила.

Основные виды геометрических преобразований

Сравним, что меняется в фигуре и какие свойства остаются неизменными.

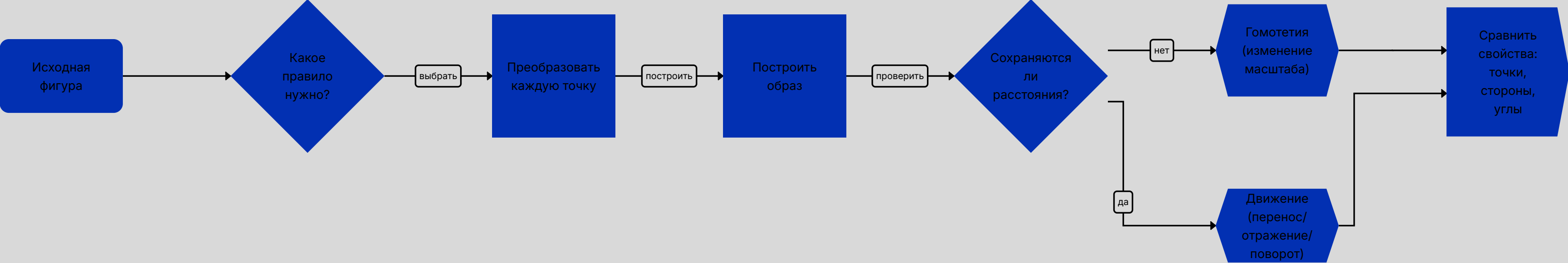
Движения (перенос, отражение, поворот) не «ломают» фигуру: сохраняются её размеры и углы. Гомотетия меняет масштаб, но сохраняет подобие.

Школьный курс геометрии, материал по преобразованиям		
File Edit Search Help		
Вид преобразования	Что меняется (кратко)	Что сохраняется (кратко)
Параллельный перенос (сдвиг)	Положение	Длины, углы, ориентация
Отражение относительно прямой	Ориентация (зеркальность)	Длины, углы
Поворот вокруг точки (на угол)	Положение	Форма, длины, углы
Гомотетия (с коэффициентом)	Размер (масштаб)	Углы и пропорции

Как выполняется преобразование фигуры

Алгоритм с выделением случаев: движения и гомотетия

Ok



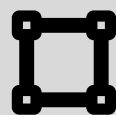
Параллельный перенос: главные идеи



Один и тот же сдвиг

Каждая точка фигуры смещается одинаково: на одно и то же расстояние и в одном направлении. Поэтому образ получается как «копия», но в другом месте.

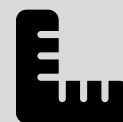
Ok



Вектор переноса

Для переноса задают вектор, например: 3 клетки вправо и 2 вверх. Он определяет, куда именно переедет любая точка исходной фигуры.

Ok



Форма не меняется

Длины отрезков и величины углов остаются прежними, фигура сохраняет свои размеры и общую конфигурацию. Углы «поворачиваются» не происходит — всё остаётся таким же.

Ok



Нет центра и оси

Параллельный перенос работает на всей плоскости одинаково: нет выделенной точки или прямой. Поэтому центр и ось не задают — фигура просто равномерно смещается.

