

Функция $y = ax^2$: график и свойства

Изучаем параболу, её вид и основные свойства.

Зачем нужна функция $y = ax^2$ в 9 классе

Эта функция помогает научиться читать формулы, строить графики по таблице и понимать, как знак коэффициента меняет форму параболы. Знания о ней нужны дальше при изучении квадратных уравнений и неравенств.



Определение функции и ее формула

Запись функции

Функция задаётся формулой $y = ax^2$, где a — любое число, кроме нуля. По этой записи для каждого значения x можно найти соответствующее значение y .

Любые значения x

Независимая переменная x может принимать любые действительные значения. Подставляя её в формулу, получают координаты точек, из которых затем строят график функции.

Начало координат

Если $x = 0$, то $y = 0$ при любом ненулевом a . Поэтому график обязательно проходит через точку $(0; 0)$, то есть через начало координат.

Вид точек графика

Каждая точка графика имеет координаты вида $(x; ax^2)$. Это позволяет быстро проверять, принадлежит ли точка параболе, и находить её по заданной формуле.

График функции $y = ax^2$ — параболола

1.

Основная форма

График функции $y = ax^2$ всегда является параболой. Его форма остаётся узнаваемой при любом ненулевом значении коэффициента a .

2.

Направление ветвей

Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, они направлены вниз, поэтому график выглядит как перевёрнутая параболола.

3.

