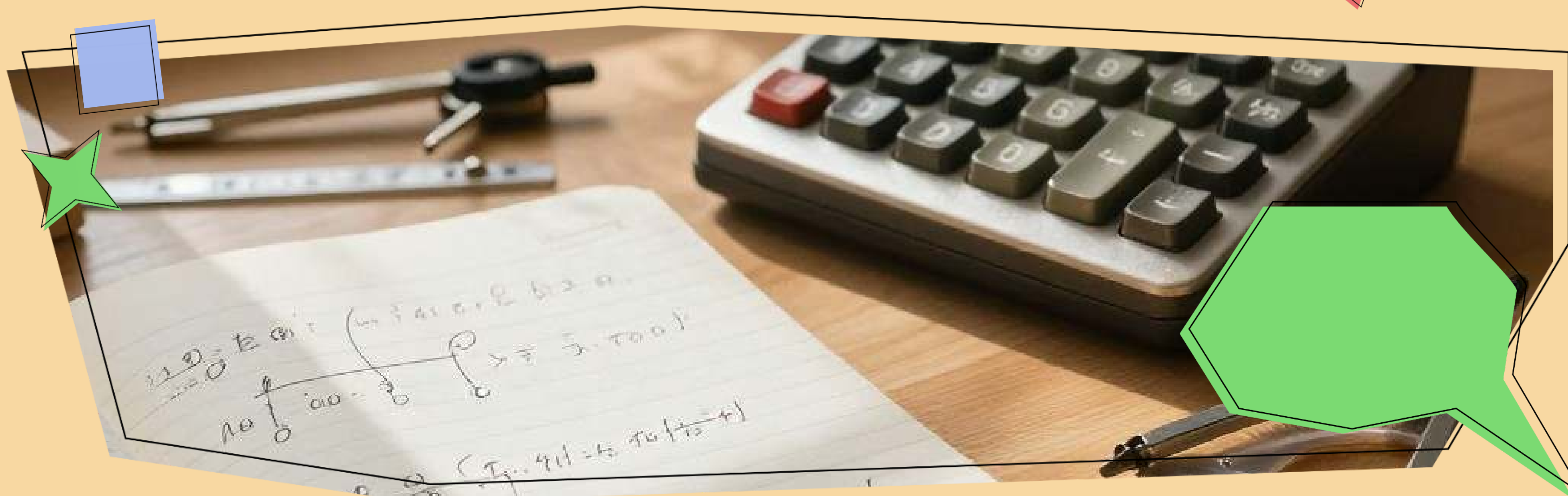
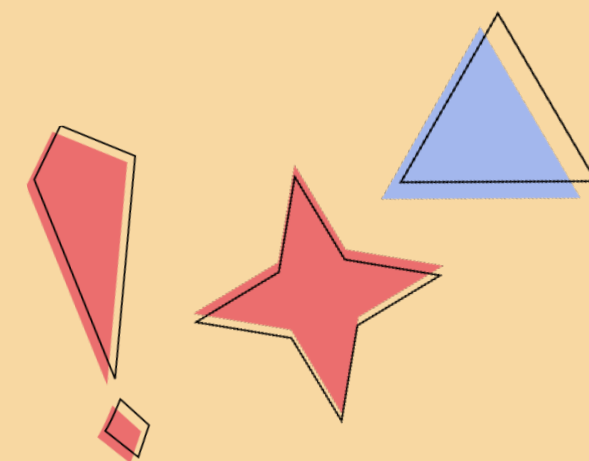


Инверсии в массивах: роль в комбинаторике и алгоритмах

Инверсии — фундаментальный инструмент анализа порядка и эффективности алгоритмов.

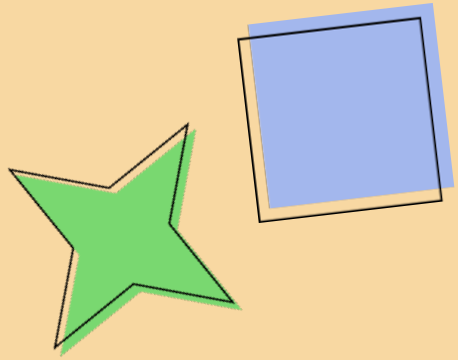


Историческое и теоретическое значение инверсий

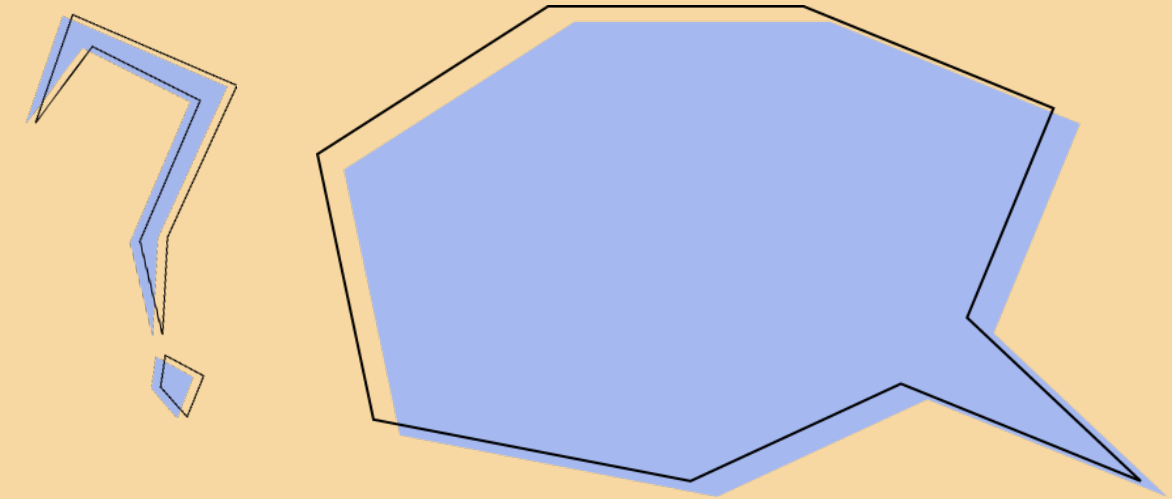
Понятие инверсии появилось в XIX веке для изучения перестановок и порядка. Сегодня инверсии помогают оценивать сложность алгоритмов и глубже понимать структуры данных.



Понятие инверсии и его формализация

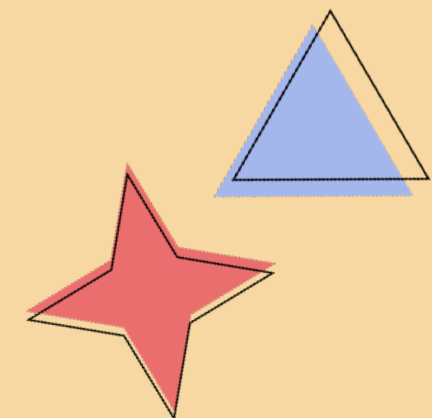


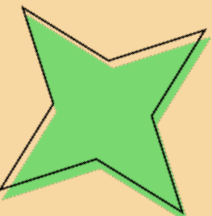
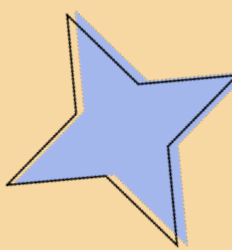
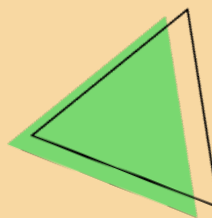
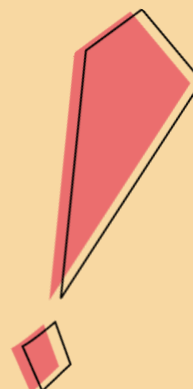
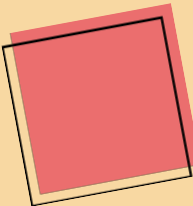
Инверсией в массиве называют пару индексов (i, j) с $i < j$ и $a[i] > a[j]$, указывающую на нарушение возрастания.