Ok

Отражение относительно прямой: визуальные образы

Зеркало и перпендикуляр

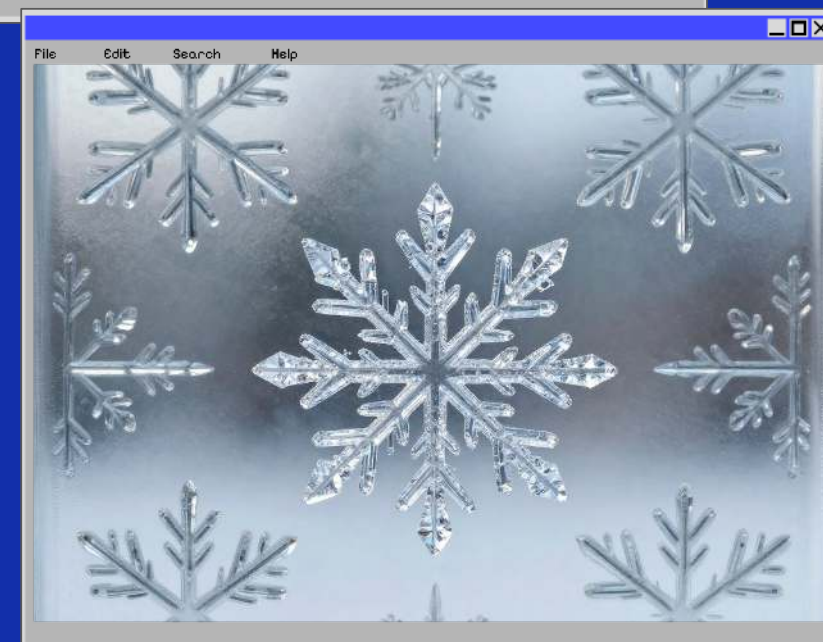
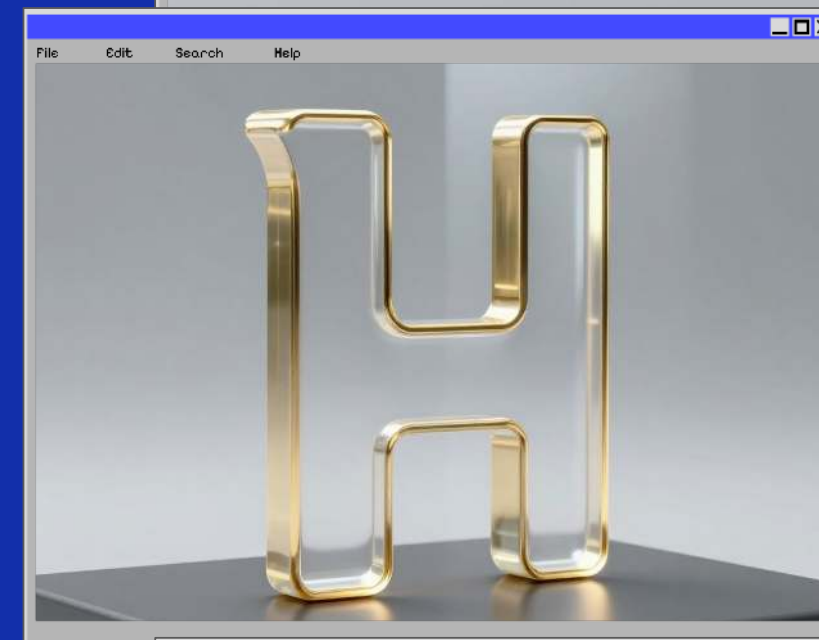
При отражении точка и её образ лежат на одинаковом расстоянии от оси отражения. Ось становится серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему точку и её образ. Так возникает «зеркальная» симметрия.

Буква как знак симметрии

Представьте букву, которая после отражения выглядит так же, как и до него. В таких случаях удобно увидеть, что левая и правая стороны будто меняются местами. Поэтому отражение часто связывают с «зеркальным чтением» рисунков.

Орнамент и снежинка

Снежинка и симметричный узор показывают отражение в декоративных мотивах. Детали повторяются так, будто их продублировали через «невидимое зеркало» вдоль прямой. Поэтому отражение легко узнаётся в природе и рисунках.



Какие свойства сохраняют разные преобразования

В движениях сохраняются длины и углы, а площадь также не меняется. Ориентация «падает» при отражении, поэтому её сохранение не универсально.

По сумме сохранений видно: углы сохраняются чаще всего, тогда как длины и площадь исчезают при гомотетии. Ориентация меняется чаще всего из-за отражения, в отличие от переноса и поворота.



Поворот вокруг точки

1

Поворот — это вращение фигуры вокруг центра поворота на заданный угол. Для наглядности часто рассматривают углы 90° , 180° , 270° и 360° .

2

У каждой точки расстояние до центра поворота сохраняется. Поэтому контуры не «растягиваются» и не «сжимаются»: фигура меняет лишь положение в плоскости.

3

Поворот удобно использовать для описания вращения объектов: стрелки часов, колеса, шестерёнки и симметричных узоров, которые повторяются при вращении.