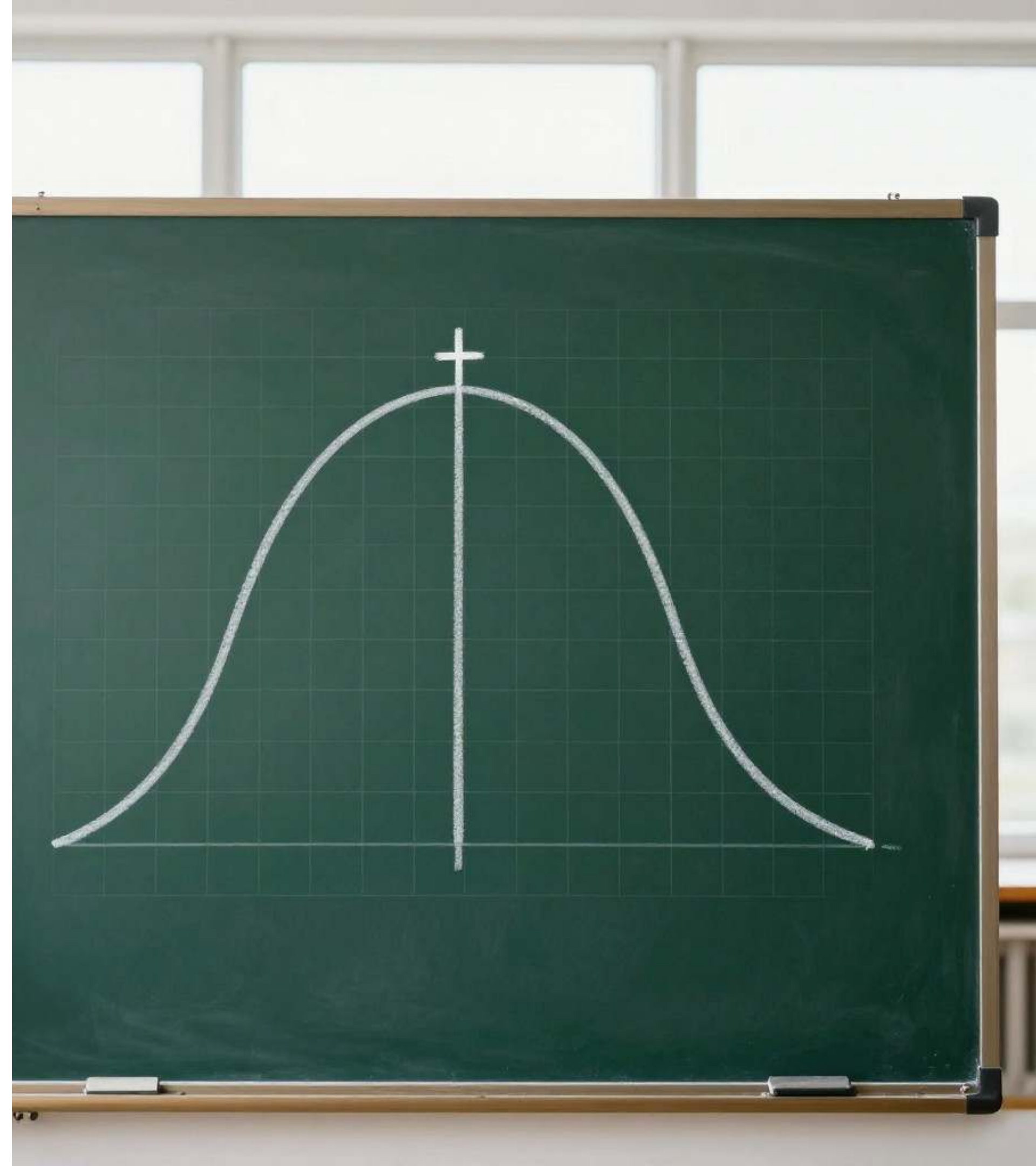
Ось симметрии

Параболола симметрична относительно оси y , то есть прямой $x = 0$. Левая и правая части графика являются зеркальными.

4.

Вершина графика

