

Взаимное расположение двух окружностей

Как две окружности расположены
на плоскости?



Почему это важно



Окружности встречаются в чертежах, механизмах и задачах по геометрии. Достаточно сравнить расстояние между центрами и радиусы, чтобы понять число общих точек и вид расположения фигур.

Основные обозначения и величины

Центры окружностей

Центры двух окружностей обозначают O_1 и O_2 . Именно отрезок между ними помогает понять, как расположены фигуры на чертеже и можно ли ожидать пересечение или касание.

Радиусы

Радиусы обозначают r_1 и r_2 . Они показывают размер каждой окружности и входят в главные сравнения, по которым определяют число общих точек и взаимное положение окружностей.

Расстояние между центрами

Расстояние между центрами обозначают $d = O_1O_2$. Это главная величина для проверки: она показывает, насколько близко или далеко находятся окружности друг от друга.

Сумма радиусов

Сравнение с величиной $r_1 + r_2$ помогает понять, могут ли окружности пересекаться или только соприкасаться снаружи. Эта граница разделяет разные варианты расположения.

Разность радиусов

Величина $|r_1 - r_2|$ нужна для проверки внутреннего касания и вложенности. Она показывает, может ли меньшая окружность оказаться внутри большей без пересечения.

Что видно на чертеже двух окружностей

Два центра

На рисунке сначала отмечают два центра и соединяющий их отрезок. По их положению легко оценить, насколько близко расположены окружности и в какую сторону направлена проверка условий.

Два радиуса

Радиусы показывают размер каждой окружности и помогают сравнить их между собой. Без этих данных нельзя точно определить, будет ли касание, пересечение или полное вложение.

Общие точки

Если окружности пересекаются, на чертеже видны две общие точки. При касании заметна только одна, а при раздельном расположении общих точек нет.

Линия центров

Линия, соединяющая центры, помогает сопоставить рисунок с формулами. Она особенно важна в случаях касания, потому что тогда все ключевые точки оказываются на одной прямой.

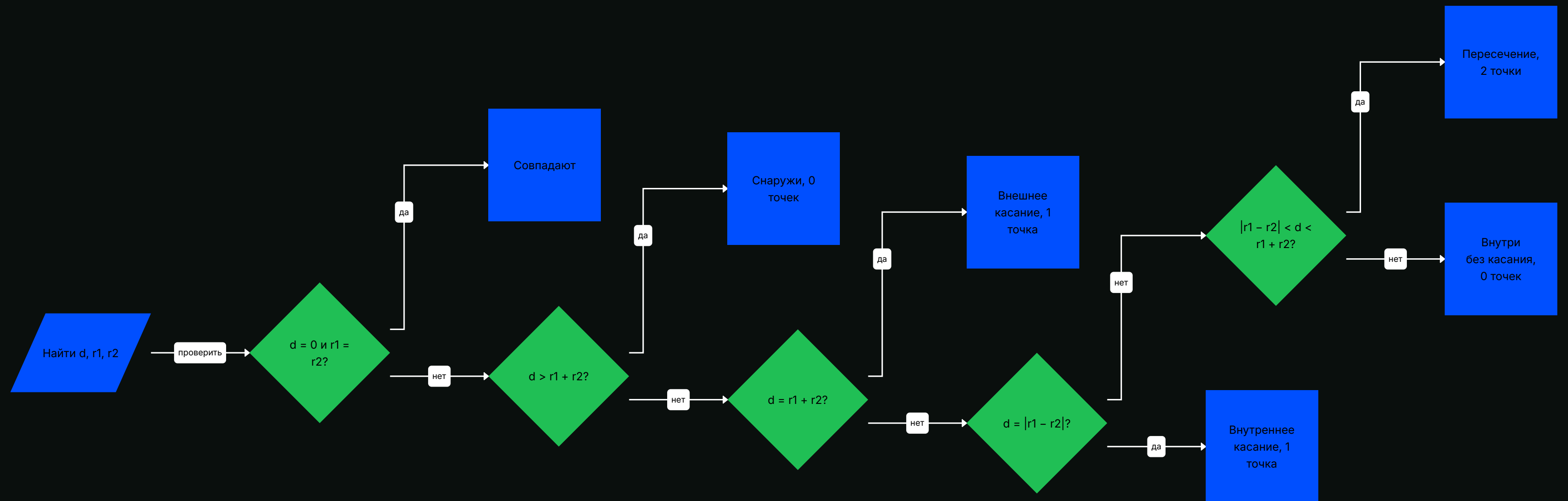
Вид ситуации

По чертежу можно сразу заметить базовый случай: две общие точки, одна общая точка или отсутствие общих точек. Это ускоряет решение и делает проверку ответа наглядной.



Как определить взаимное расположение

Проверка строится на сравнении расстояния между центрами с двумя границами



Условия и число общих точек

Условие	Точки	Вид
$d > r_1 + r_2$	0	снаружи
$d = r_1 + r_2$	1	внешнее касание
$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2	пересечение
$d = r_1 - r_2 $	1	внутреннее касание
$d < r_1 - r_2 $	0	внутри
$d = 0, r_1 = r_2$	∞	совпадение

Таблица показывает, как сравнение d с двумя границами определяет число общих точек и вид расположения окружностей.