Общее число инверсий отражает степень неупорядоченности массива, служит количественной мерой хаоса в данных.

Число инверсий формально показывает, насколько массив удалён от идеального порядка возрастания по математическим стандартам.




$$n(n-1)/2$$

Максимальное число инверсий в массиве совпадает с количеством пар элементов при полной обратной сортировке.

Теория комбинаторики и анализа алгоритмов

Отсутствие инверсий соответствует упорядоченному массиву, максимальное значение — обратному порядку.

Примеры инверсий на небольшом массиве



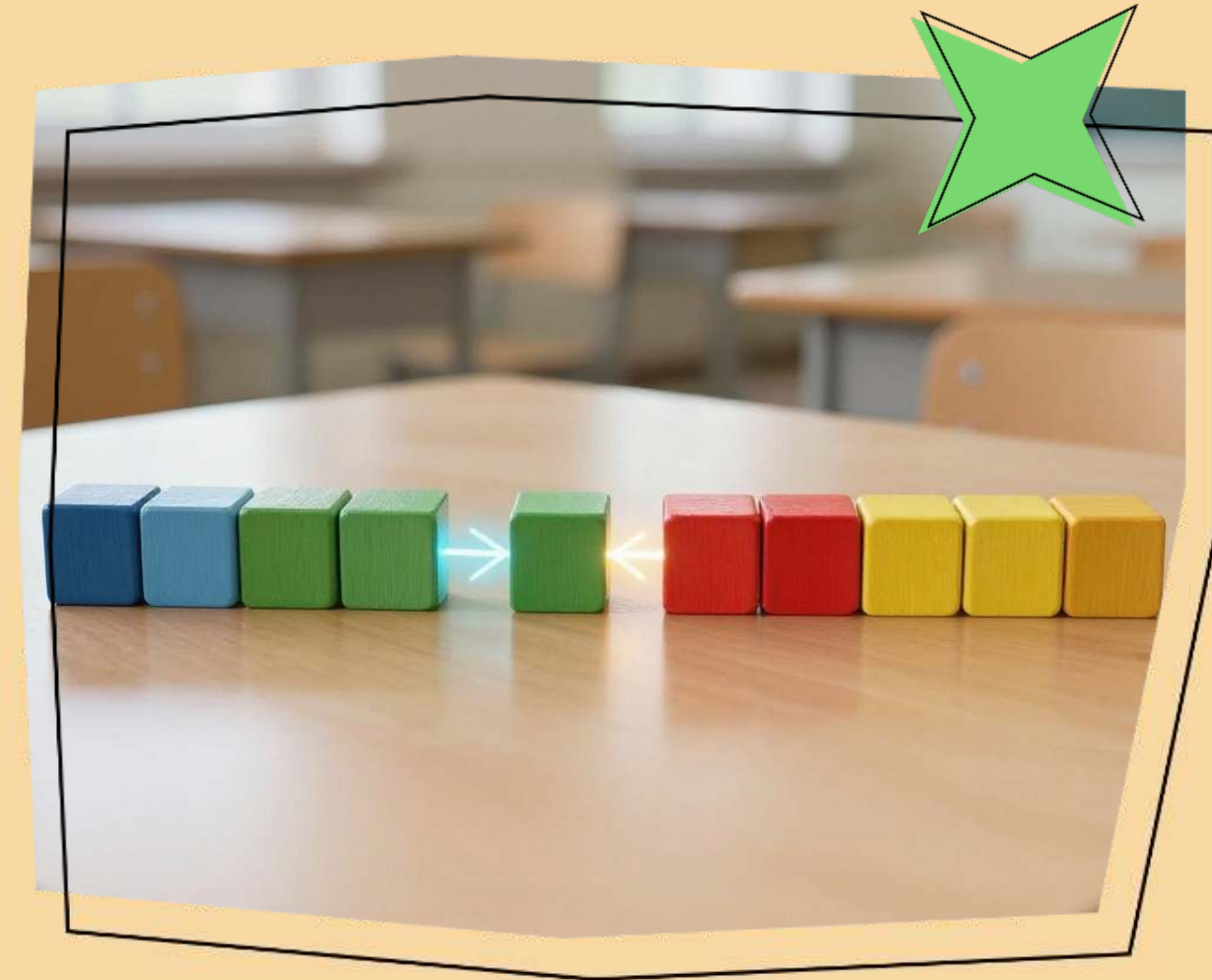
Массив чисел и его инверсии

Рассмотрим массив: 2, 4, 1, 3, 5. В нём отображаются три инверсии, выявляющие нарушения естественного порядка элементов.



Пары индексов-инверсий

Инверсии возникают в парах (1,3), (2,3) и (2,4), где элементы левее больше элементов правее, что фиксирует несортированность.



Графическое представление инверсий

Визуальное изображение этих пар помогает чётко увидеть места, где нарушается восходящий порядок последовательности.

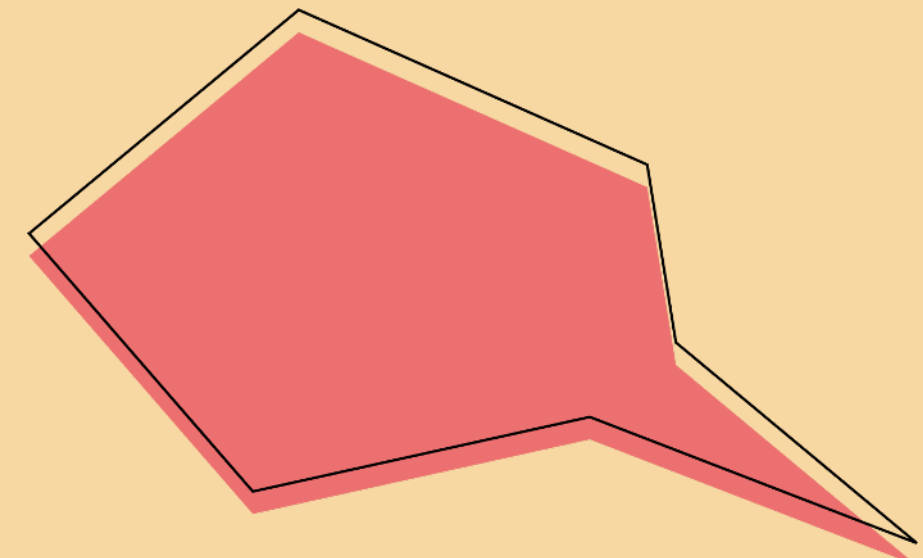
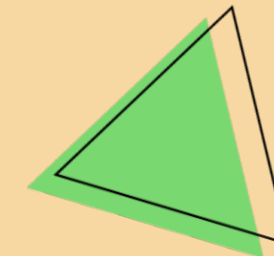
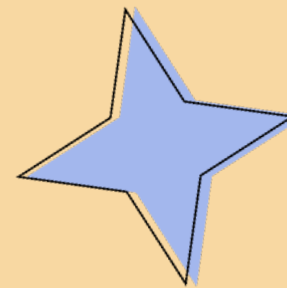
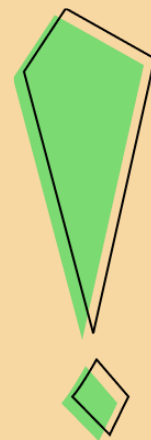
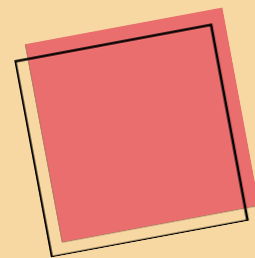
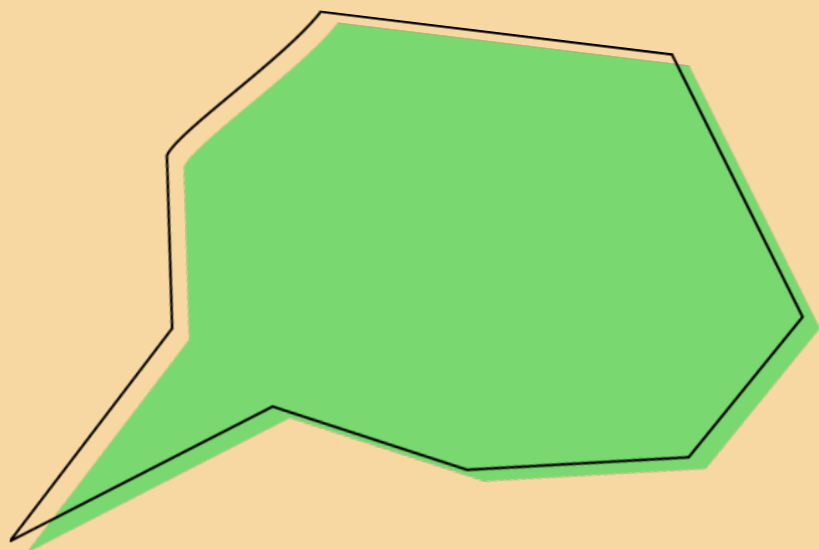
Влияние инверсий на алгоритмы сортировки