Вершина параболы находится в начале координат. Это самая низкая точка при $a > 0$ и самая высокая точка при $a < 0$.



Как коэффициент, a влияет на вид параболы

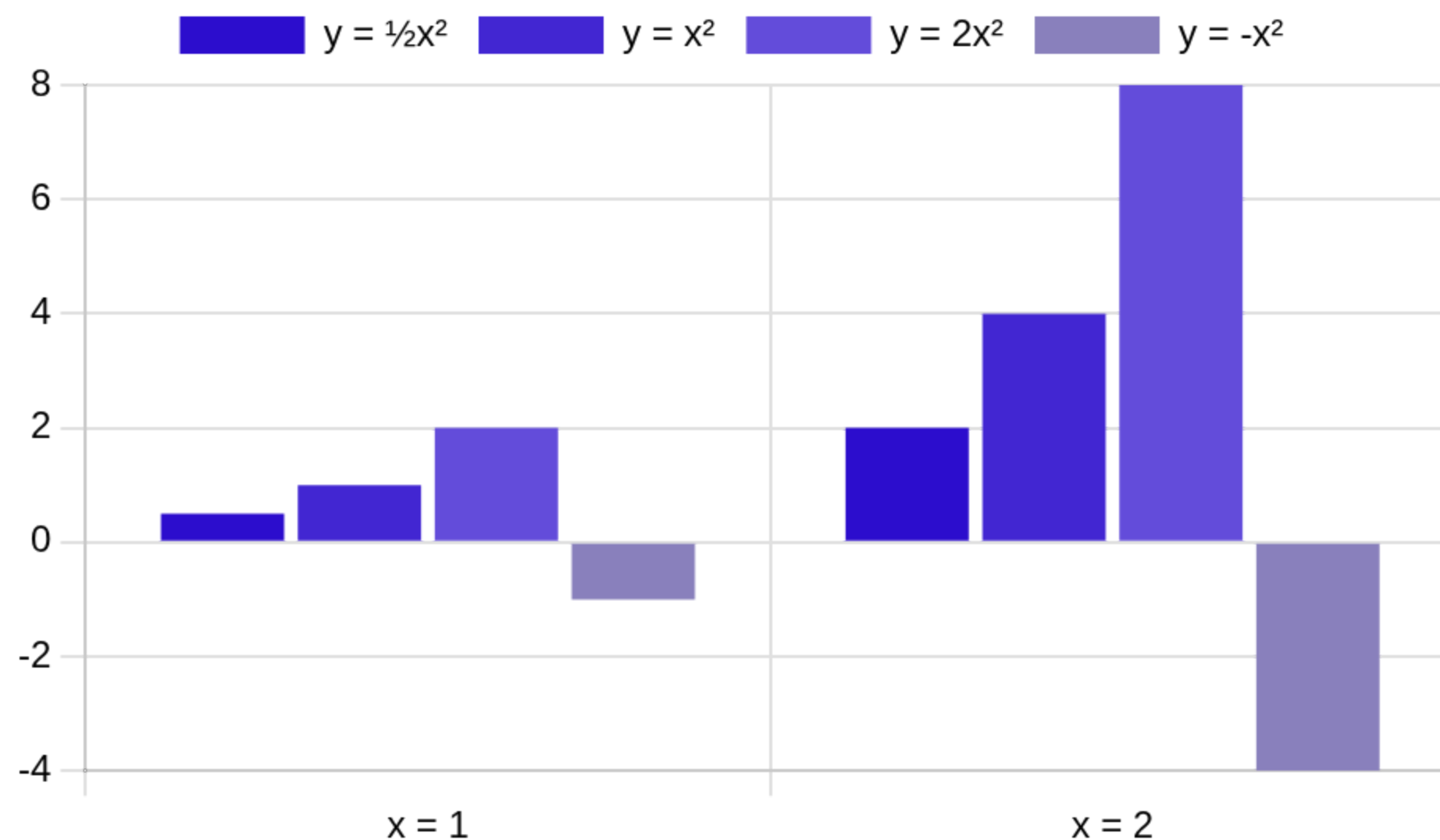
a	$x=2$	$x=-2$
$\frac{1}{2}$	2	2
1	4	4
2	8	8
-1	-4	-4