Каждое сравнение d с $r_1 + r_2$ и $|r_1 - r_2|$ соответствует одному точному случаю.

Правила взаимного расположения двух окружностей

Число общих точек у двух окружностей

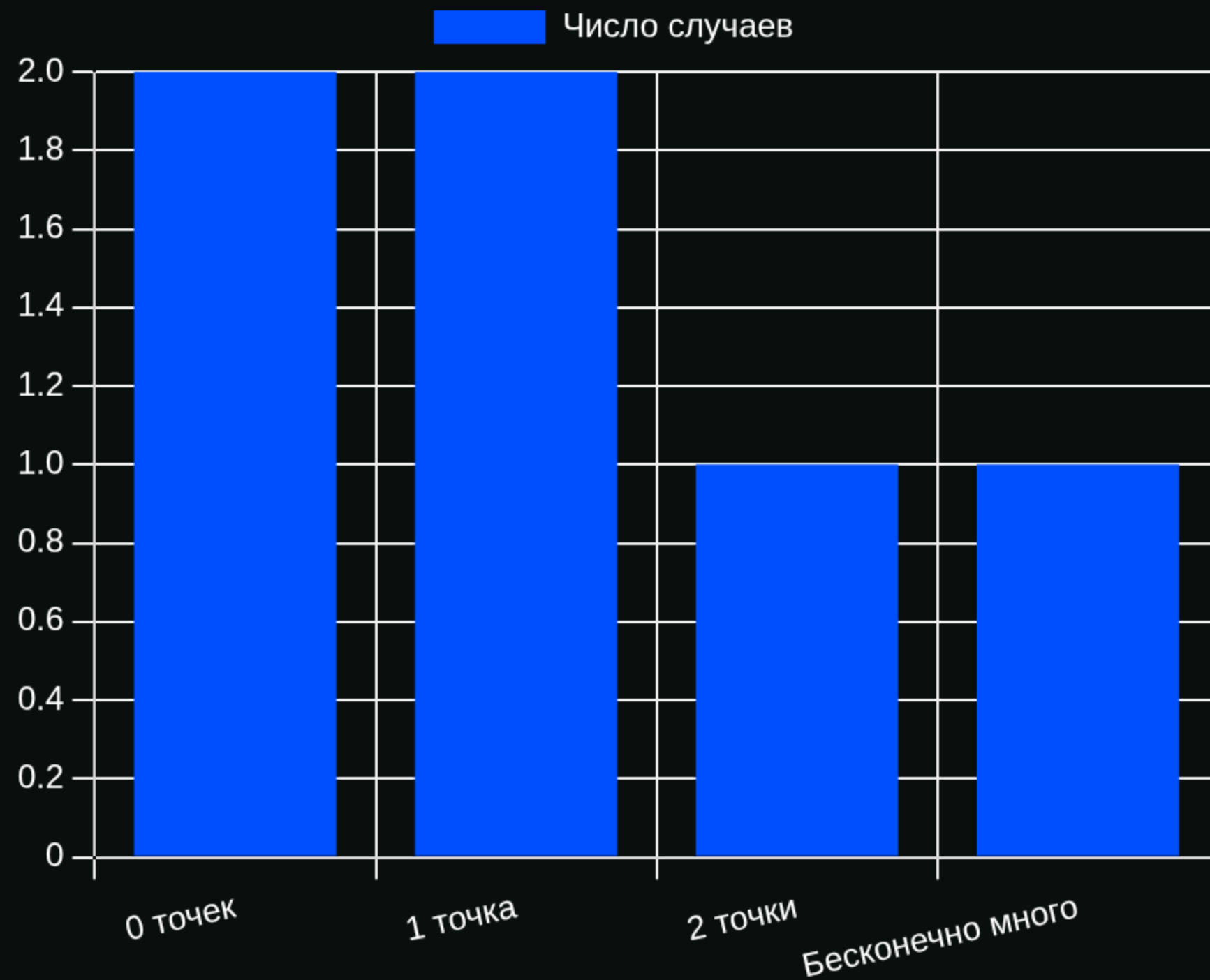


Диаграмма показывает, что одинаковое число общих точек может соответствовать разным видам расположения, поэтому важны дополнительные сравнения.

Большинство случаев дают 0 или 1 общую точку; две точки и бесконечно много точек встречаются реже.

Сводка по случаям из темы «Взаимное расположение двух окружностей»

Пересечение окружностей в двух точках

Главное условие

Если $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, окружности пересекаются в двух точках. Это означает, что ни одна из границ не достигнута.

1

Как выглядит рисунок

На чертеже каждая окружность входит в область другой, и видно две общие точки. Между ними образуется фигура, похожая на узкую «линзу».