Движение и гомотетия: сравнение свойств

Определения движений и гомотетии в школьной геометрии 9 класса

Признак	Движение (перенос/ отражение/поворот)	Гомотетия
Длины отрезков	Сохраняются	Изменяются (масштаб)
Углы и параллельность	Сохраняются	Сохраняются (как при подобии)
Площадь	Сохраняется	Изменяется (зависит от коэффициента)
Ориентация и размер	Размер не меняется	Фигура увеличивается при $k > 1$ и уменьшается при $k < 1$

Сравним, что сохраняется и что меняется у движений и у гомотетии.

Движения — это преобразования без «масштабного эффекта»: они сохраняют размеры и формы в строгом смысле равенства. Гомотетия сохраняет подобие (углы и пропорции), но меняет размеры и площадь.

Координатный способ задания преобразований



Формулы вместо чертежа

На координатной плоскости образ задают через правило для координат: зная точку $(x; y)$, получают $(x'; y')$. Это снижает риск ошибки и делает проверку соответствий точной и быстрой.



Параллельный перенос

Для переноса на вектор $(a; b)$ используется преобразование координат $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$. Все точки смещаются одинаково, поэтому фигура сохраняет форму и размеры.



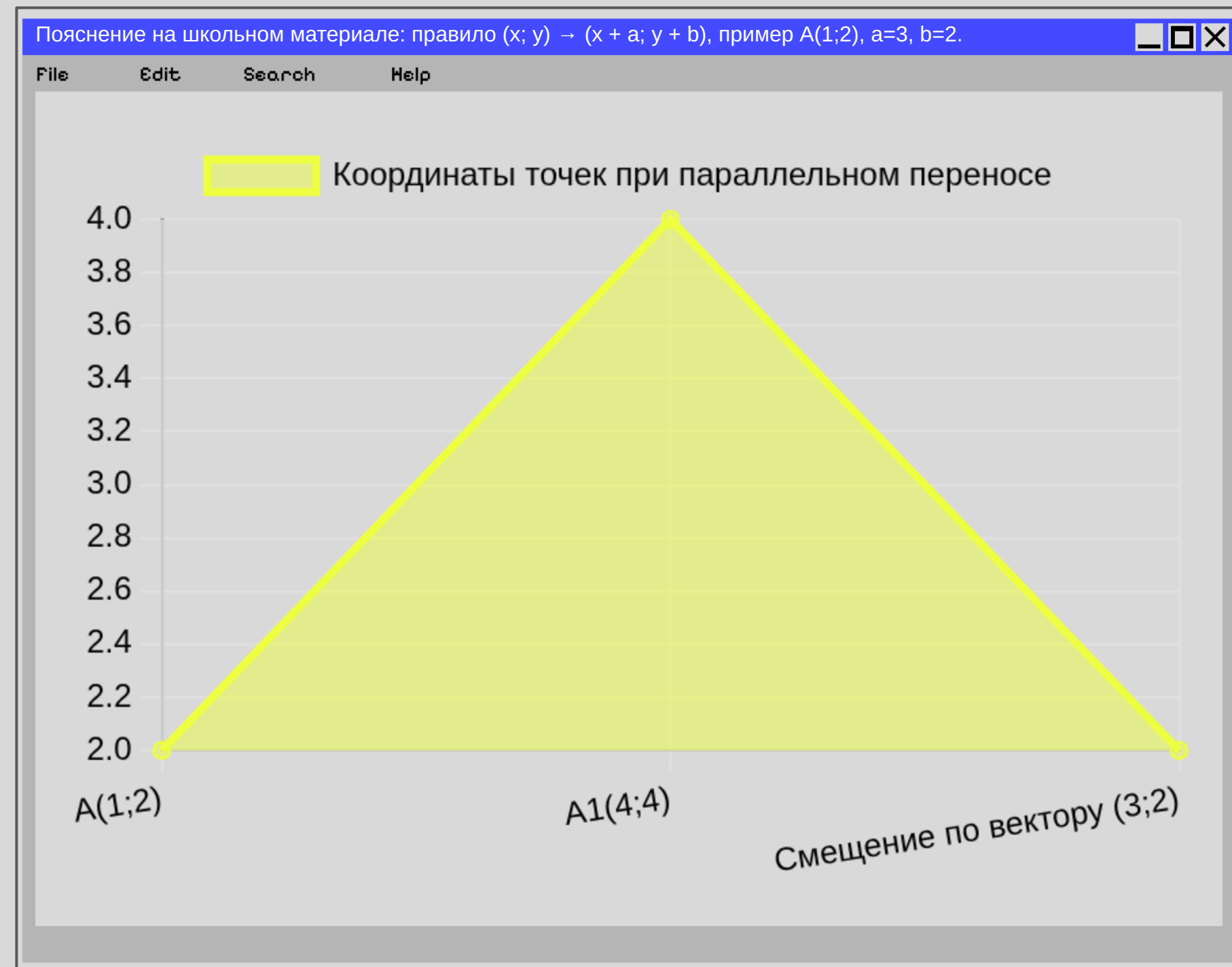
Отражение и поворот по правилам

Отражение и поворот также описываются точными координатными формулами. Подставляя координаты каждой вершины, строят образ и сравнивают параметры без «угадывания» по рисунку.

Изменение координат при параллельном переносе

При переносе одно и то же смещение применяется к каждой точке фигуры, поэтому разности координат между вершинами не меняются.

Так как все точки получают одинаковый вектор, сохраняются длины сторон и форма: образ получается «сдвинутым», а не перестроенным.



Симметрия как частный случай преобразования

- 1 Симметрия — это преобразование, при котором фигура совпадает сама с собой (или с частью другой) после заданного действия. Такой «самосовпадающий» образ помогает распознавать закономерности и повторяющиеся элементы.
- 2 Осевая симметрия связана с отражением относительно прямой: каждая точка оказывается на равном расстоянии от оси. Благодаря этому сохраняются углы и длины, а вот ориентация меняется «зеркально».
- 3 Центральная симметрия связана с поворотом на 180° вокруг точки. Для любых соответствующих точек центр поворота оказывается серединой отрезка между ними, поэтому фигура выглядит той же, но «развернутой».