Пузырьковая сортировка выполняет ровно столько обменов, сколько инверсий содержится в исходном массиве.

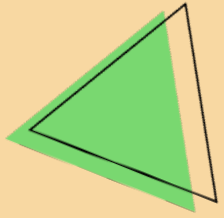
Подсчёт инверсий позволяет анализировать время работы алгоритмов и оптимизировать процесс сортировки.

Большое число инверсий указывает на сложность сортировки, сигнализируя о необходимости более эффективных методов.

Инверсии тесно связаны с выбором алгоритма и структурой данных, что влияет на вычислительную эффективность.



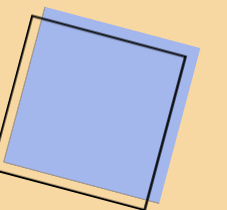
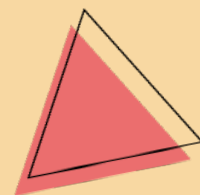
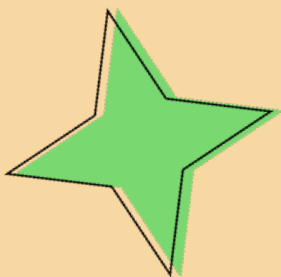
Зависимость числа инверсий от структуры массива



Случайные массивы строят среднее значение инверсий, отражая типичные варианты порядка элементов.

Максимальная хаотичность возникает при обратной сортировке, минимальная — при уже отсортированных данных.

Экспериментальные данные, апробация алгоритмов, 2023

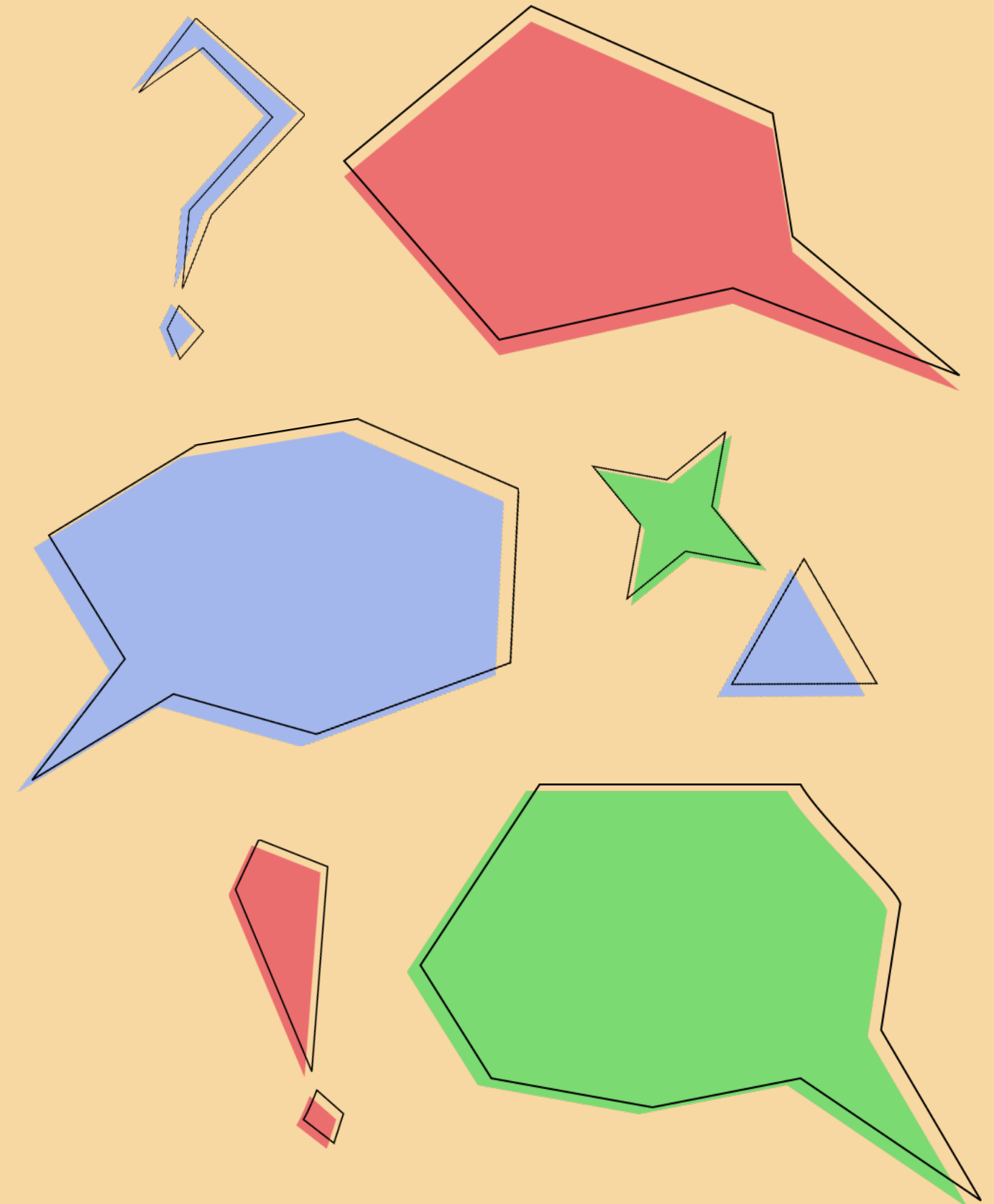
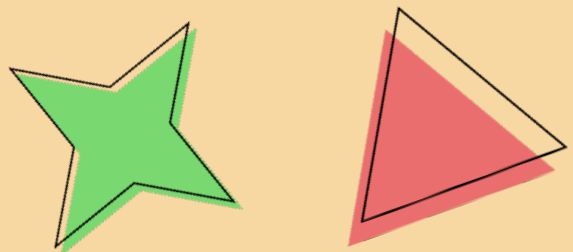


Простейший метод подсчёта инверсий: двойной цикл

Перебираются все пары (i, j) с $i < j$, на каждой проверке увеличивается счётчик при нарушении порядка.

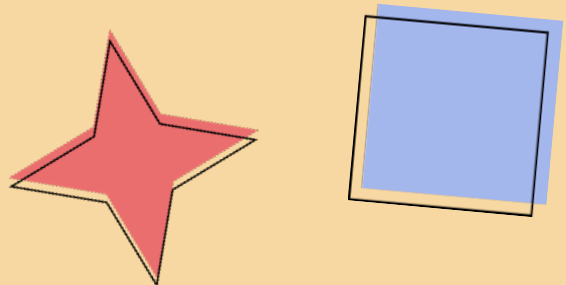
Метод корректен и прост, но требует времени порядка квадрата длины массива, что ограничивает его применение.

Для небольших массивов подход подходит, но для больших данных необходимы оптимизации.