2

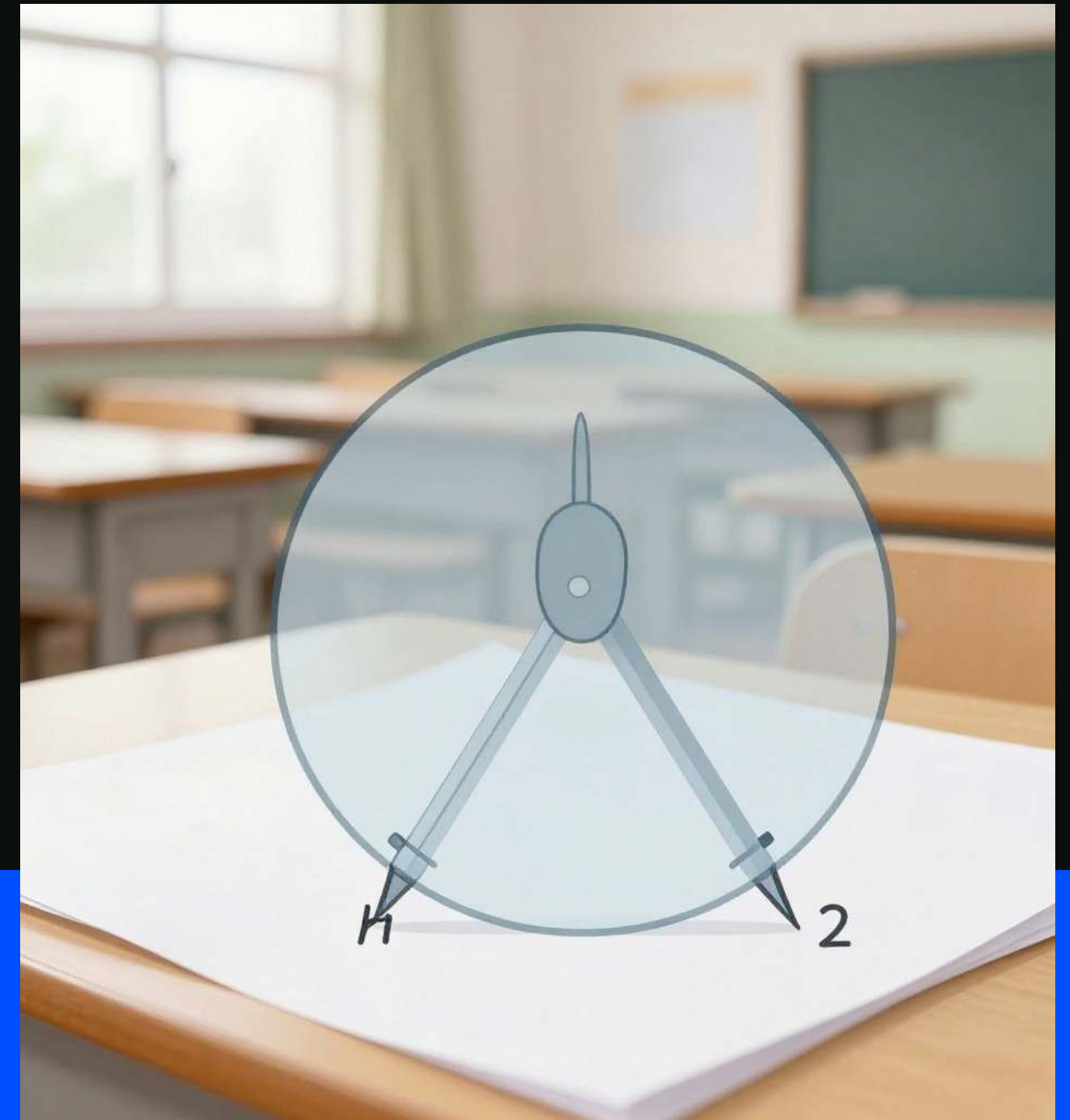
Роль линии центров

Отрезок O_1O_2 помогает сравнить расстояние между окружностями, но он не проходит через обе точки пересечения. Поэтому его используют для проверки условий, а не для поиска самих точек.

Где встречается случай

Такое расположение часто появляется в задачах на построение и в рисунках с пересекающимися дугами. Здесь особенно важно не спутать пересечение с касанием.

4



Внешнее касание окружностей



「1」

Одно общее место

При $d = r_1 + r_2$ окружности касаются снаружи и имеют ровно одну общую точку. Это значит, что они соприкасаются, но не заходят друг на друга.

「2」

Одна прямая

Центры окружностей и точка касания лежат на одной прямой. Такую же прямую образуют и радиусы, проведённые в точку касания от обоих центров.

「3」

Чем отличается от пересечения

При касании нет второй общей точки. Поэтому важно не ограничиваться рисунком: нужно обязательно проверить равенство суммы расстояния и радиусов.

Внутреннее касание окружностей

Главное условие

Если $d = |r_1 - r_2|$, меньшая окружность касается большей изнутри. Общая точка только одна, и это сразу отличает случай от пересечения.