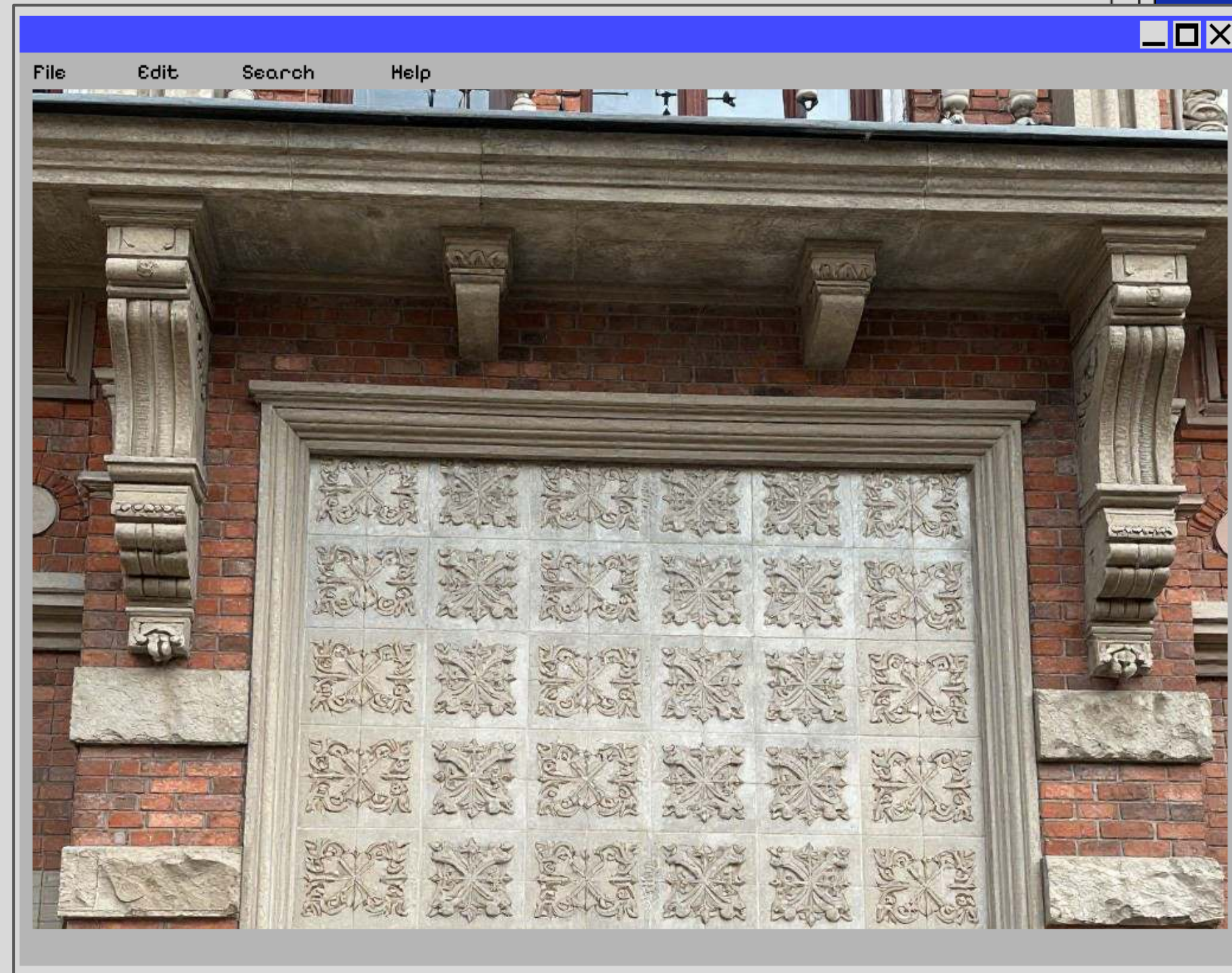
Преобразования в окружающих объектах

Орнаменты и архитектура

В орнаментах плитки и архитектурных фасадах часто повторяются переносы и повороты: рисунок «копируется» по сетке или вокруг оси. Иногда применяют и отражения, чтобы получить зеркальную симметрию элементов.

