



Размещения: упорядоченный выбор в комбинаторике

Считаем упорядоченные выборки, коды, роли и места
без перебора всех вариантов.

Почему размещения важны в 10 классе

/2



Комбинаторика учит быстро находить число исходов. Размещения нужны, когда выбирают k элементов из n и порядок имеет значение: это помогает в задачах на коды, места, роли и вероятности.

Определение размещения без повторений ^{/3}

Упорядоченный выбор



Размещение без повторений возникает, когда из n элементов выбирают k и важен не только состав, но и порядок расположения выбранных элементов.

Без повторов



Каждый элемент можно использовать лишь один раз, поэтому после очередного выбора число доступных вариантов уменьшается на единицу.

Правило подсчёта

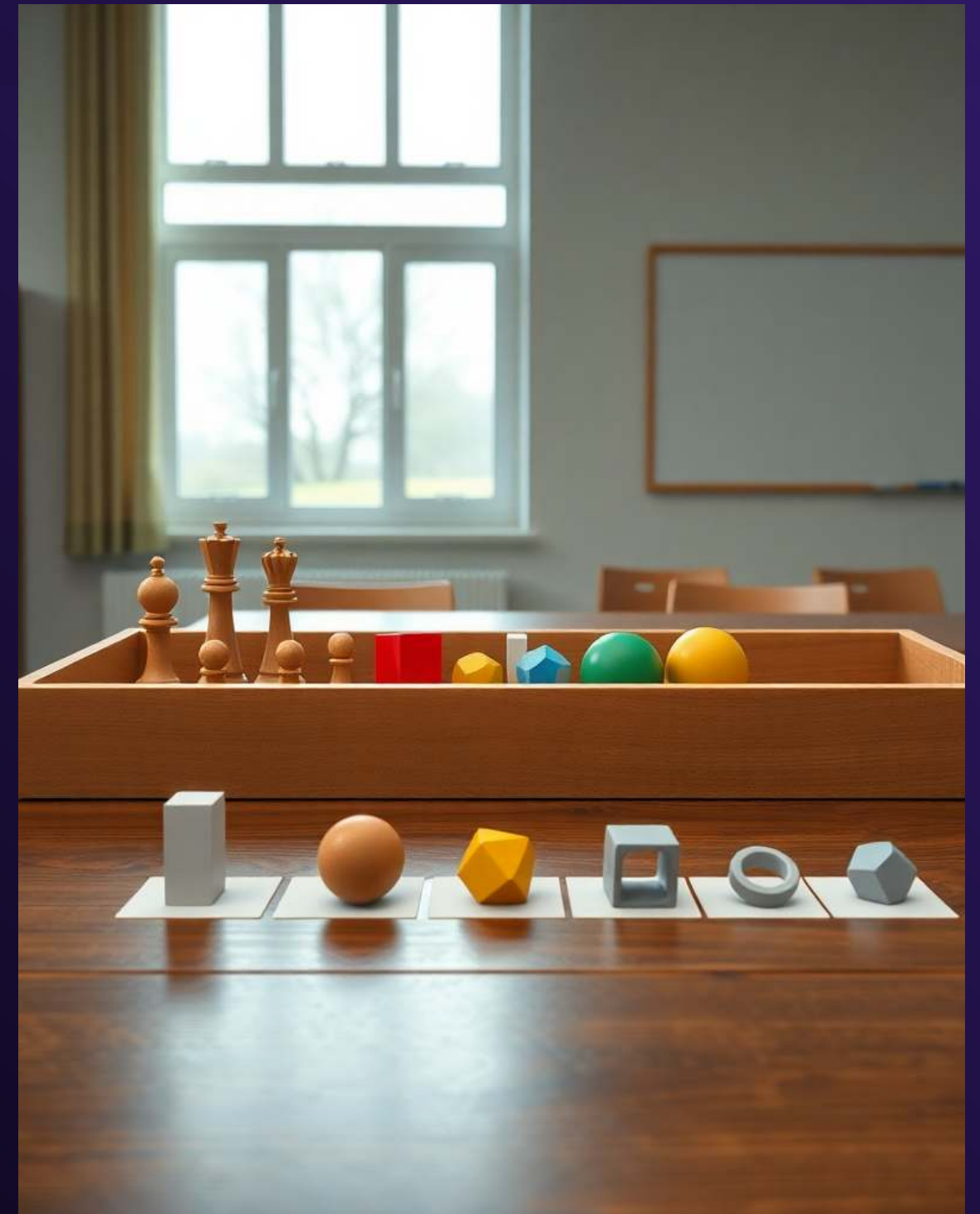


Для первого места есть n возможностей, для второго — $n-1$, далее $n-2$ и так далее до k -го выбранного места.