Пример кода наивного алгоритма подсчёта инверсий

1. Двойной вложенный цикл проходит по всем парам индексов массива, сравнивая элементы и подсчитывая инверсии, что иллюстрирует принцип работы метода.
2. Визуализация работы алгоритма на примере массива из пяти элементов помогает понять последовательность сравнений и прирост счётчика инверсий.



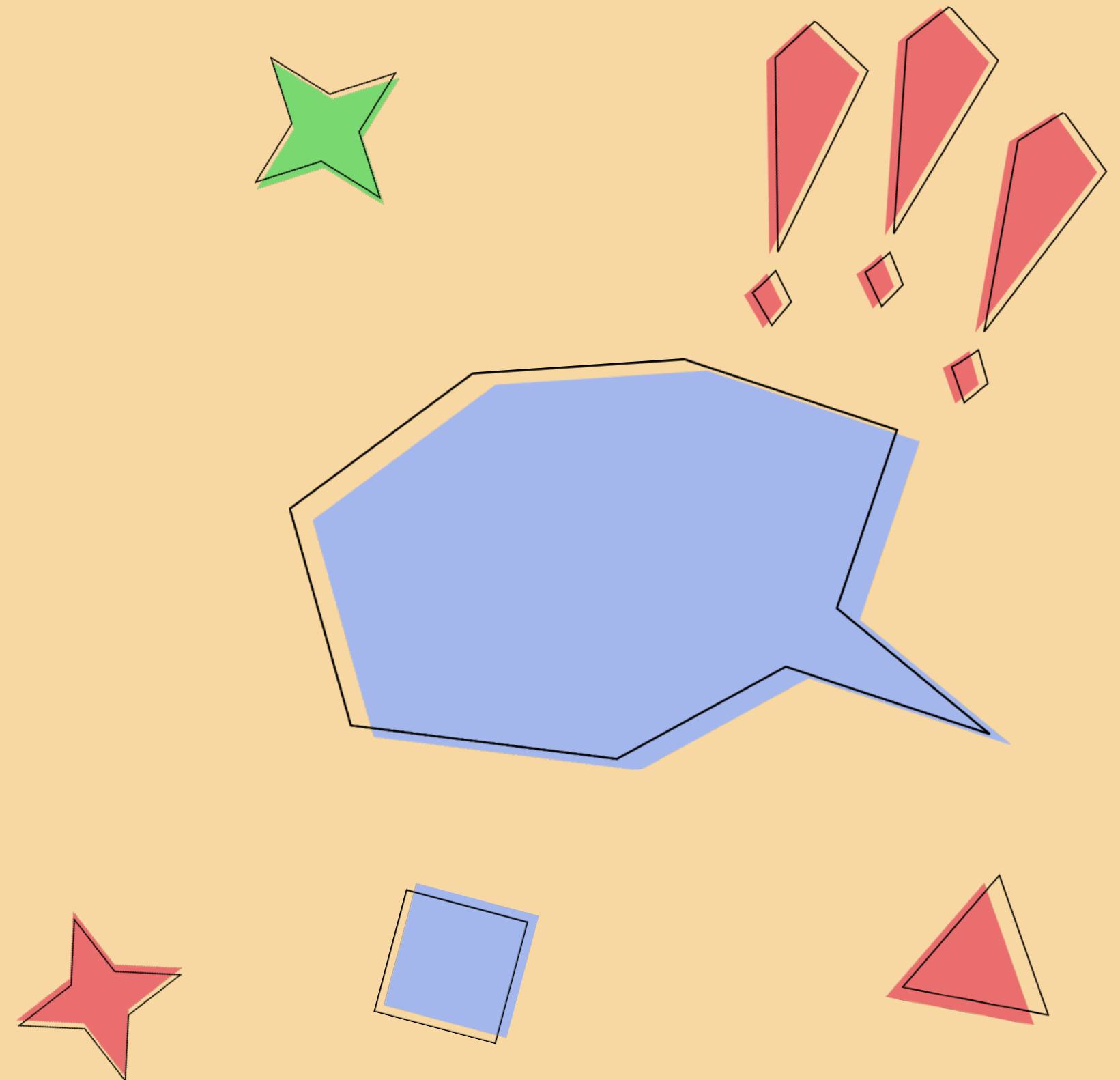
Оптимизация подсчёта инверсий через сортировку слиянием

Модификация сортировки слиянием позволяет одновременно сортировать массив и считать инверсии при объединении половин.

Каждый элемент из правой половины, вставляемый впереди элементов левой, добавляет к счёту количество оставшихся элементов левой части.

Этот подход уменьшает время работы до $O(n \log n)$, делая подсчёт инверсий эффективным для больших массивов.

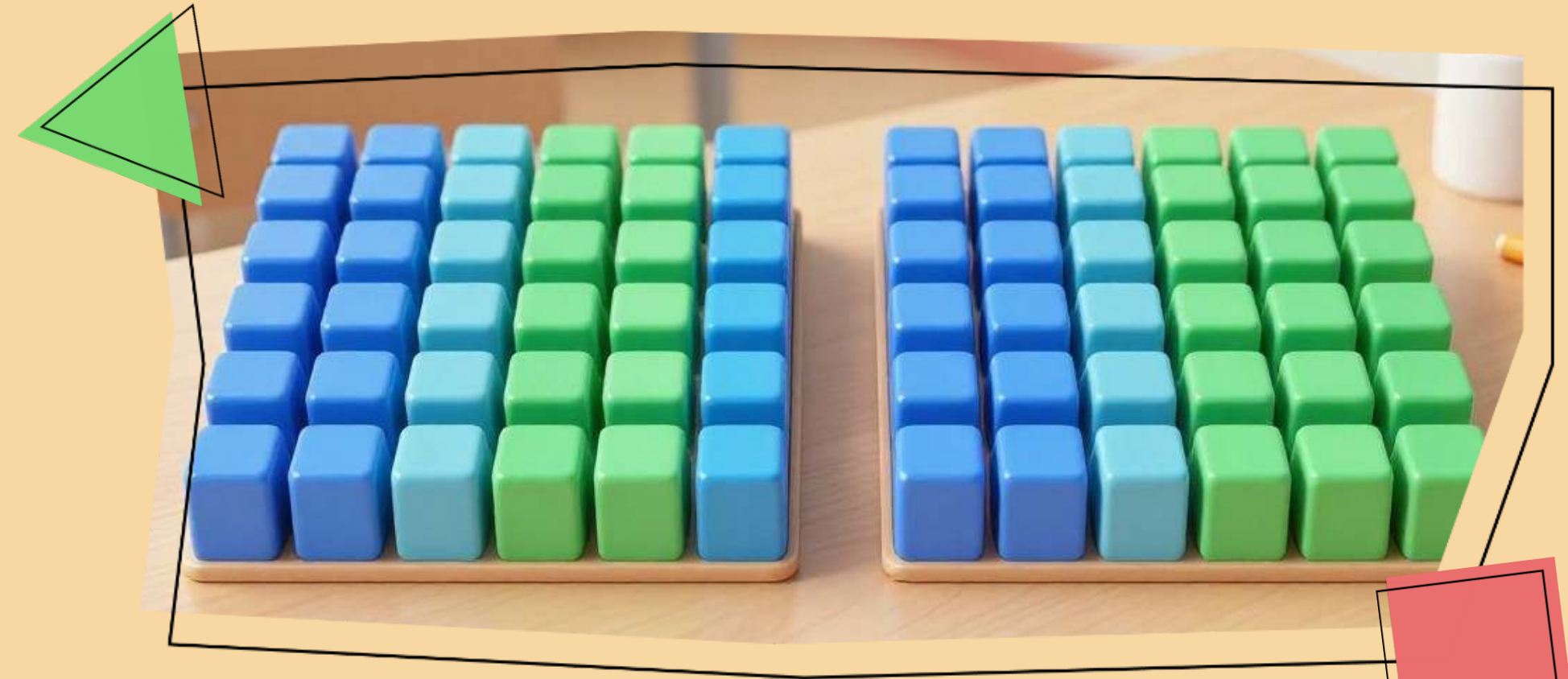
Алгоритм требует дополнительной памяти для временного хранения при слиянии, что является компромиссом между временем и ресурсами.