Графика, чертежи и координаты

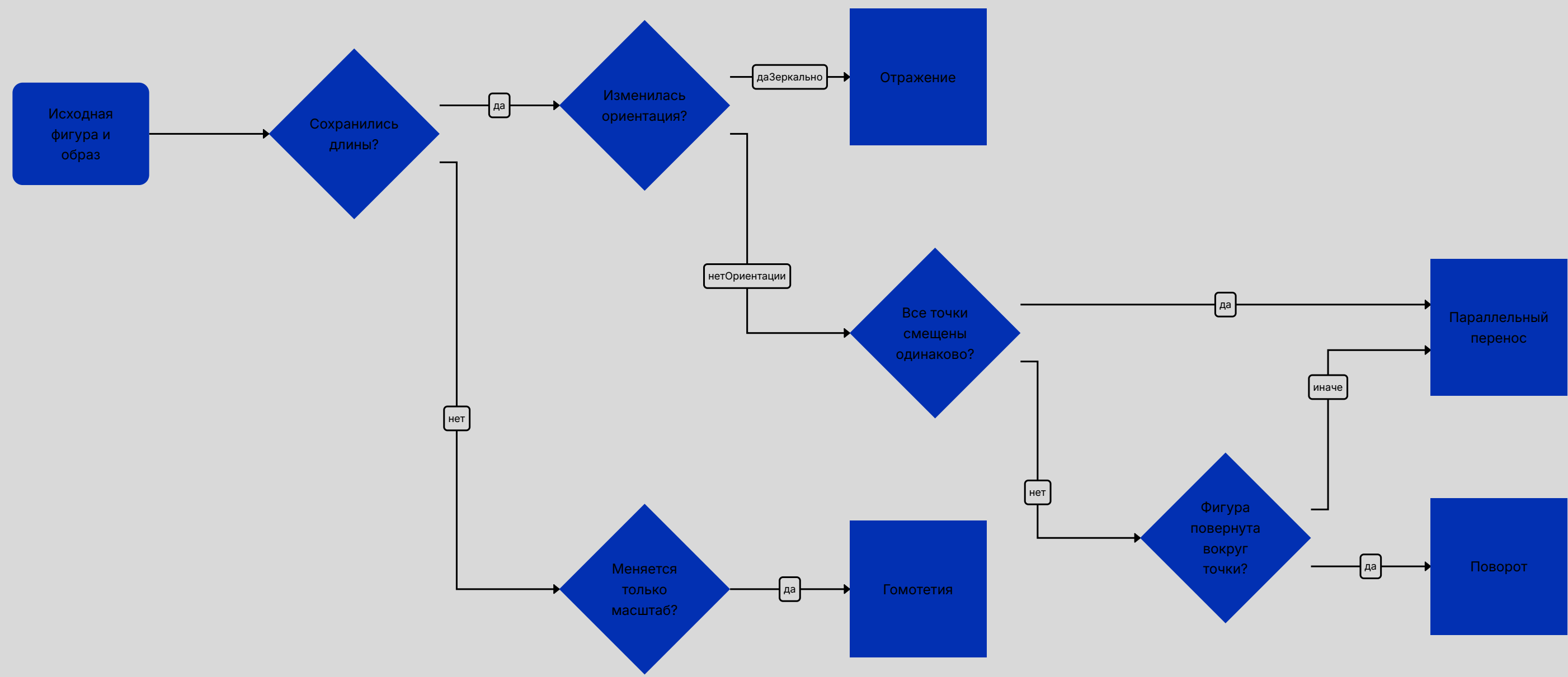
В чертежах и компьютерной графике преобразования помогают точно масштабировать, перемещать и поворачивать детали. На координатных схемах это особенно удобно: координаты вершин меняются по формулам, а пропорции сохраняются там, где это требуется.