1

Какая окружность внутри

Большая окружность полностью содержит меньшую, но не перерезает её. На чертеже видно, что фигуры соприкасаются в одной точке внутренней стороны.

2

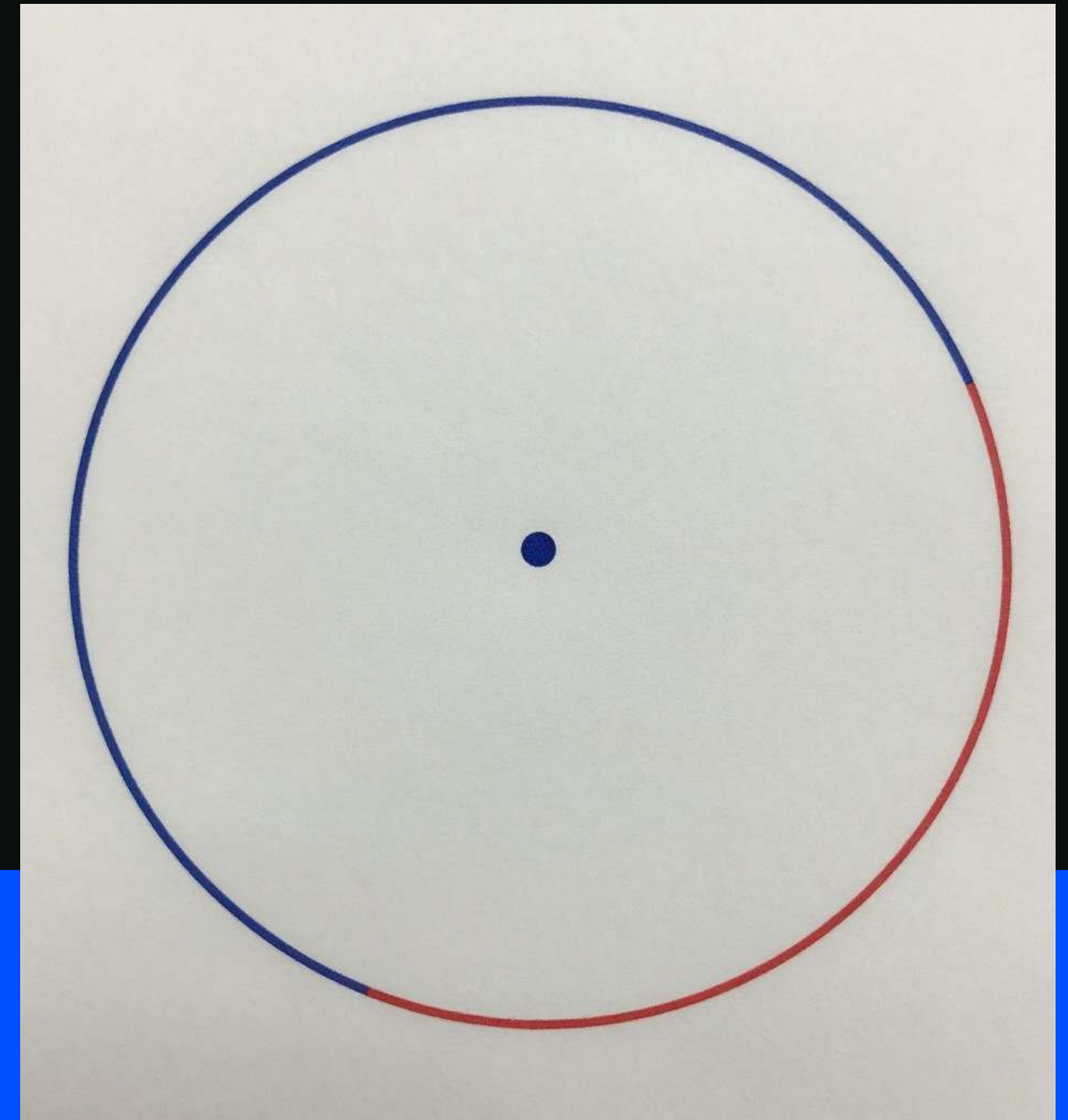
Линия центров

Точка касания лежит на линии, соединяющей центры. Радиусы в этой точке тоже лежат на одной прямой, что удобно для проверки решения.

Почему нужен модуль

Для внутреннего касания важно сравнивать d не с простой разностью, а с модулем $|r_1 - r_2|$. Тогда не возникает ошибки при выборе большей и меньшей окружности.

4



Одна окружность внутри другой без касания



「1」

Положение фигур

Меньшая окружность целиком находится внутри большей и не пересекает её границу. Между ними остаётся заметный промежуток, поэтому общих точек нет.

「2」

Главный признак

Для этого случая расстояние между центрами строго меньше модуля разности радиусов: $d < |r_1 - r_2|$. Именно это отличает его от внутреннего касания, где равенство уже выполняется.