Итоговое произведение

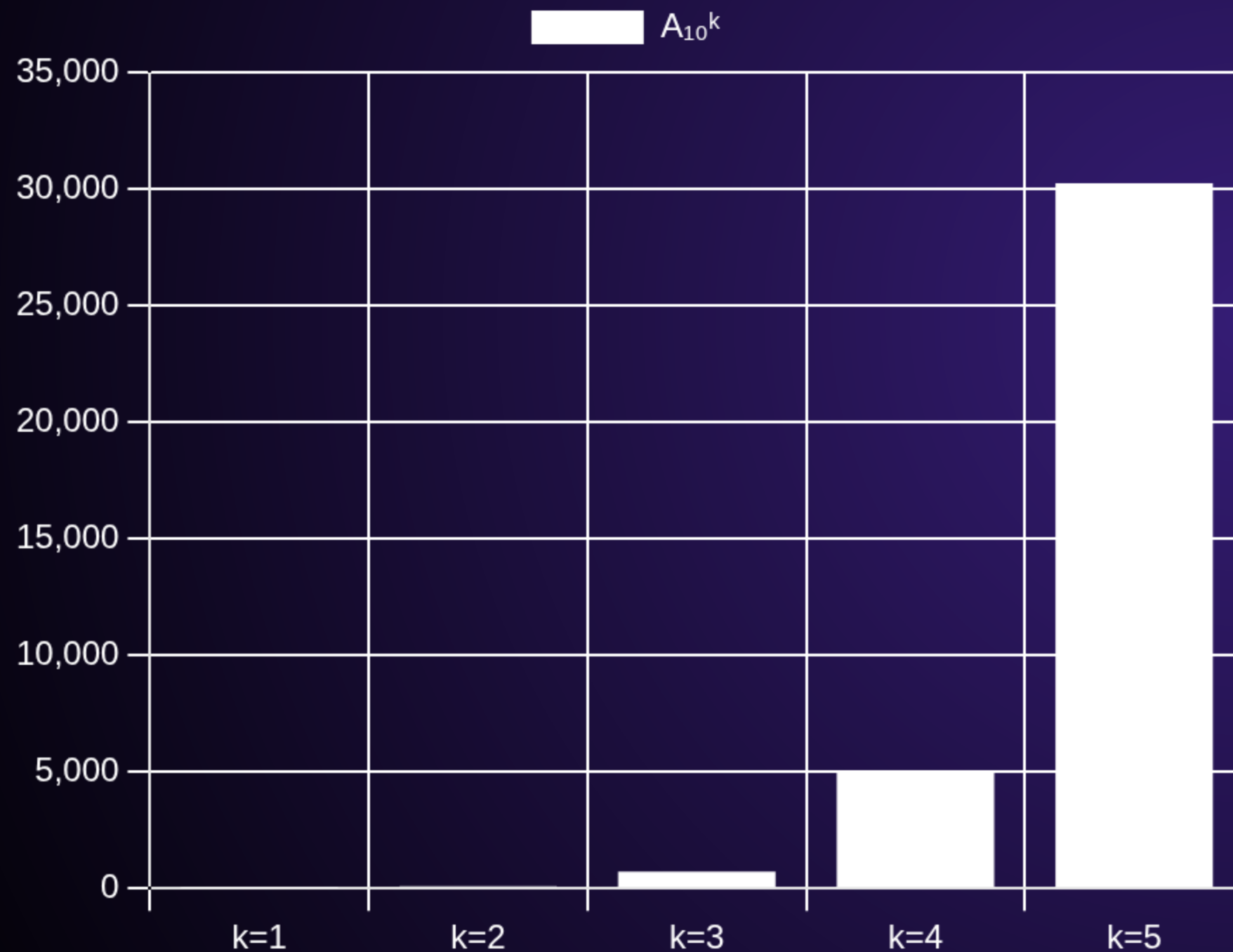


Общее число способов равно произведению $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$, что удобно записывать через формулу размещений.



Как растёт число размещений без повторений

/4



Даже при фиксированном n число вариантов быстро увеличивается, потому что каждый новый выбор добавляет множитель меньший, но всё ещё значительный.

При росте k количество размещений увеличивается стремительно: учёт порядка делает задачу существенно более многовариантной.

Рассчитано по формуле $A_n^k = n! / (n-k)!$ для $n = 10$

Формула размещений без повторений

/5

01 Основная запись

Формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ получается из последовательного произведения $n, n-1, n-2$ и следующих убывающих множителей до нужной длины выбора.