Сравним значения функции при одинаковых x и разных коэффициентах a .

Чем больше модуль a , тем быстрее растут значения по модулю и тем уже парабола. Знак a определяет, будут ли ветви направлены вверх или вниз.

Значения вычислены по формуле $y = ax^2$ при $x = \pm 2$.

Сравнение значений функции при разных коэффициентах



Все функции рассчитаны для одинаковых значений x , чтобы было удобно сравнивать скорость изменения результата.

При большем модуле коэффициента значения по модулю увеличиваются быстрее. Отрицательный коэффициент меняет только знак результата.

Вычисления по формуле $y = ax^2$ при $x = 1$ и $x = 2$.

Область определения и область значений

1. Область определения

Функция $y = ax^2$ определена при любых действительных значениях x . Ограничений на выбор x нет, потому что квадрат можно найти для любого числа.

2. Значения при $a > 0$

Когда a положительно, значения функции не бывают отрицательными. Наименьшее значение равно 0 и достигается в вершине параболы, то есть в точке $(0; 0)$.

3. Значения при $a < 0$

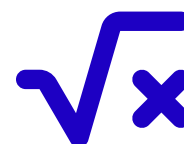
Когда a отрицательно, значения функции не бывают положительными. Наибольшее значение равно 0 и также достигается в вершине, расположенной в начале координат.

Симметрия графика относительно оси y



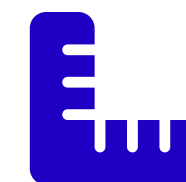
Зеркальные точки

Если точка $(x; y)$ лежит на графике, то точка $(-x; y)$ тоже ему принадлежит. Это удобно проверять при построении параболы по таблице значений.



Квадрат числа

Значение x возводится в квадрат, поэтому одинаковые результаты получаются и для положительного, и для отрицательного числа. Из-за этого правая и левая части графика совпадают по форме.



Быстрое построение

Достаточно найти несколько точек справа от оси y , а затем отметить симметричные точки слева. Такой способ экономит время и помогает избежать ошибок.

Построение графика по таблице значений

Последовательность действий при построении параболы по формуле $y = ax^2$

У этой функции единственный ноль, поэтому график проходит через начало координат и больше не пересекает ось x .

1

точка пересечения с осями
есть у графика $y = ax^2$

Свойства функции $y = ax^2$, так как $a \neq 0$.

Вершина параболы и ее роль в свойствах функции

1.

Главная точка графика

Вершина параболы $y = ax^2$ всегда совпадает с началом координат: точка $(0; 0)$. Именно с нее начинается построение графика и определяются его ключевые свойства.

2.

Минимум или максимум

Если, $a > 0$, вершина является самой низкой точкой графика, то есть точкой минимума. При, $a < 0$ она становится самой высокой точкой, то есть максимумом.