「3」

Как выглядит на чертеже

На рисунке одна окружность расположена полностью внутри другой, а линии дуг нигде не соприкасаются. Такая схема помогает быстро понять, что ответ — ноль общих точек.

Окружности без общих точек снаружи



Удалённое расположение

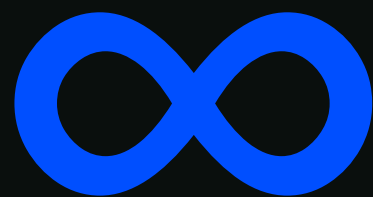
Окружности находятся отдельно друг от друга и не имеют ни одной точки соприкосновения. Между ними есть свободное пространство, заметное даже на схематическом чертеже.

Условие сравнения

Этот случай возникает, когда $d > r_1 + r_2$. Расстояние между центрами больше суммы радиусов, поэтому окружности не могут дотянуться друг до друга.

Число общих точек

При таком расположении общих точек нет. Это самый удобный случай для проверки: достаточно сравнить расстояние между центрами с суммой радиусов.



общих точек бывает только у совпадающих окружностей.

Правило взаимного расположения двух окружностей
в евклидовой геометрии.

Если центры совпадают, а радиусы равны, две окружности накладываются полностью. Тогда общих точек бесконечно много, и на чертеже видна одна фигура.

Границы, которые разделяют все случаи

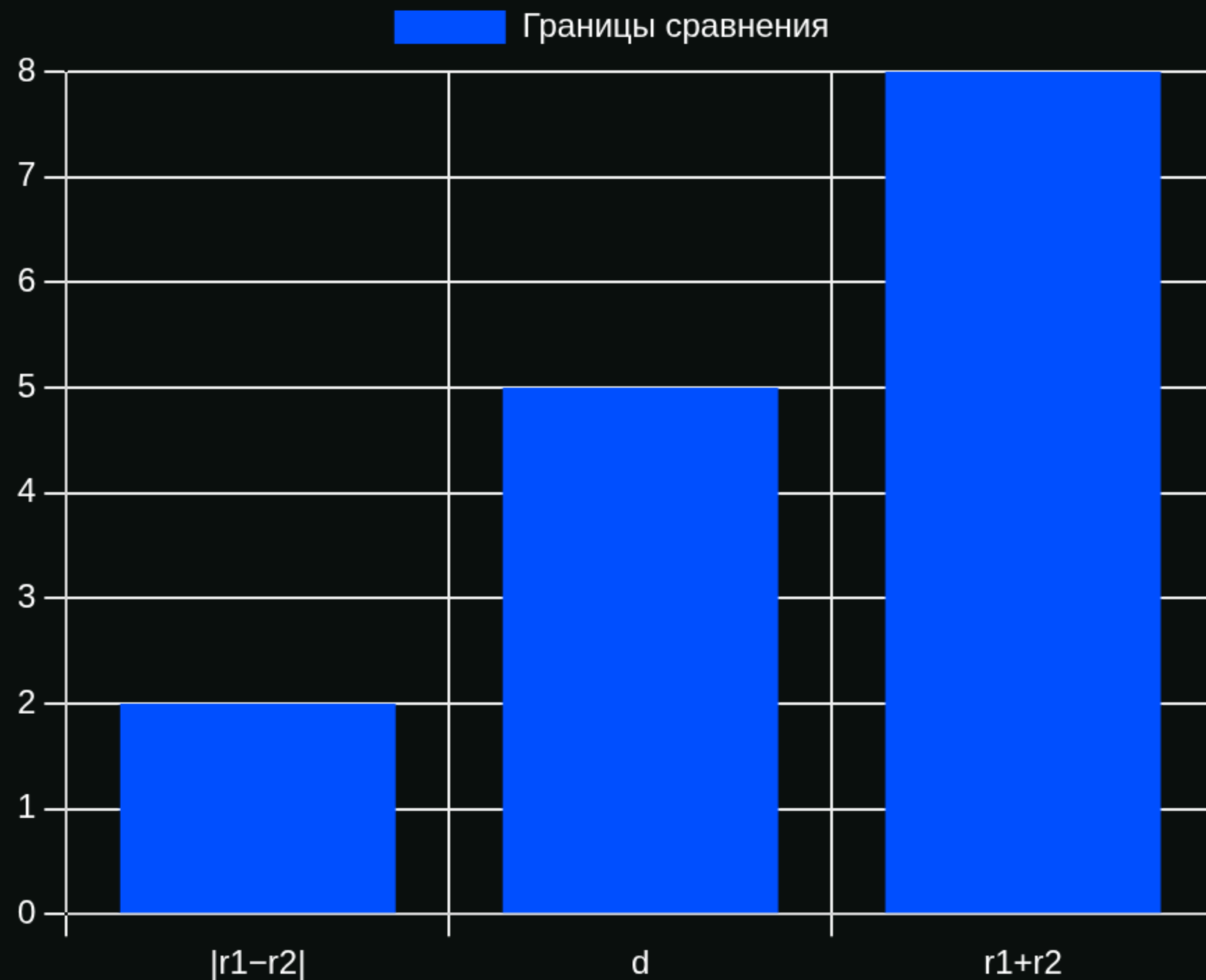


Схема показывает, как одно и то же расстояние d попадает между нижней и верхней границами или выходит за их пределы.