Почему работает факториал

Числитель $n!$ содержит все натуральные множители от 1 до n , а знаменатель сокращает лишнюю часть, оставляя только нужное число шагов выбора.

02

03 Пример вычисления

Например, $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$. Такая запись быстрее полного раскрытия факториалов и удобна в школьных задачах.



Сравнение основных комбинаторных объектов

Объект	Порядок	Формула
Размещения без повторений	Да	A_n^k
Размещения с повторениями	Да	$\bar{A}_n^k$
Сочетания	Нет	C_n^k
Перестановки	Да	P_n

Основные формулы комбинаторики школьного курса

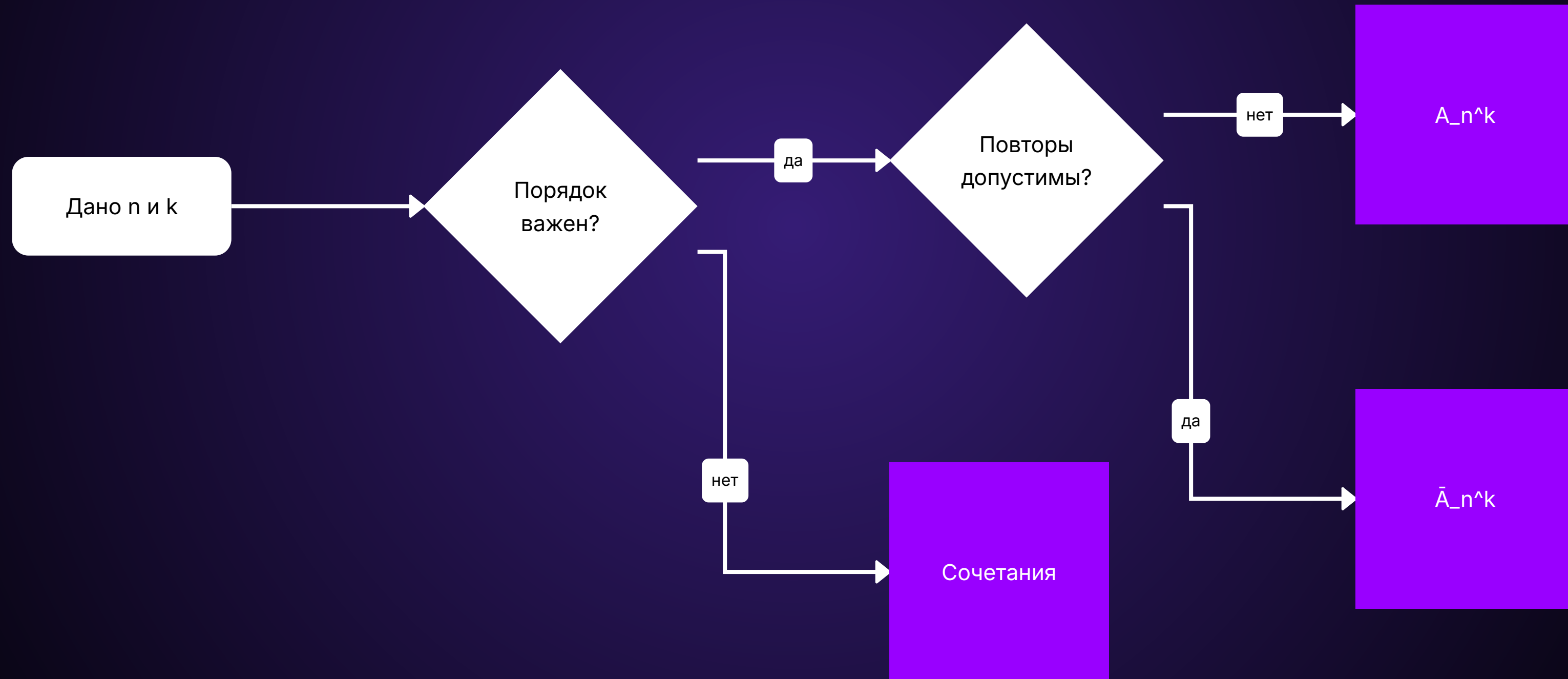
Сводная таблица помогает быстро отличать случаи по двум признакам: учитывается ли порядок и допускаются ли повторения.

Размещения объединяет один ключевой признак: выбранные элементы упорядочены, но условия о повторениях различаются.

Как распознать задачу на размещения

/7

Последовательность вопросов помогает выбрать нужную формулу без лишних вычислений.