Как определить вид преобразования

Последовательность проверки по признакам: размеры, ориентация, положение и масштаб.

Ok



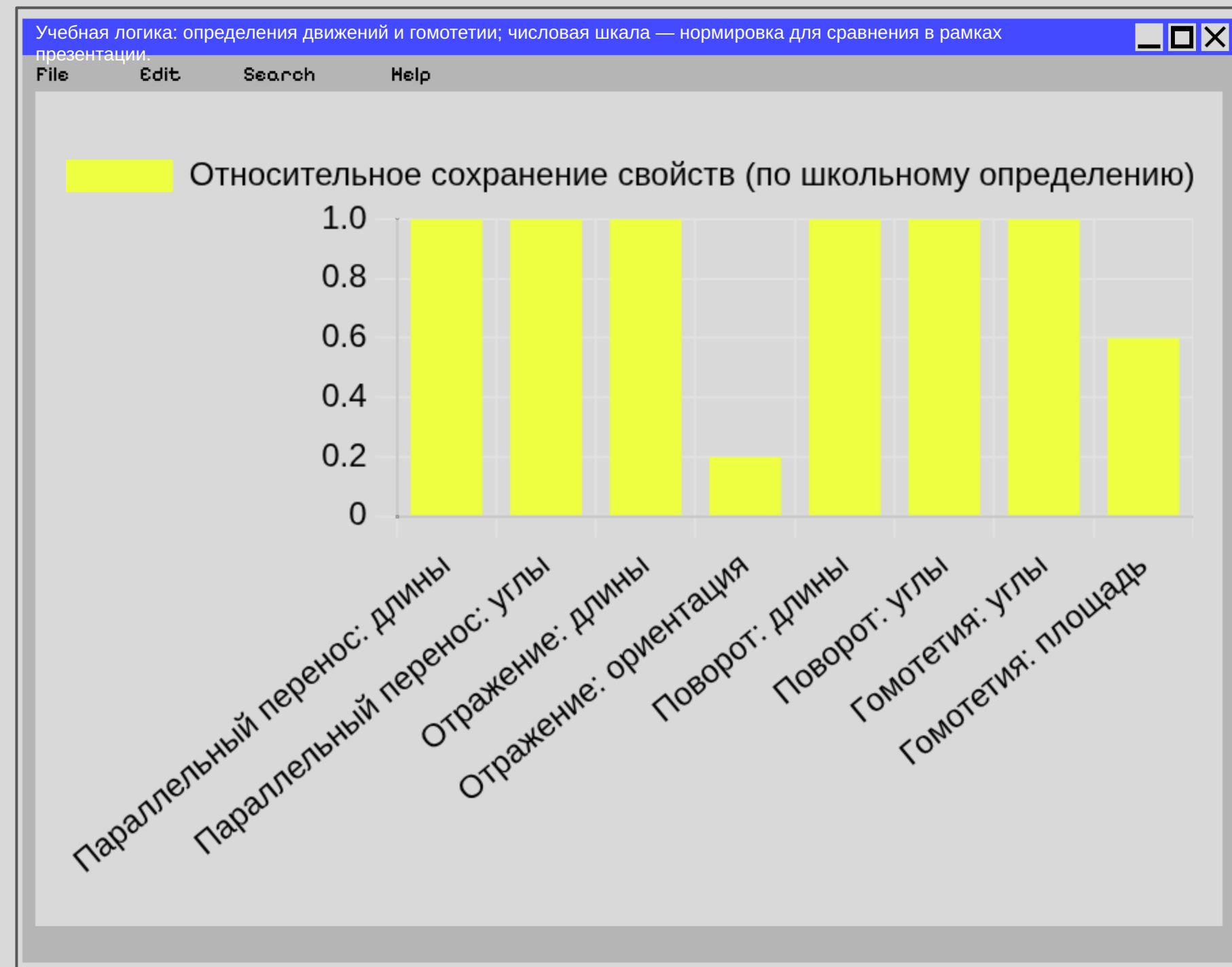
Признаки, по которым проверяют преобразование