3.

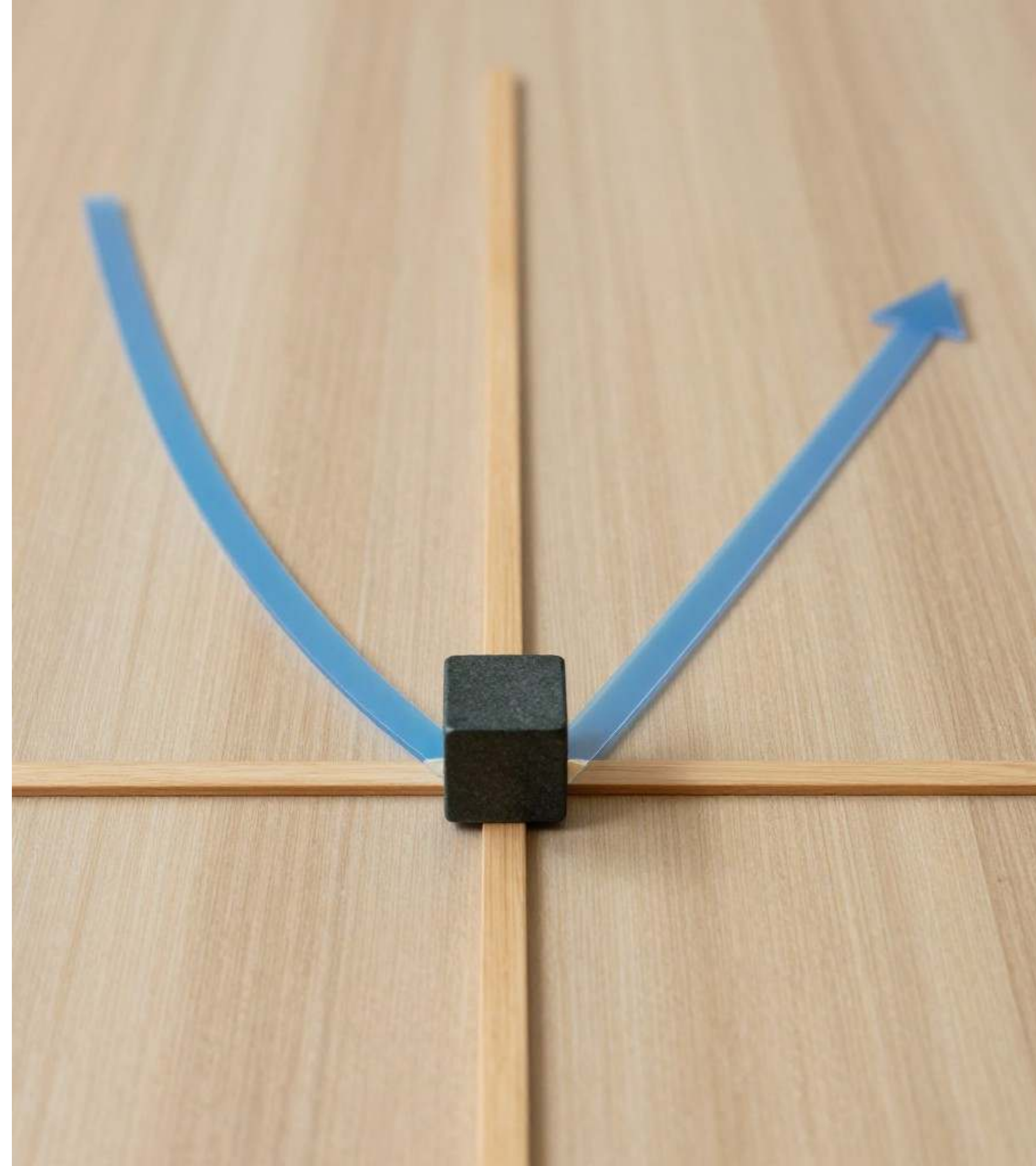
Убывание и возрастание

Положение вершины помогает понять, где функция убывает и где возрастает. При положительном, a график идет вниз слева от нуля и вверх справа, а при отрицательном — наоборот.