Эта формула особенно полезна для кодов, паролей^{/8} и PIN-кодов: один и тот же символ может появляться несколько раз, если это разрешено условием.

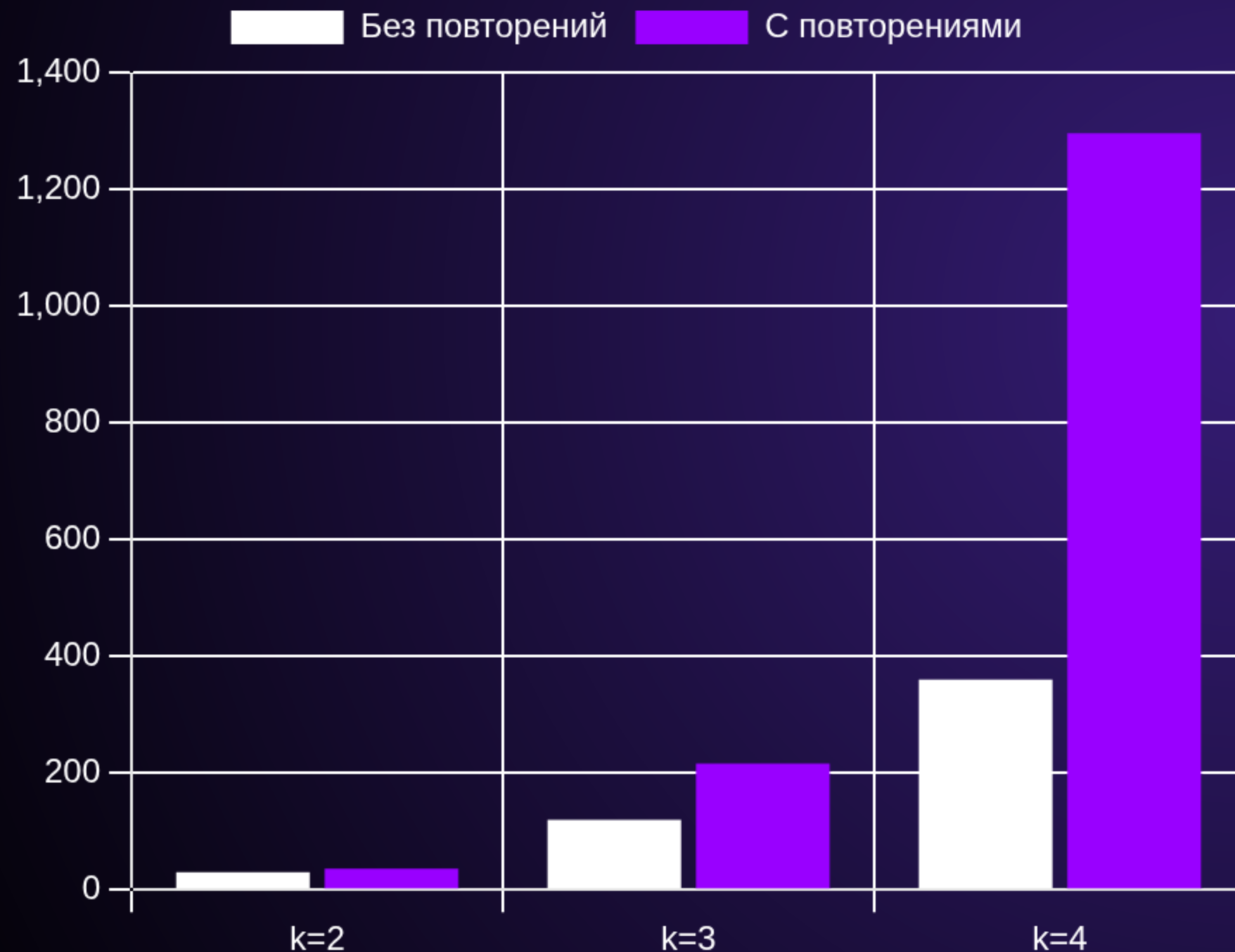
$$n^k$$

даёт число упорядоченных последовательностей с повторяющимися элементами

Формула $\bar{A}_n^k = n^k$ из курса комбинаторики

Сравнение вариантов с повторениями и без повторений

/9



При одинаковом $n = 6$ различие между случаями становится особенно заметным, когда длина выбора увеличивается всего на один шаг.

Повторения резко расширяют пространство вариантов, поэтому для длинных последовательностей эффект становится многократным.