Визуализация алгоритма слияния при подсчёте инверсий

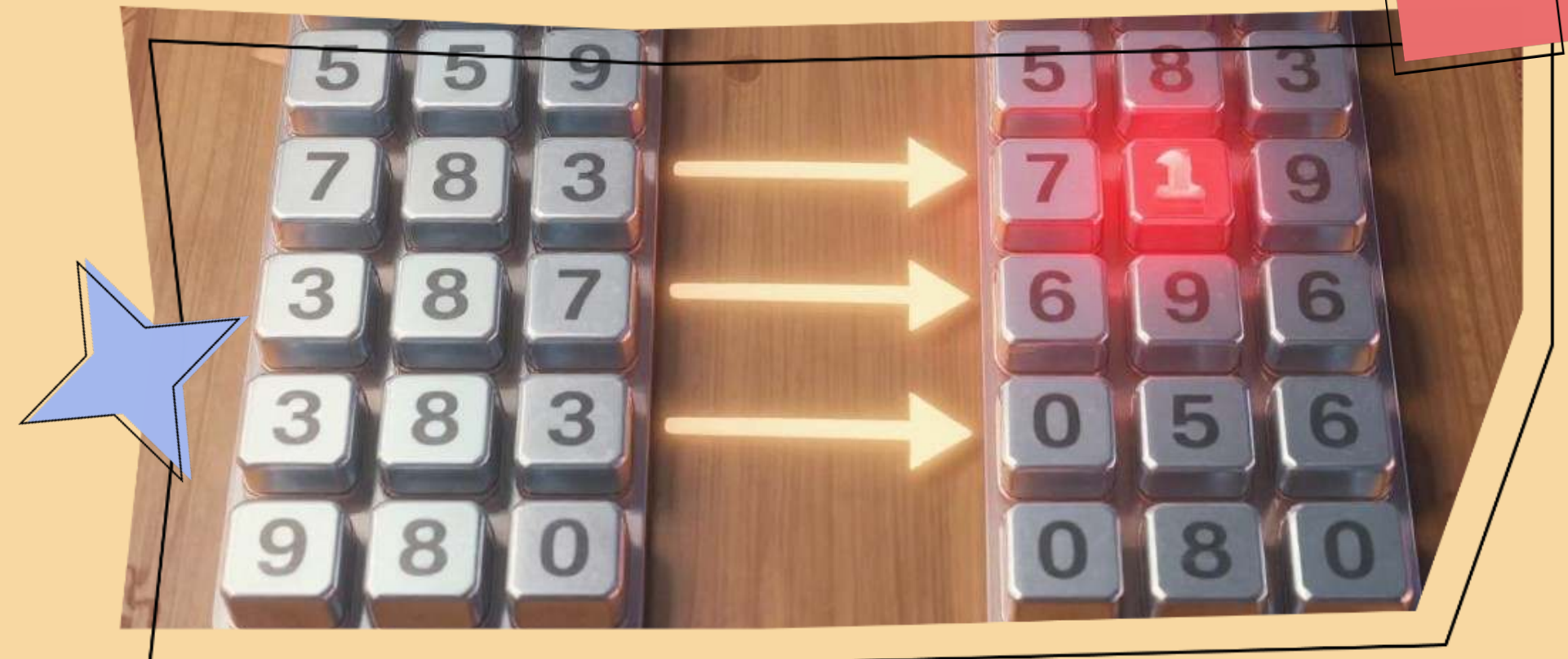
Разбиение массива как основа рекурсии

Сначала массив делится на две равные части, каждая из которых сортируется отдельно. Это фундаментальный этап, который подготавливает основу для эффективного подсчёта инверсий во время слияния отсортированных половин.



Фаза слияния и выявление инверсий

При объединении двух половин элементы сравниваются, а инверсии учитываются, когда элемент из правой части менее текущего элемента левой. Этот процесс позволяет подсчитать число нарушений порядка без полного перебора.

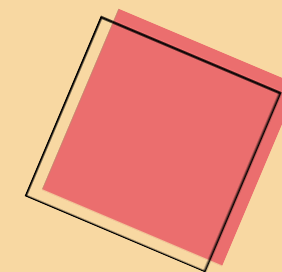
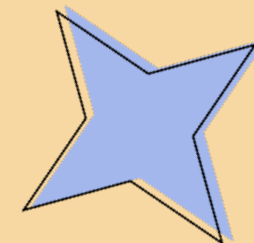
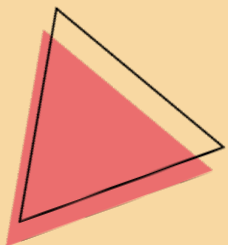
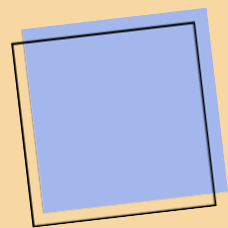
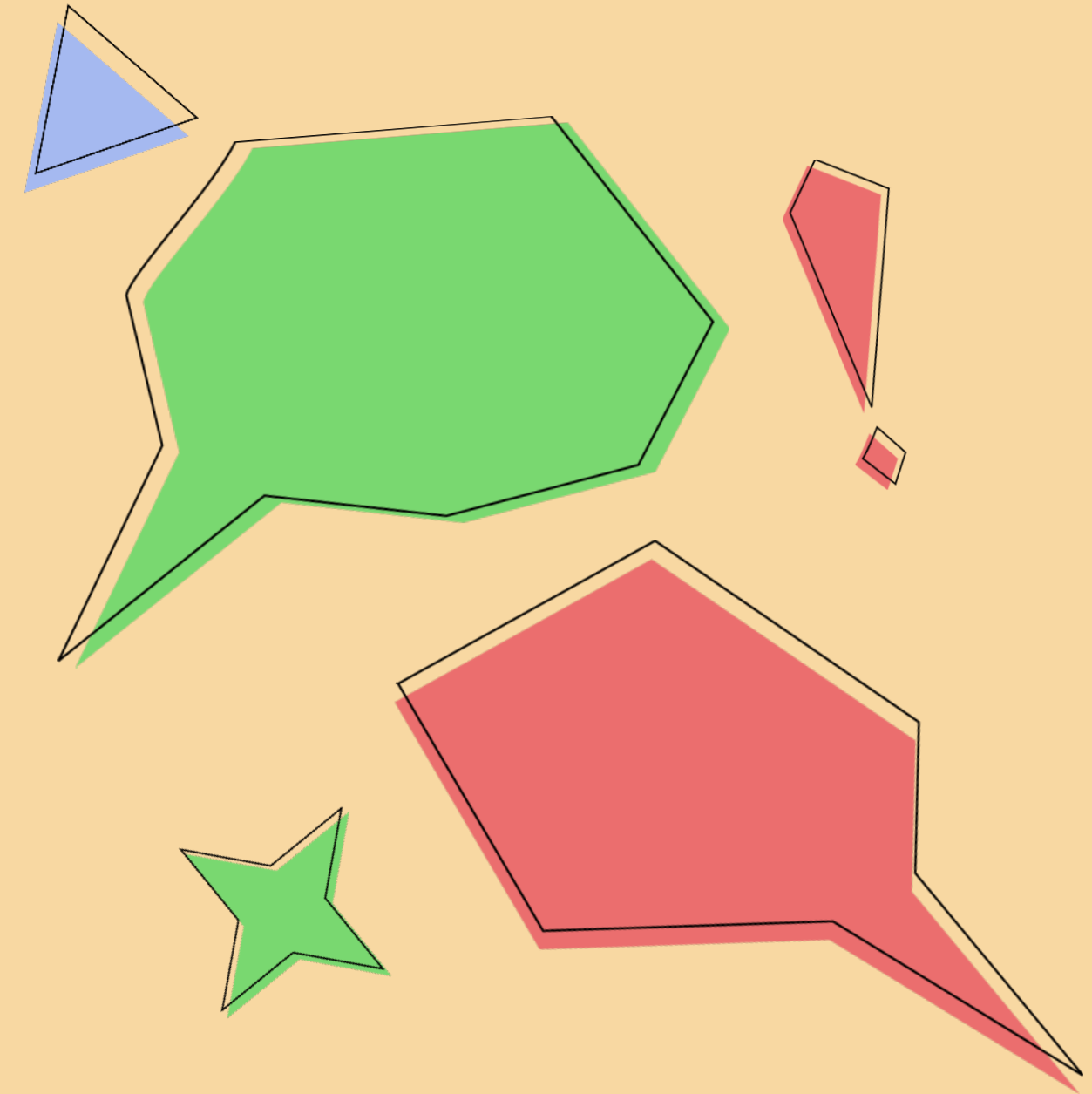