Если d меньше нижней границы — вложенность; между границами — пересечение; на границах — касание; выше верхней — внешнее расположение.

Схематическое сравнение величин d , $r_1 + r_2$ и $|r_1 - r_2|$.

Числовые примеры

Снаружи без касания

Пусть $r_1=5$, $r_2=3$, $d=9$. Сумма радиусов равна 8, а 9 больше 8, значит окружности расположены отдельно и общих точек не имеют.

1

Внешнее касание

Пусть $r_1=5$, $r_2=3$, $d=8$. Здесь d равно r_1+r_2 , поэтому окружности касаются снаружи и имеют ровно одну общую точку.

2

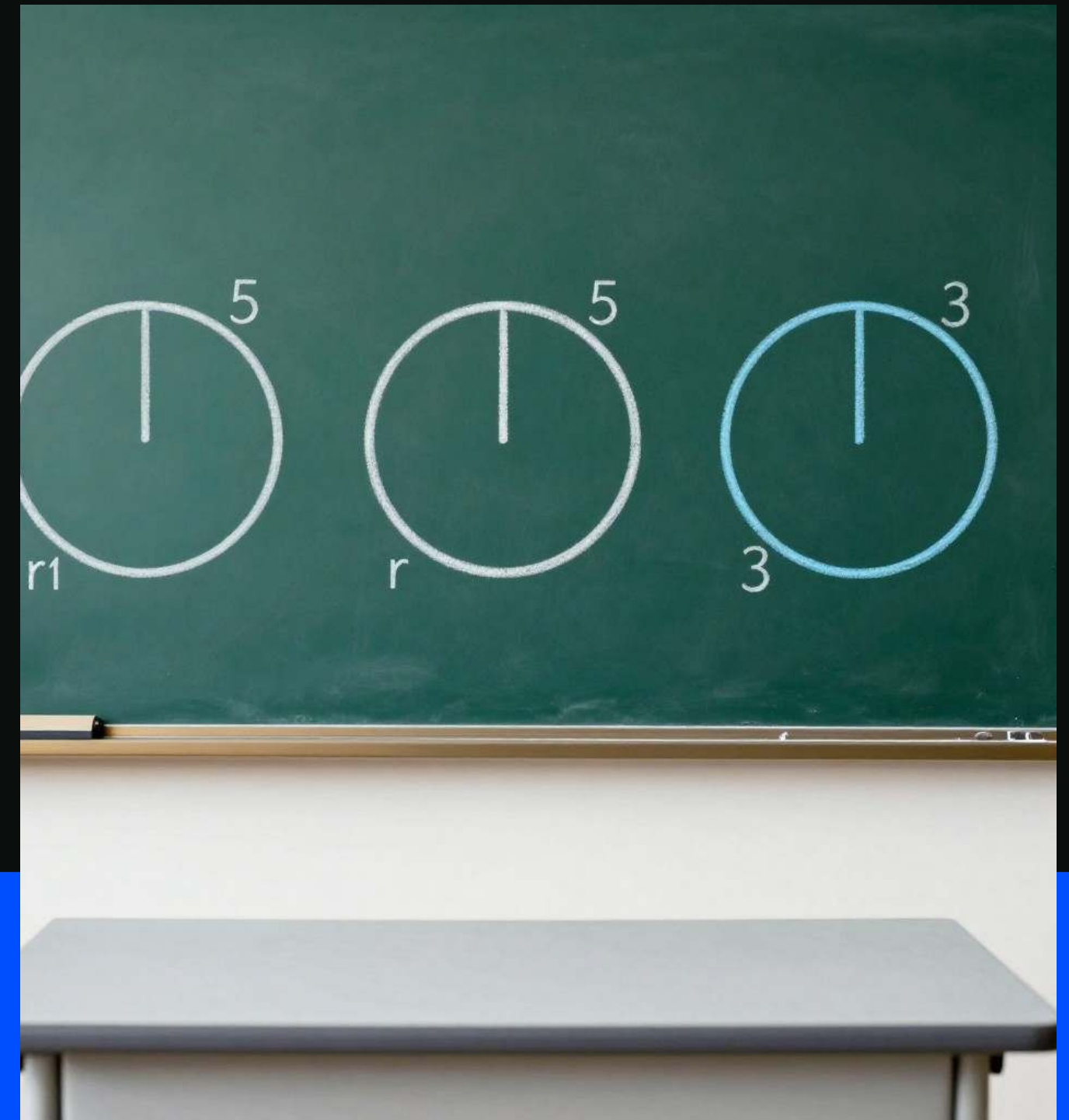
Пересечение в двух точках

Пусть $r_1=5$, $r_2=3$, $d=4$. Модуль разности радиусов равен 2, а 4 лежит между 2 и 8, значит окружности пересекаются.