Рассчитано по формулам A_n^k и $\bar{A}_n^k$ для $n = 6$

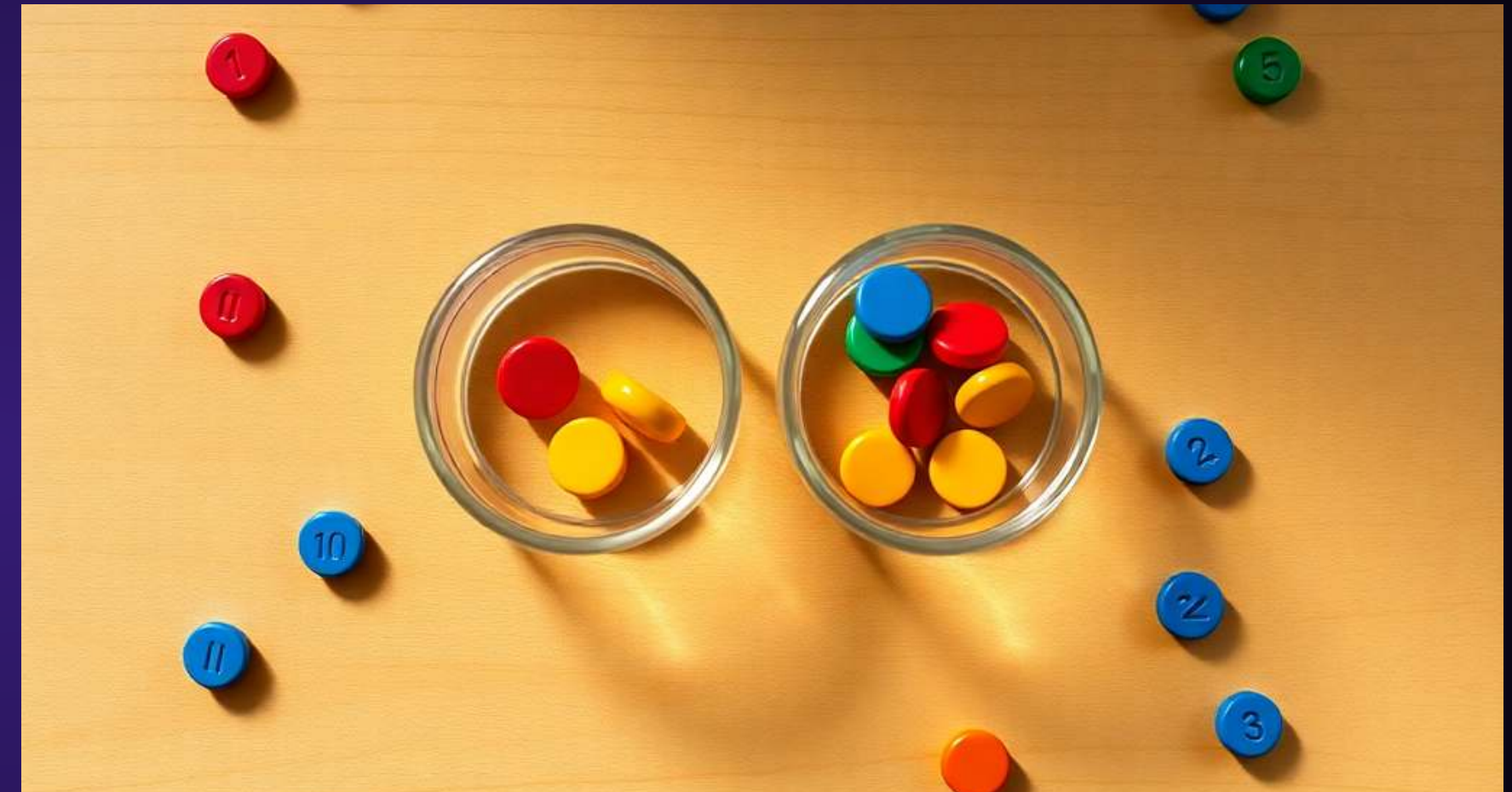
Пример: четырёхзначный код

/10



Код на замке

Если в четырёхзначном коде разрешены повторения, каждая из четырёх позиций имеет по десять вариантов. Поэтому общее число комбинаций равно 10000, и такой замок защищён только тем, что последовательность нужно угадать точно.



Без повторения цифр

Когда одинаковые цифры использовать нельзя, число возможных кодов уменьшается до 5040. Здесь уже важно не только выбрать цифры, но и не повторить ни одну из них в разных позициях.

Связь формулы с факториалом

/11

Идея сокращения



Формула $A_n^k = n! / (n-k)!$ возникает из произведения $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, то есть из факториала, из которого убрана лишняя часть.