Анализ производительности: сравнение подходов по времени и памяти

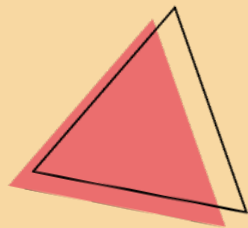
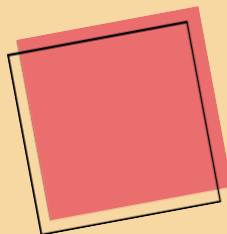
Наивный метод подсчёта инверсий обладает квадратичной временной сложностью $O(n^2)$, что не подходит для массивов большой длины из-за значительных затрат времени.

Данный оптимизированный метод требует дополнительной памяти порядка $O(n)$, что оправдано значительным сокращением времени вычислений в масштабных задачах.

Алгоритм сортировки слиянием улучшает производительность до $O(n \log n)$, позволяя эффективно обрабатывать большие наборы данных, особенно свыше 10^5 элементов.



Сравнительная таблица алгоритмов подсчёта инверсий

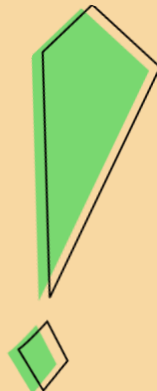
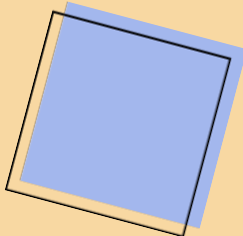
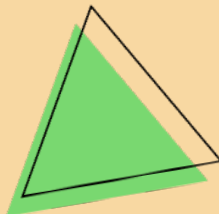


Алгоритм	Врем. сложность	Память	Применимость
Наивный	$O(n^2)$	$O(1)$	Малые массивы
Слияние	$O(n \log n)$	$O(n)$	Большие массивы

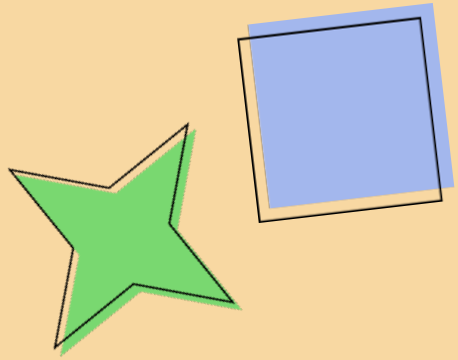
Анализ по времени, памяти и области применения различных методов подсчёта инверсий.

Оптимизация с использованием сортировки слиянием критична для задач с большими данными, где наивный подход становится непрактичен.

Cormen T. et al., 'Algorithms'

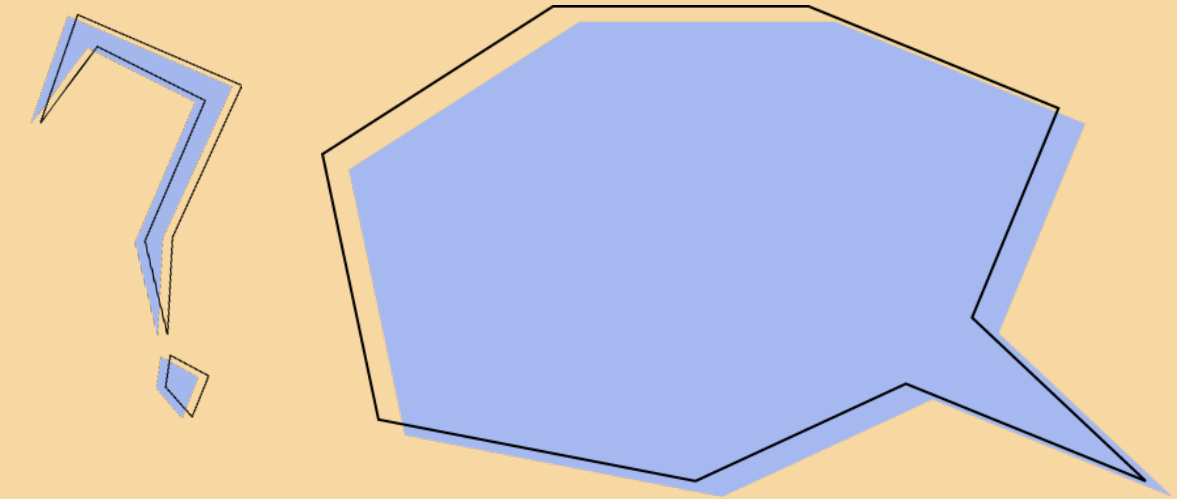


Инверсии в олимпиадных и конкурсных задачах

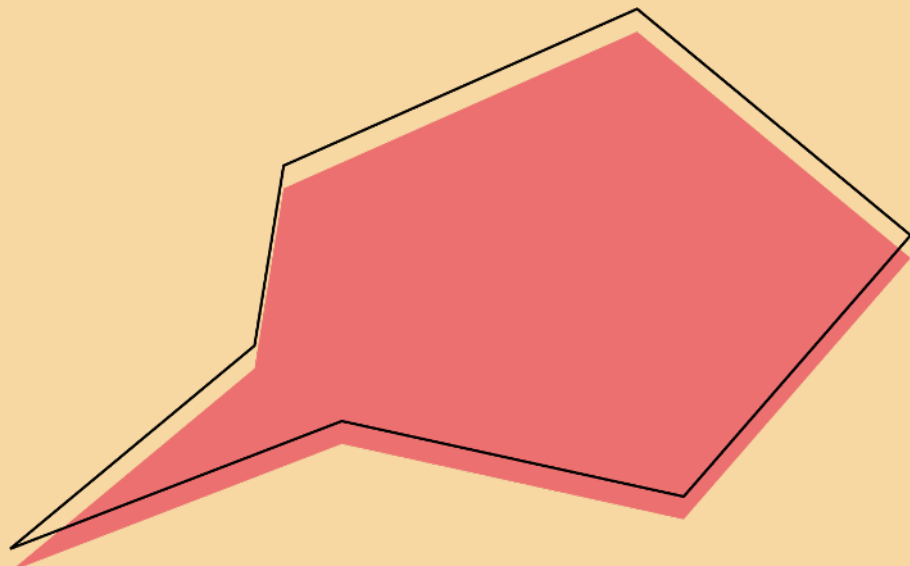


Подсчёт инверсий часто встречается на Всероссийской олимпиаде школьников и платформах Codeforces, AtCoder, требуя алгоритмического мышления и умения работать с большими массивами.

Решения задач включают оптимальные алгоритмы и часто затрагивают темы перестановок, паритета и динамического обновления инверсий при изменениях массива.



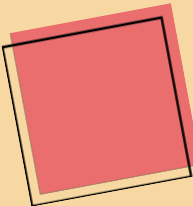
Участие в таких соревнованиях развивает навыки анализа структуры данных, что позволяет успешно решать сложные комбинаторные и алгоритмические задачи.