4.

Опора для анализа

Зная вершину, можно быстро определить ось симметрии, область значений и пересечение с осями. Поэтому вершина служит отправной точкой для полного описания параболы.



Сравнение свойств при, $a > 0$ и, $a < 0$

Таблица показывает, как меняются свойства одной и той же формулы в зависимости от знака коэффициента a .

Знак коэффициента полностью меняет направление ветвей и смысл вершины, но не меняет саму симметричную форму графика.

Признак	$a > 0$	$a < 0$
Ветви	вверх	вниз
Значения y	неотрицательные	неположительные
Вершина	минимум	максимум
Общий вид	парабола	парабола

Где в жизни встречается параболическая форма

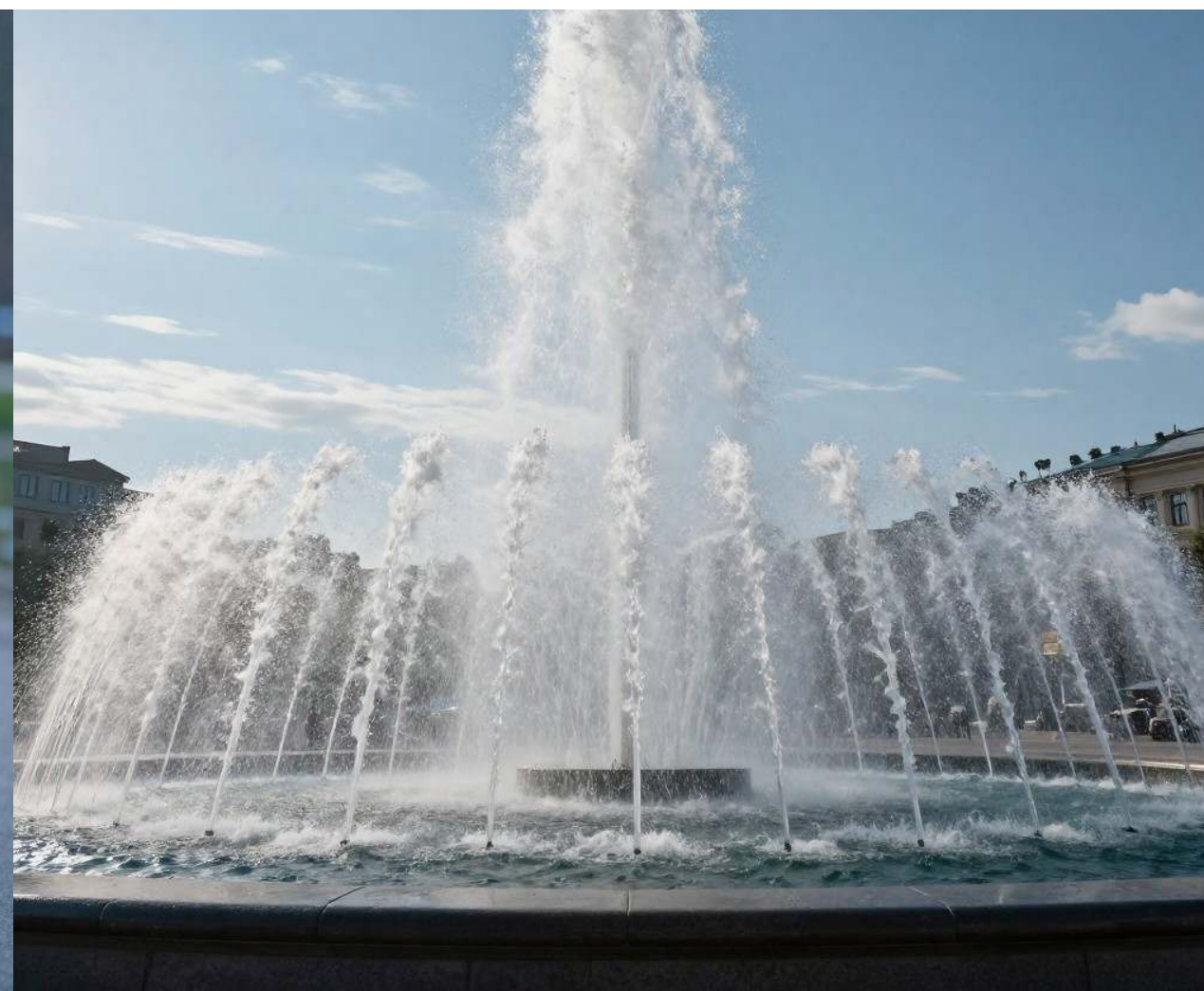
Мяч, летящий по дуге

Когда мяч бросают вверх, его движение выглядит как плавная дуга. На рисунке можно показать момент полета, где траектория поднимается, затем опускается и сохраняет симметричный изгиб, похожий на параболу.



Струя воды из фонтана

Вода, вылетающая из фонтана, тоже образует красивую дугу. Если смотреть сбоку, виден изгиб, который удобно сравнить с графиком квадратичной функции. Такой пример легко узнают даже без сложных вычислений.