Почему это удобно



Такой вид записи позволяет не перемножать все числа от 1 до n . Достаточно сократить факториалы, когда нужно посчитать лишь первые k множителей.

Пример для двух мест



Если выбрать 2 объекта из 12 с учётом порядка, получаем $A_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132$. Здесь хорошо видно, как работает последовательное уменьшение числа вариантов.

Пример для пяти мест



Для выбора 5 объектов из 12 число размещений равно $A_{12}^5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$. При малом k по сравнению с n расчёт остаётся быстрым и наглядным.

Числовые примеры размещений без повторений

n, k	Вычисление	Ответ
5, 2	5·4	20
7, 3	7·6·5	210
9, 4	9·8·7·6	3024
10, 3	10·9·8	720

В таблице показано, как по формуле размещений без повторений быстро находятся значения для разных пар n и k. Во всех примерах используется последовательное умножение убывающих чисел.

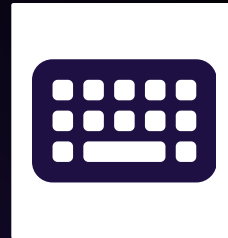
При увеличении k число вариантов растёт очень быстро, потому что к произведению добавляется ещё один убывающий множитель.

Вычисления по формуле $A_n^k = n! / (n-k)!$

Где размещения используются на практике

/13

Коды и пароли



При составлении паролей, PIN-кодов и кодовых комбинаций существенна последовательность символов. Даже одинаковые цифры в другом порядке дают иной вариант.

Порядок элементов



В задачах на последовательности, расстановку объектов или нумерацию мест важен именно порядок расположения. Такие ситуации естественно описываются языком размещений.

Призовые места



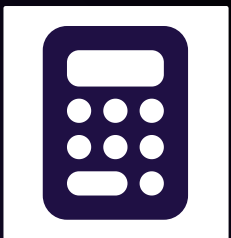
В соревнованиях важен не только набор призёров, но и их порядок: первое, второе и третье места дают разные результаты, поэтому используют размещения.

Роли в группе



Когда нужно назначить председателя, заместителя и секретаря, каждый участник получает конкретную роль. Здесь итог зависит от того, кто и на какую позицию попал.

Школьные задачи

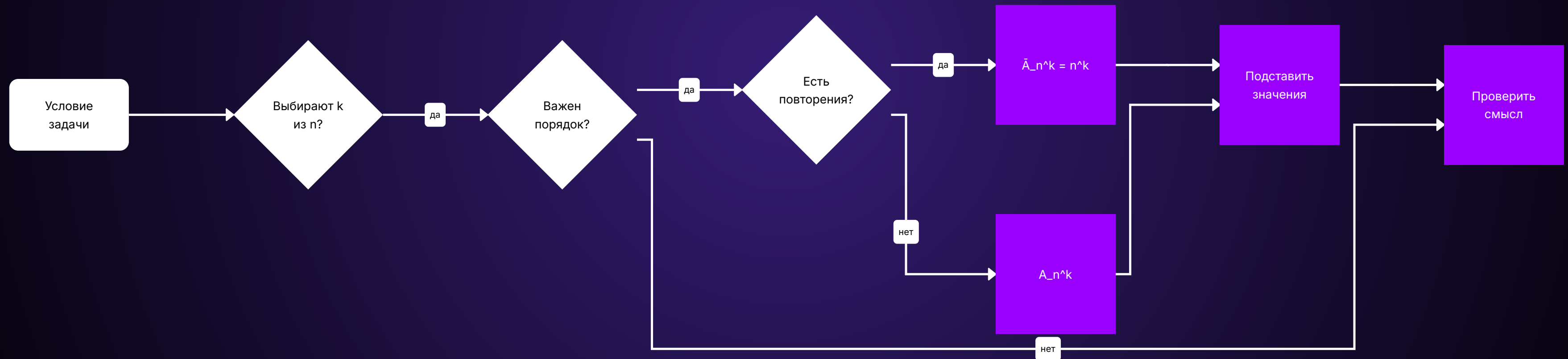


В алгебре, информатике и теории вероятностей размещения помогают считать число исходов без полного перебора. Это особенно полезно в задачах повышенной сложности.