Пример задачи: минимизация обменов в перестановке через подсчёт инверсий

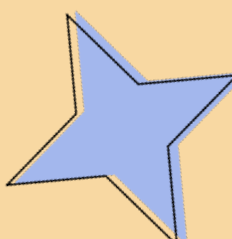
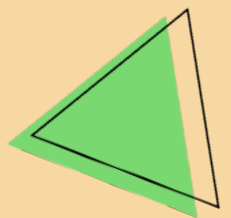
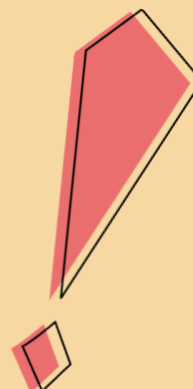
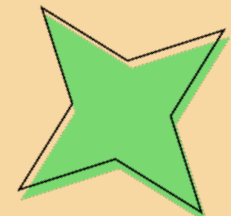
1. Дана перестановка из пяти чисел, требуется определить минимальное число обменов для её сортировки. Количество инверсий в перестановке отражает необходимое число обменов в алгоритме пузырьковой сортировки.
2. На примере перестановки 2, 3, 5, 1, 4 подсчитывается число инверсий, что даёт ответ на минимальное количество обменов для приведения массива к упорядоченному виду.



Чётность инверсий

определяет, является ли
перестановка чётной или
нечётной, что критично для
изучения алгебраических свойств
групп.

Групповая теория и комбинаторика



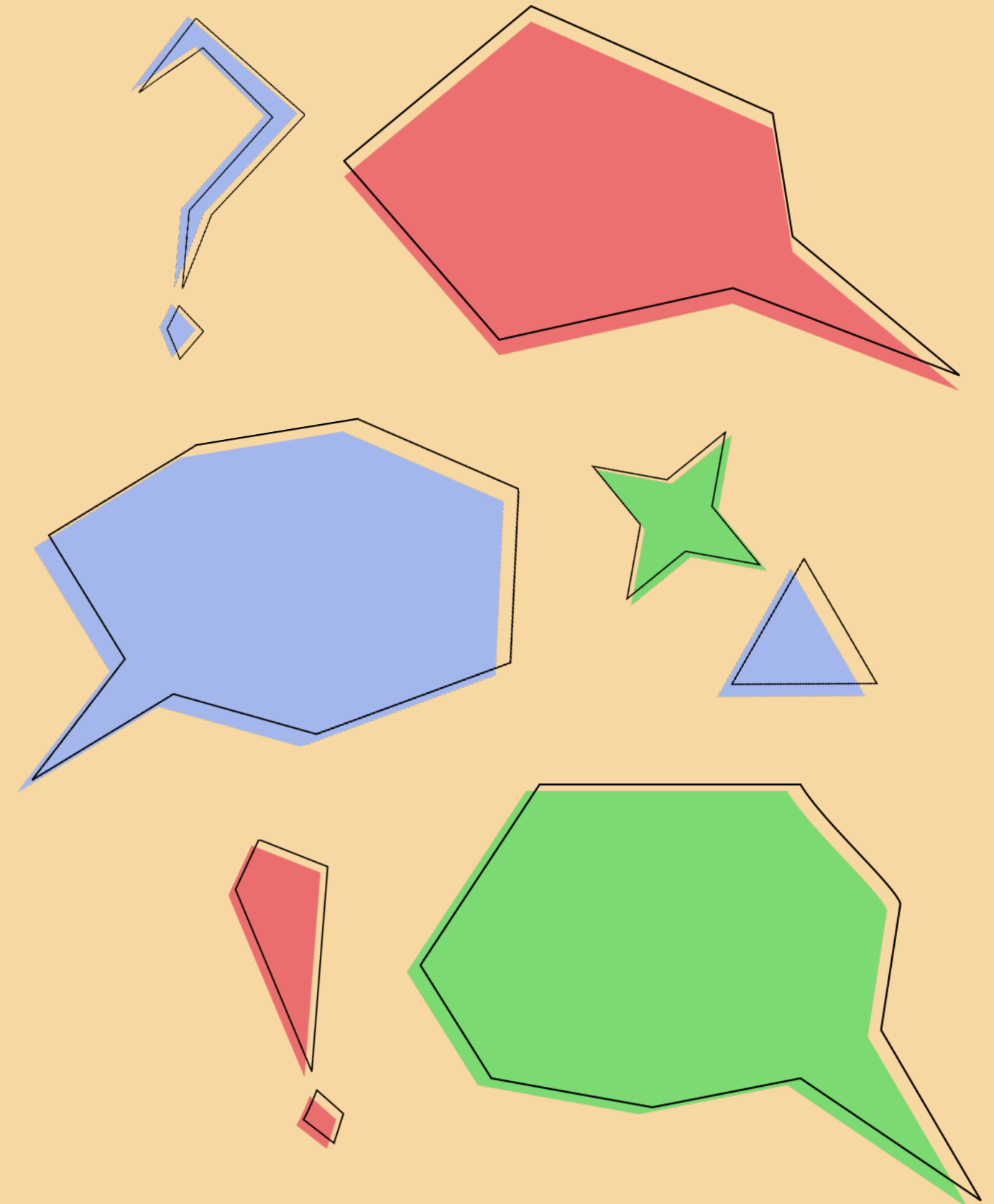
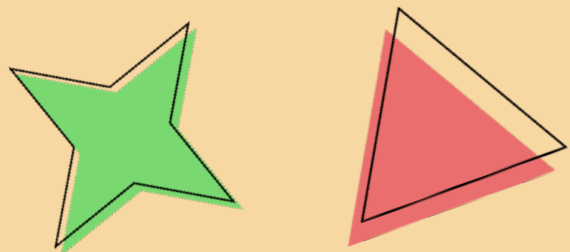
Чётность числа инверсий
однозначно связывает инверсии с
теорией перестановок. Этот
параметр используется при
анализе структуры групп и
доказательстве невозможности
некоторых преобразований.

Инверсии как инструмент биоинформатики и анализа ДНК

Подсчёт инверсий позволяет оценить эволюционные расстояния между различными видами, выявляя степень изменений последовательностей ДНК.

В биоинформатике инверсии помогают анализировать структурные перестановки геномов, что важно для выявления мутаций и сравнительного геномного анализа.

Этот метод дополнительно используется для проверки совпадения с эталонными последовательностями и выявления скрытых закономерностей в данных о наследственности.