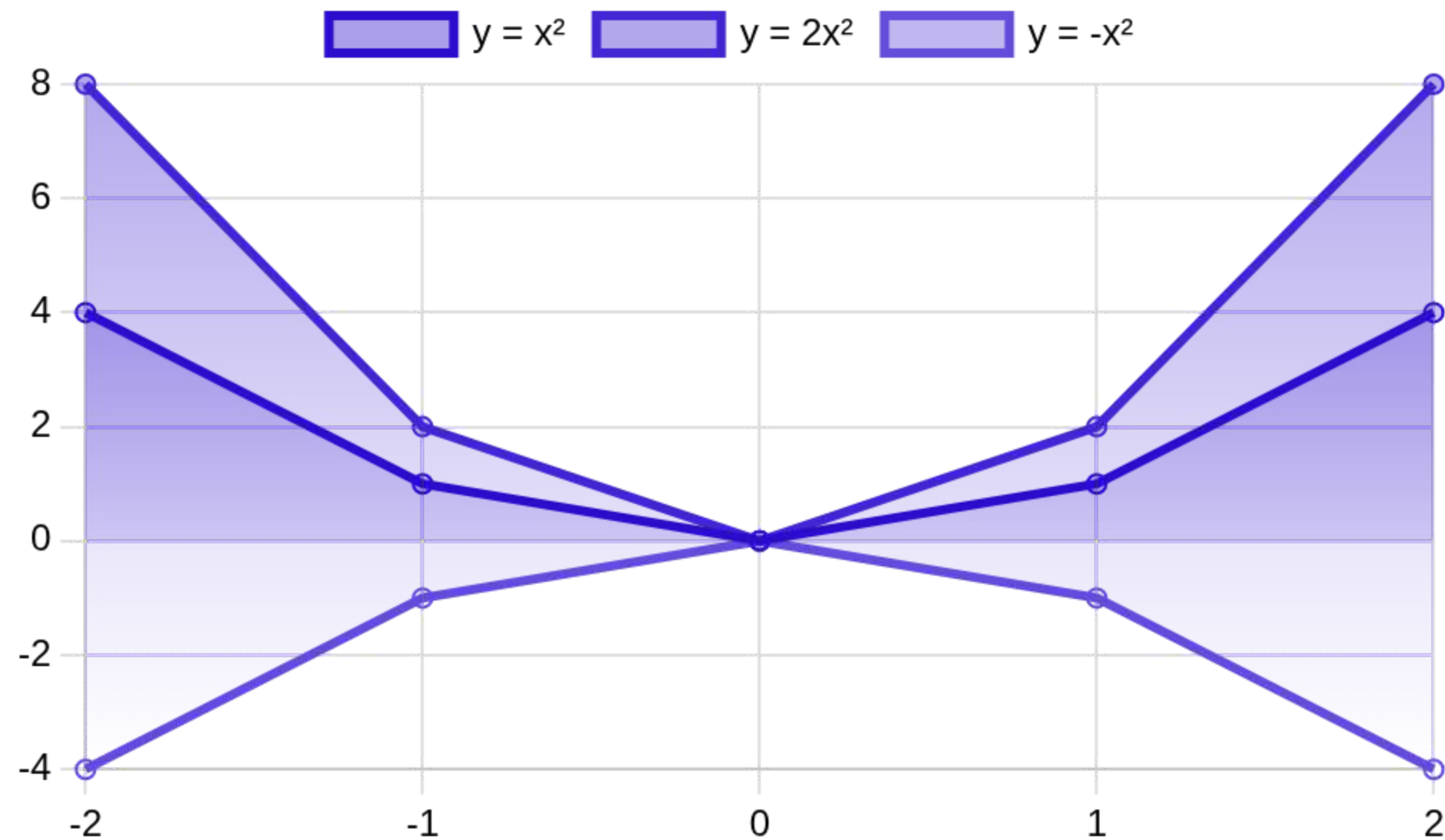


Параболическая форма в технике

Похожий силуэт встречается в арках, отражателях и некоторых деталях конструкций. Для изображения подойдет дуга моста или техническая деталь, где важны плавность линии и симметрия относительно оси.



Сравнение графиков $y = x^2$, $y = 2x^2$ и $y = -x^2$



По точкам видно, что все три функции проходят через начало координат и сохраняют симметрию относительно оси y .

При большем модуле коэффициента график становится круче; отрицательный коэффициент меняет только направление ветвей.

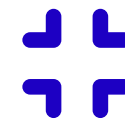
Вычисления по формуле $y = ax^2$ для $x = -2, -1, 0, 1, 2$

Что можно определить по графику



Направление ветвей

Если ветви поднимаются вверх, коэффициент a положительный. Если график направлен вниз, коэффициент отрицательный. Этот признак замечен сразу и помогает быстро понять знак числа a .



Ширина параболы

Чем больше модуль a , тем уже и круче парабола. При малом модуле график выглядит более пологим, поэтому значения y меняются медленнее при удалении от нуля.



Вершина графика

Вершина показывает наименьшее или наибольшее значение функции. Для $y = ax^2$ она находится в начале координат, поэтому ее легко отметить при построении и анализе.



Область значений

По положению ветвей сразу видно, какие значения может принимать y . Для $a > 0$ это все неотрицательные числа, а для $a < 0$ — все неположительные.

Алгоритм анализа функции $y = ax^2$

Последовательность действий для полного описания графика и его свойств

Типичные ошибки при изучении темы

Одинаковая форма

Иногда считают, что все параболы выглядят одинаково. На самом деле их ширина меняется в зависимости от модуля коэффициента a , поэтому графики могут быть заметно уже или шире.

Путаница со знаком

Часто путают знак коэффициента a и знак значений y . Нужно помнить: a определяет направление ветвей, а знак y зависит от положения точки на графике.