Алгоритм решения задач на размещения

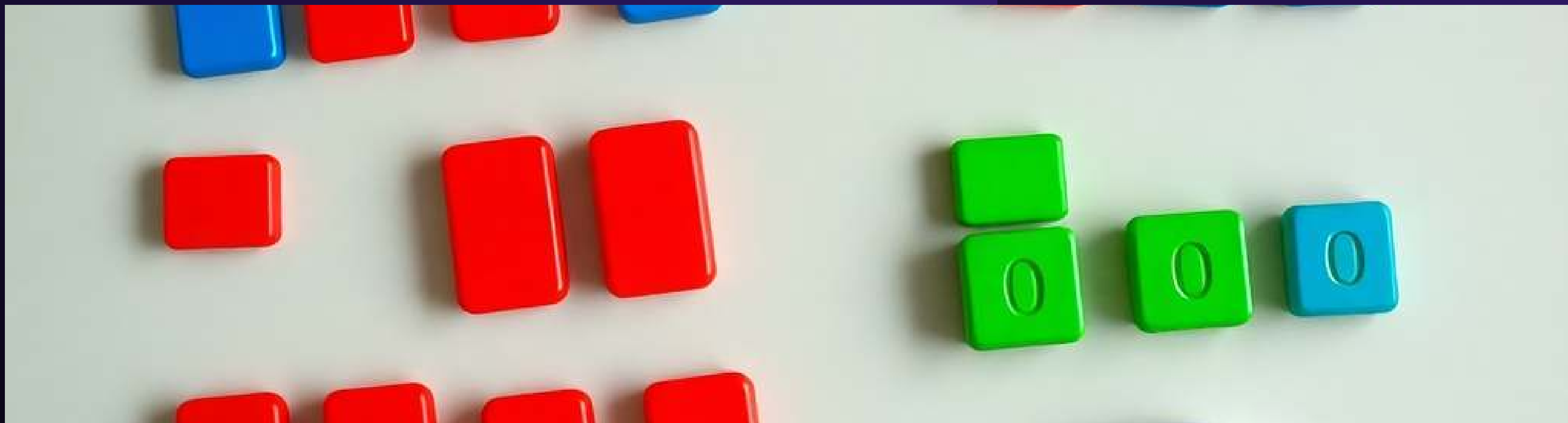
/14

Последовательность действий помогает быстро выбрать правильную формулу и проверить ответ по смыслу условия.



Типичные ошибки при решении задач

/15



Путаница с сочетаниями

Самая частая ошибка — взять формулу сочетаний, хотя по условию порядок имеет значение. В таких задачах перестановка тех же элементов приводит к другому ответу.

Игнорирование повторений

Иногда учащиеся по привычке запрещают повторения, хотя условие их допускает. Тогда число вариантов занижается, и итог перестаёт соответствовать реальной ситуации.

Нулевая цифра в коде

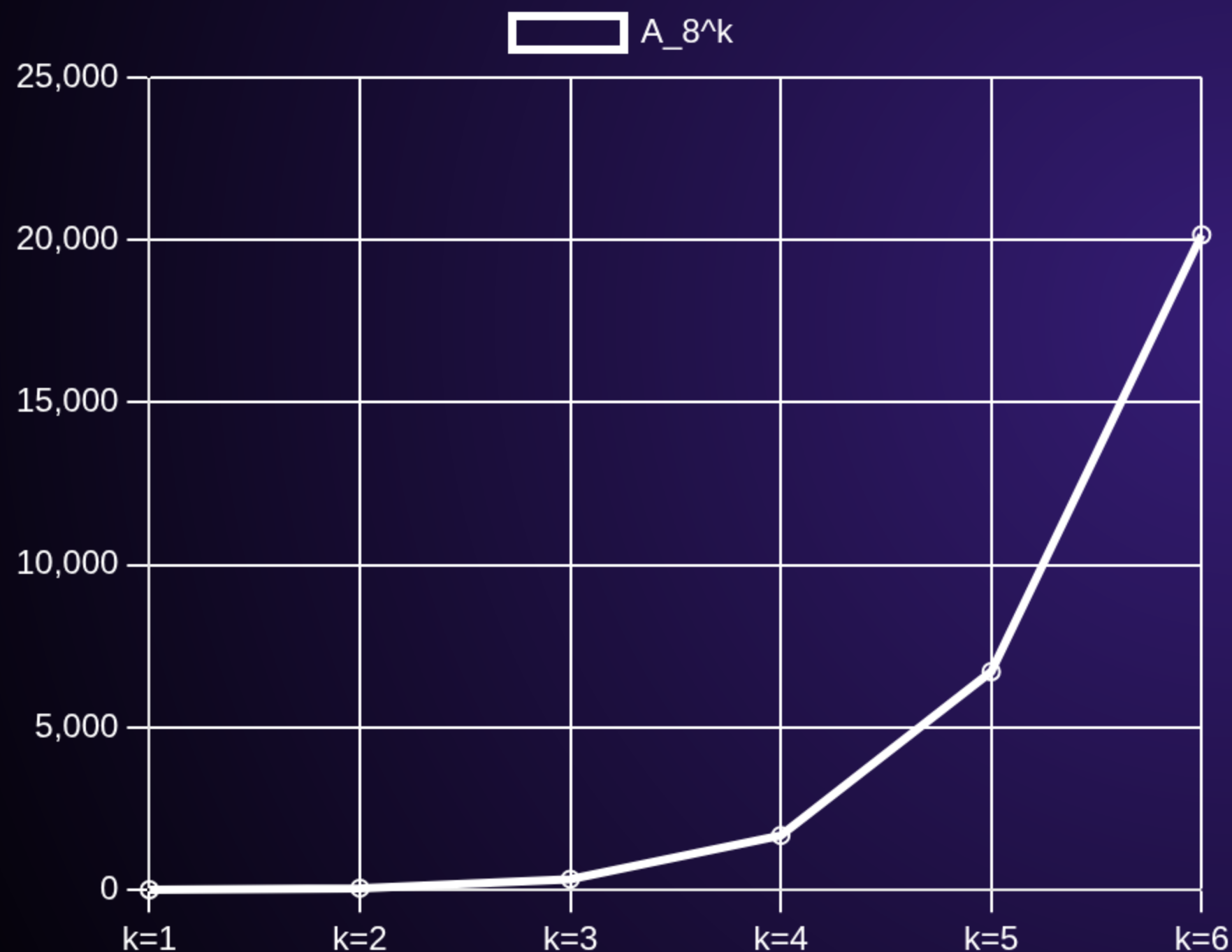
В задачах о кодах и паролях важно внимательно читать условие о первой позиции. Ноль может быть допустимым символом, но не всегда разрешён в начале.