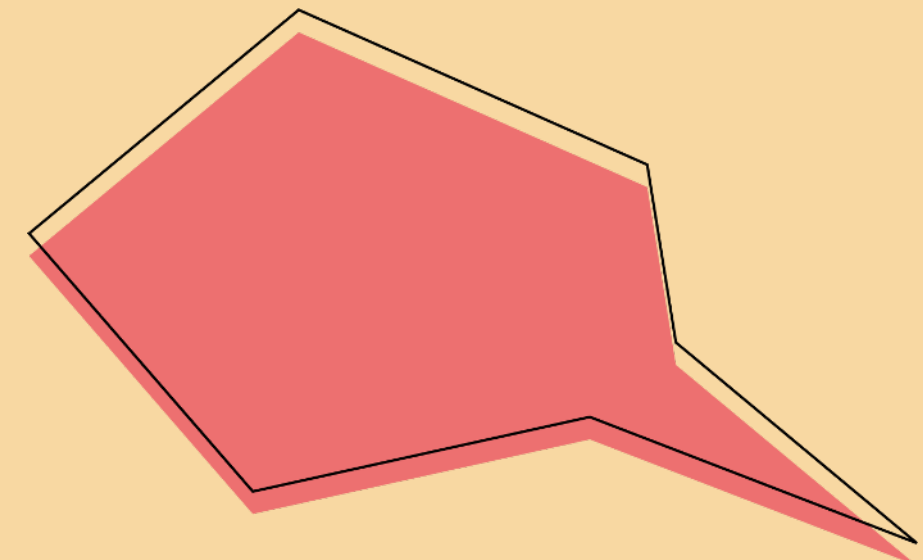
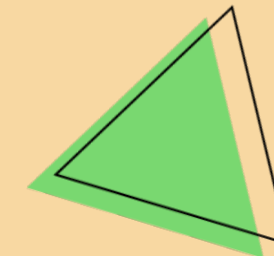
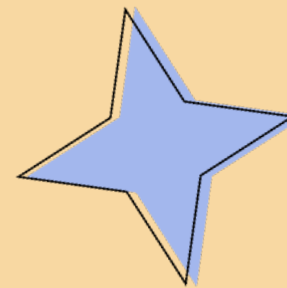
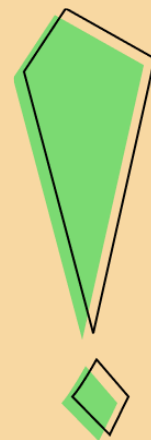
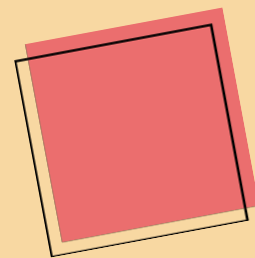
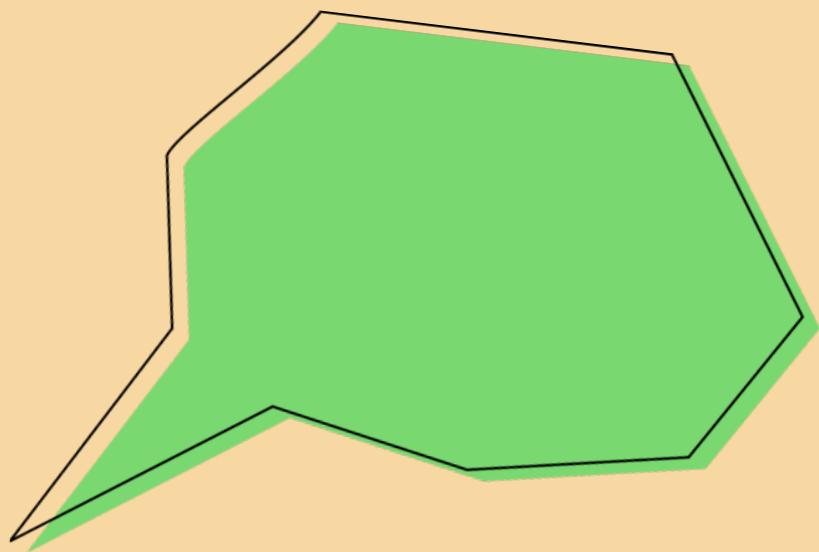
Использование анализа инверсий в экономических и статистических задачах

В экономике подсчёт инверсий помогает оценить различия между фактическими и прогнозируемыми динамиками показателей рынка.

Анализ инверсий выявляет степень хаотичности и нестабильности экономических процессов, способствуя обнаружению аномалий в данных.

В статистике инверсии применяются при ранжировании и сопоставлении данных, что важно для оценки корреляций и согласованности выборок.

Этот инструмент помогает проверять качество моделей и надёжность прогнозов на основе анализа последовательностей значений.



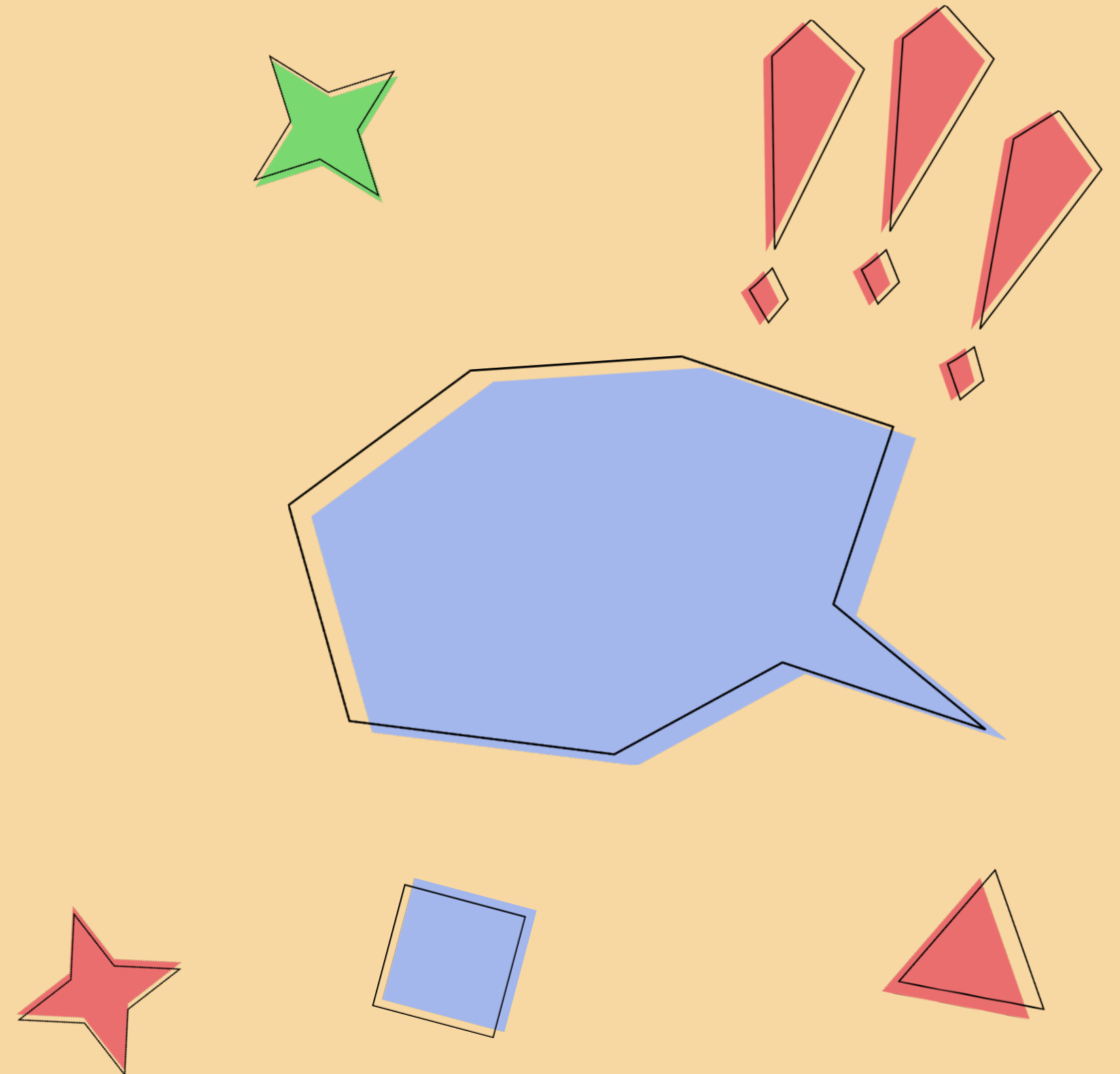
Современные исследования и обобщения понятия инверсии

Расширение классических методов подсчёта инверсий на многомерные массивы упрощает анализ сложных структур данных и изображений.

Использование деревьев Фенвика и сегментных деревьев позволяет эффективно вычислять инверсии в потоках данных и динамически изменяющихся массивах.

Исследуются возможности применения инверсий в графах и сетевых структурах для решения задач оптимизации и анализа связности.

Современные алгоритмы адаптируются для обработки больших потоков данных в режиме реального времени, что актуально для аналитики и мониторинга.





Инверсии: фундаментальный инструмент для глубокого понимания и приложений

Знание инверсий расширяет возможности в решении олимпиадных задач и прикладных исследований, обогащает понимание алгоритмов, являясь мощным универсальным инструментом в науке и технике.