Быстрая проверка

Такие примеры учат действовать по одному и тому же правилу: сначала находить нужные числа, а затем сразу сравнивать их без лишних вычислений.

4



Проверка расположения на конкретных данных

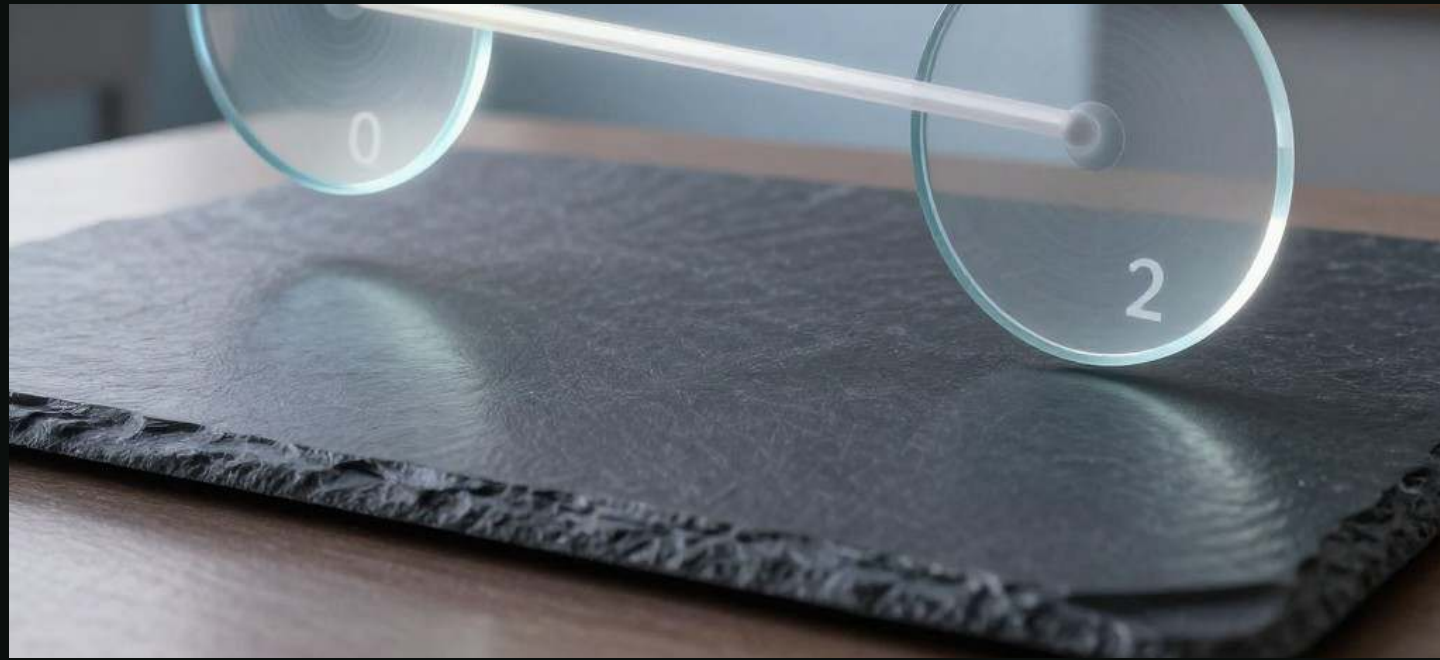
Таблица показывает, как одно сравнение быстро приводит к верному выводу о числе общих точек и виде расположения окружностей.

Во всех трёх строках ответ получается из одного короткого шага сравнения, поэтому таблица удобна для самопроверки и тренировки.

r_1, r_2, d	Сравнение	Вывод
7, 2, 5	$d = r_1 - r_2 $	внутреннее касание
6, 4, 3	$2 < 3 < 10$	2 точки
4, 4, 0	$d = 0, r_1 = r_2$	совпадают