Отсутствие проверки ответа

После вычисления полезно сопоставить результат с логикой задачи: соответствует ли он числу мест, ролей или символов. Такая проверка быстро выявляет неверный выбор формулы.

Первые значения A_n^k при $n = 8$

/16



При фиксированном $n = 8$ каждое следующее значение получается умножением на всё меньший множитель, поэтому рост остаётся быстрым даже без повторений.

Число размещений увеличивается не линейно, а ускоренно: уже при $k=6$ вариантов в тысячи раз больше, чем при $k=1$.

Вычисления по формуле $A_n^k = n! / (n-k)!$ для $n = 8$

Размещения в задачах на вероятность

/17

01 Считаem исходы

В вероятностных задачах сначала находят общее число возможных исходов, а затем число благоприятных. Если порядок важен, оба подсчёта удобно записывать через размещения.

Примеры событий

Такой подход используется при угадывании кода, выборе нужной последовательности или получении определённого расположения объектов. Здесь каждое изменение порядка создаёт новый исход.

02

03 Вероятность как отношение

После подсчёта вероятность находят как отношение благоприятных исходов к общему числу исходов. Размещения позволяют выразить это отношение компактно и без перечисления всех вариантов.

Мини-справочник формул комбинаторики

Объект	Формула	Смысл
Размещения	A_n^k	Порядок важен
С повторами	$\bar{A}_n^k = n^k$	Повторы допустимы
Перестановки	$P_n = n!$	Выбирают все
Сочетания	C_n^k	Порядок не важен

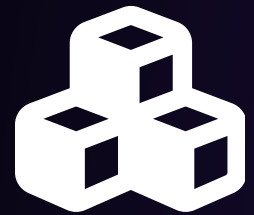
Основные формулы комбинаторики

Таблица напоминает основные объекты комбинаторики и показывает, чем они отличаются по порядку и повторениям. Это помогает быстро выбрать нужную формулу в задаче.

Размещения занимают промежуточное место между перестановками и сочетаниями, потому что учитывают порядок, но выбирают не все элементы.

Ключевые признаки задачи на размещения

/19



Выбор из множества

В условии дано n объектов, из которых нужно выбрать k . Если выбирается только часть множества, а не все элементы, это первый ориентир на размещения.



Порядок имеет значение

Если перестановка выбранных элементов меняет ответ, задача относится к упорядоченному выбору. Именно этот признак отличает размещения от сочетаний.



Проверка повторений

Последний шаг — выяснить, разрешены ли повторы. Если да, используют формулу n^k ; если нет, применяют A_n^k и сокращение факториалов.

Размещения: от формулы к уверенным решениям

Размещения помогают точно считать упорядоченные выборки и быстро решать задачи с кодами, ролями, местами и последовательностями. Если уверенно распознавать порядок и повторения, комбинаторика становится понятной и практичной.