- 1 Сравнивают расстояния между соответствующими точками: если все длины сохранились, фигура не изменила размер. Тогда речь идет о движениях, а не о преобразованиях с масштабом.
- 2 Проверяют величины углов и параллельность соответствующих сторон. Если углы остаются теми же, а прямые не «ломаются», форма сохраняется; отличить отражение помогает смена направления обхода.
- 3 Определяют, изменился ли масштаб. Если размеры изменились пропорционально коэффициенту, это признак гомотетии: сохраняются углы и соотношения длин, но меняются площади и длины.

Сравнение сохранения свойств при преобразованиях

Шкала условная: единица означает полное сохранение свойства, значение ниже — признак изменения (например, ориентации при отражении).

Движения сохраняют геометрию «целиком» (длины и углы), а гомотетия сохраняет только углы и подобие, поэтому меняются площади и размеры.



Типичные ошибки при изучении преобразований

Ok

- 1 Часто путают отражение и поворот: при отражении точки располагаются симметрично относительно оси, а при повороте — вокруг центра. Различать помогают признаки ориентации и геометрия соответствующих точек.
- 2 Ещё одна ошибка — неверно находить ось симметрии или центр поворота. Если ось выбрана неправильно, «равенство расстояний до оси» для каждой пары точек не выполняется, и образ выходит неверным.

- 3 Иногда смешивают параллельный перенос и поворот: при переносе все точки смещаются одним и тем же вектором. При повороте же каждая точка движется по своей окружности с общим центром.
- 4 Ошибаются и с гомотетией: считают, что сохраняются все свойства, хотя меняется масштаб. При гомотетии углы остаются теми же, но длины и площади меняются в зависимости от коэффициента.

Значение преобразований в геометрии



Задачи на равенство и подобие

Преобразования помогают доказывать, что фигуры равны или подобны: достаточно показать соответствие точек и сохранение нужных свойств. Так проще решать задачи без громоздких построений.

Ok



Построения чертежей и моделей

При построении чертежей преобразования используют для аккуратного копирования элементов: переносом задают повтор, отражением — зеркальные детали, поворотом — симметричные положения. Это ускоряет работу и повышает точность.

Ok



Работа с координатной плоскостью

Координатный подход позволяет проверять соответствие точек по формулам и уверенно находить образы. Благодаря этому меньше ошибок при чтении координат и при построении на клетчатой бумаге.

Ok



Орнаменты и анализ изображений

В орнаментах и декоративных изображениях преобразования объясняют, почему узор повторяется. В задачах по анализу картинок геометрические идеи позволяют описывать симметрию и структуру деталей.

Ok

Главный вывод о понятии преобразования

Ok

Преобразование задаёт соответствие между исходной фигурой и её образом через правило. Параллельный перенос, отражение и поворот — движения с сохранением размеров. Гомотетия сохраняет углы и форму подобия, но меняет масштаб.