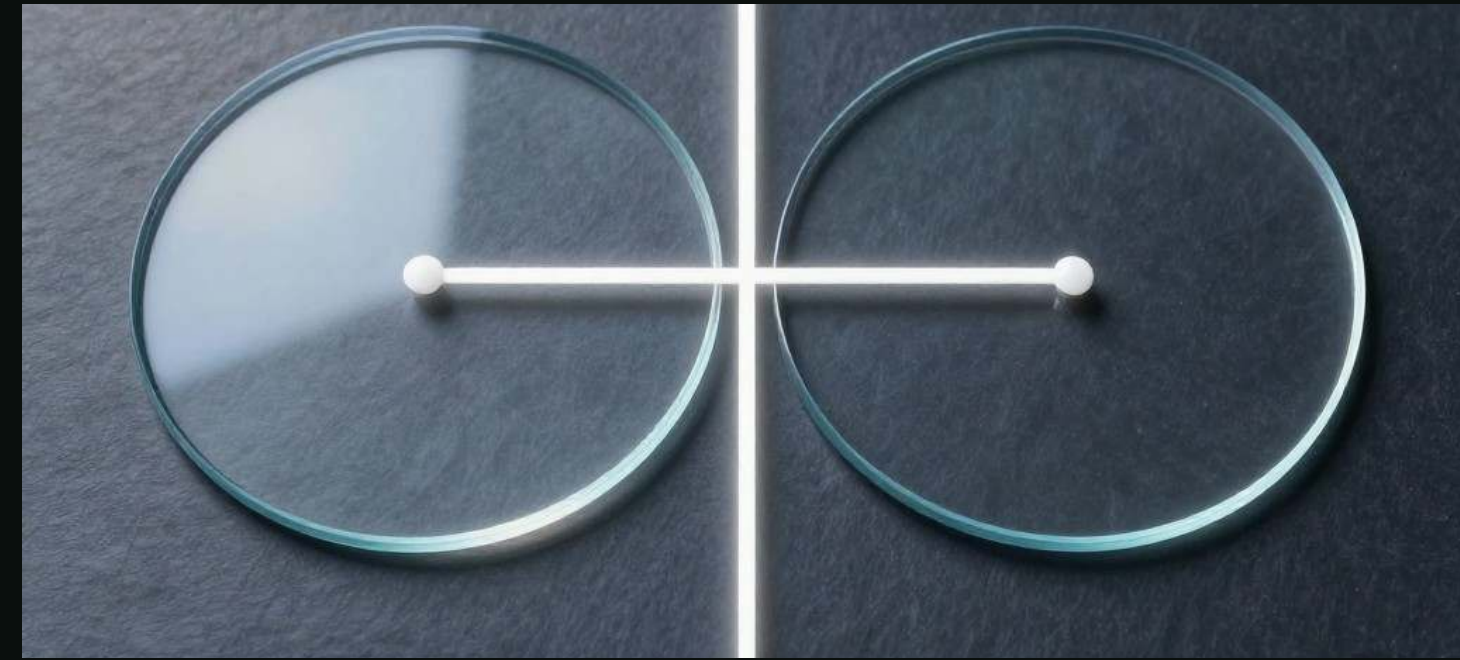
Примеры составлены по правилам сравнения d с $r_1 + r_2$ и $|r_1 - r_2|$.

Линия центров и её роль в задачах



Прямая, которая всё проясняет

Линия O_1O_2 соединяет центры окружностей и сразу показывает, как далеко они находятся друг от друга. При касании эта прямая проходит через центр и точку касания, помогая увидеть точный момент соприкосновения.

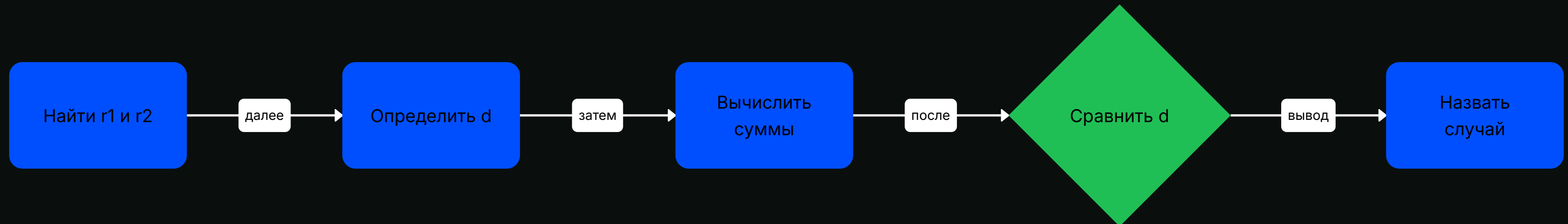


Ось симметрии рисунка

Когда окружности пересекаются, линия центров не проходит через точки пересечения, но остаётся важной опорой для рассуждения. Она помогает сравнить положение фигур и увидеть, что рисунок часто симметричен относительно этой линии.

Пошаговая проверка в геометрической задаче

Последовательность действий для определения взаимного расположения двух окружностей по данным чертежа или условия.



Типичные ошибки при решении задач



Путают касание и пересечение

Иногда считают, что любая близость окружностей означает касание. На самом деле нужно проверить точное равенство $d=r_1+r_2$ или $d=|r_1-r_2|$, иначе ответ может оказаться неверным.



Забывают модуль

Выражение $|r_1-r_2|$ обязательно, потому что радиус может быть больше у любой окружности. Без модуля легко перепутать внутреннее касание с вложенностью или неправильно сравнить величины.



Не различают совпадение

Если $d=0$ и радиусы равны, окружности не касаются, а полностью совпадают. Это особый случай, который нельзя смешивать с обычным касанием или пересечением.



Пропускают проверку всех чисел

Правильный ответ получается только при одновременной проверке d , суммы радиусов и их разности. Когда рассматривают лишь одно условие, легко упустить важную деталь чертежа.

Главное правило для двух окружностей

Сравнивая расстояние между центрами с суммой и разностью радиусов, можно точно определить взаимное расположение окружностей, число общих точек и быстро проверить любой чертёж.