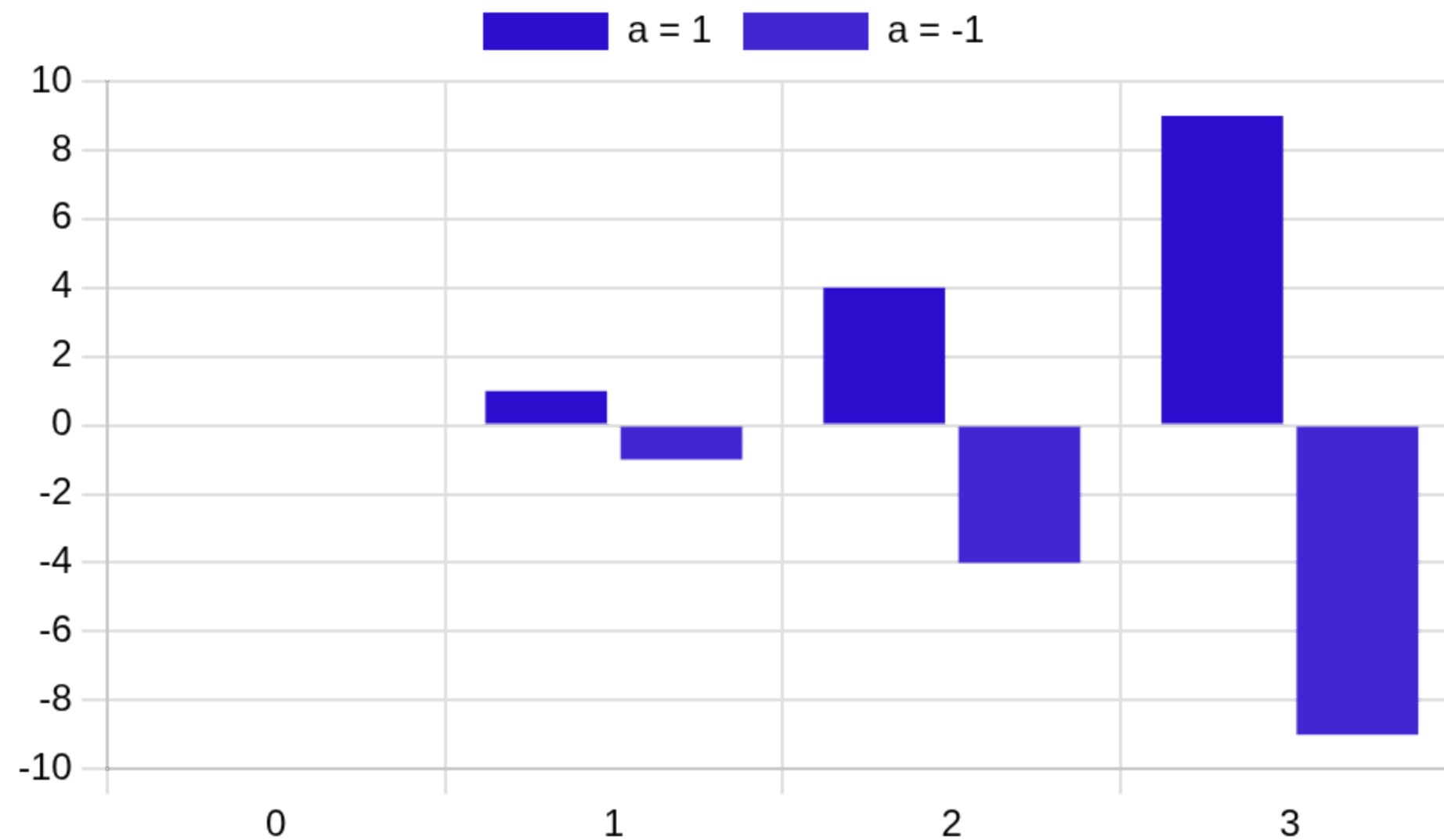
Забывтое начало координат

Некоторые забывают, что при $x = 0$ всегда получается $y = 0$. Из-за этого неверно отмечают вершину и теряют точку, через которую проходит любой график $y = ax^2$.

Ошибки в квадрате

Неверное вычисление квадратов приводит к неправильным точкам. Особенно важно помнить, что 3^2 и $(-3)^2$ равны 9, потому что квадрат любого числа не бывает отрицательным.

Как растёт значение y при увеличении x



При одинаковых x значения отличаются только знаком, поэтому хорошо видно действие коэффициента a на результат вычислений.

Квадрат растёт быстро, а знак коэффициента меняет лишь направление значений вверх или вниз.

Вычисления по формуле $y = ax^2$ для $a = 1$ и $a = -1$

Основные свойства функции в краткой записи

1. Область определения

Функция $y = ax^2$ определена при любых действительных значениях x . Это значит, что для нее можно подставить любое число и получить соответствующее значение y .

2. Форма графика

График этой функции всегда представляет собой параболу. Она симметрична относительно оси y , а ее вершина находится в точке $(0; 0)$, где функция принимает особое значение.

3. Направление ветвей

Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, они направлены вниз. По этому признаку сразу можно определить знак коэффициента a .

4. Область значений

При положительном a значения функции неотрицательны, а при отрицательном — неположительны. Поэтому вся область значений зависит только от знака коэффициента и положения вершины.

Функция $y = ax^2$: простая формула, богатые свойства

Функция $y = ax^2$ показывает, как одна формула может задавать разные параболы. Знак a меняет направление ветвей, а модуль a — их ширину, поэтому график легко анализировать и сравнивать.