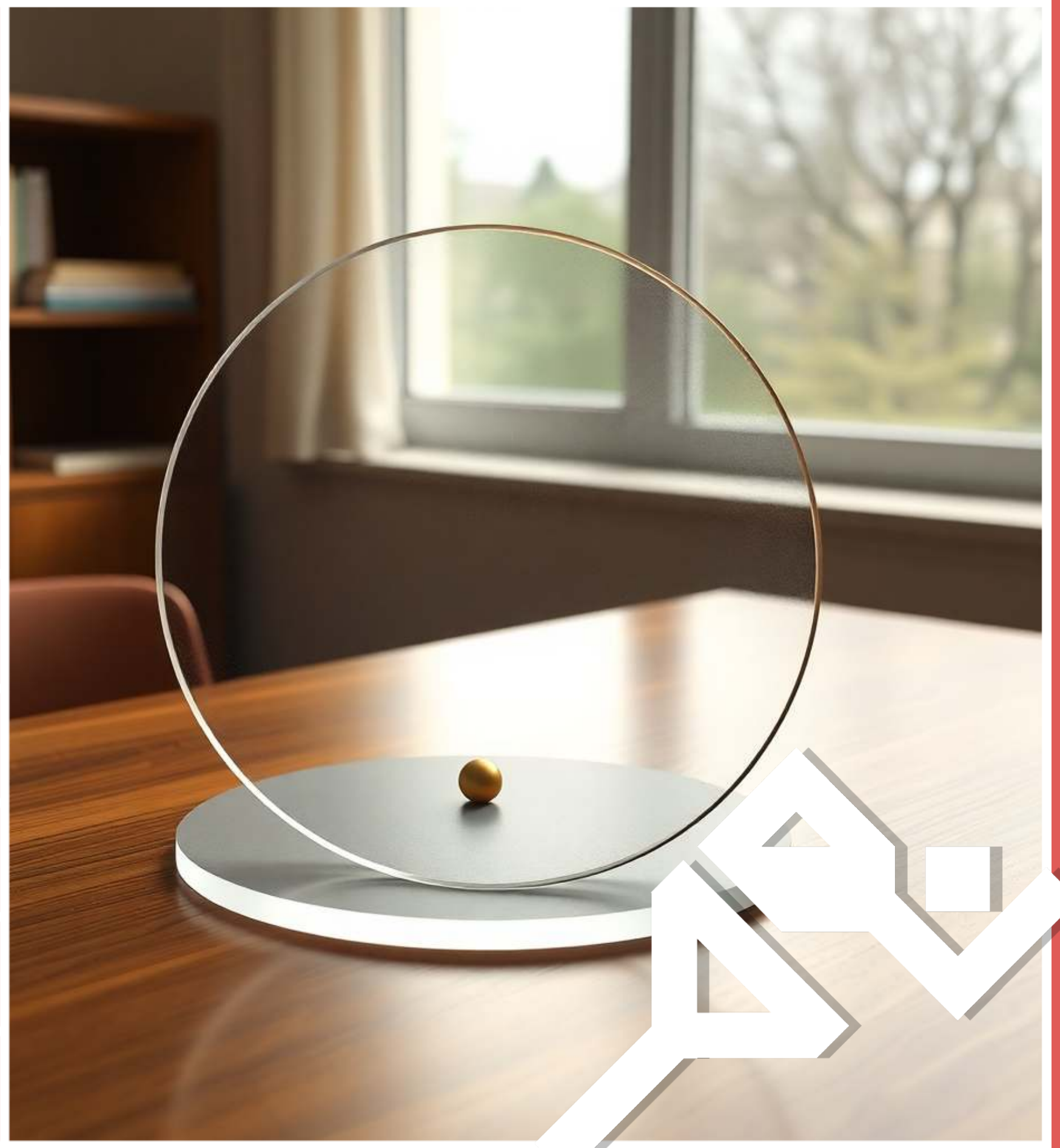


Синус и косинус любого угла

Тригонометрия на единичной окружности: от координат до периодических моделей.



От треугольника к окружности

Сначала синус и косинус изучают на острых углах прямоугольного треугольника. Затем определение расширяют через поворот луча и единичную окружность, чтобы работать с любыми углами, включая отрицательные и превышающие полный оборот.



Единичная окружность как основа определения

1

Круг радиуса 1

Единичная окружность имеет центр в начале координат и радиус, равный одному. Благодаря этому координаты любой точки на ней удобно использовать как значения тригонометрических функций.

2

Отсчёт угла

Угол откладывают от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Такое соглашение позволяет однозначно описывать положение луча и сравнивать углы в одной системе координат.

3

Координаты точки

Точка пересечения стороны угла с окружностью имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Поэтому для любого угла значения функций сразу читаются по положению этой точки.



Геометрический смысл синуса и косинуса



Абсцисса и ордината

Косинус угла показывает абсциссу точки на единичной окружности, а синус — её ординату. Эти две координаты описывают положение точки без дополнительных построений.

Непрерывное изменение

При вращении луча значения синуса и косинуса меняются плавно, без скачков. Это свойство хорошо согласуется с графиками функций и моделями равномерного движения.

Связь с четвертями

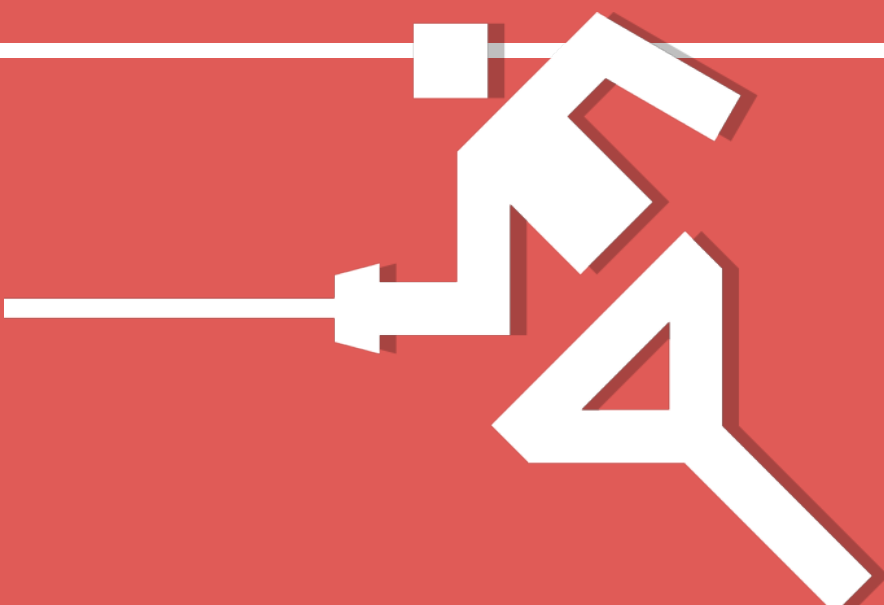
Знак каждой функции зависит от того, в какой четверти находится конечная сторона угла. По этому признаку можно быстро ориентироваться в ответе ещё до точных вычислений.

Единый язык задач

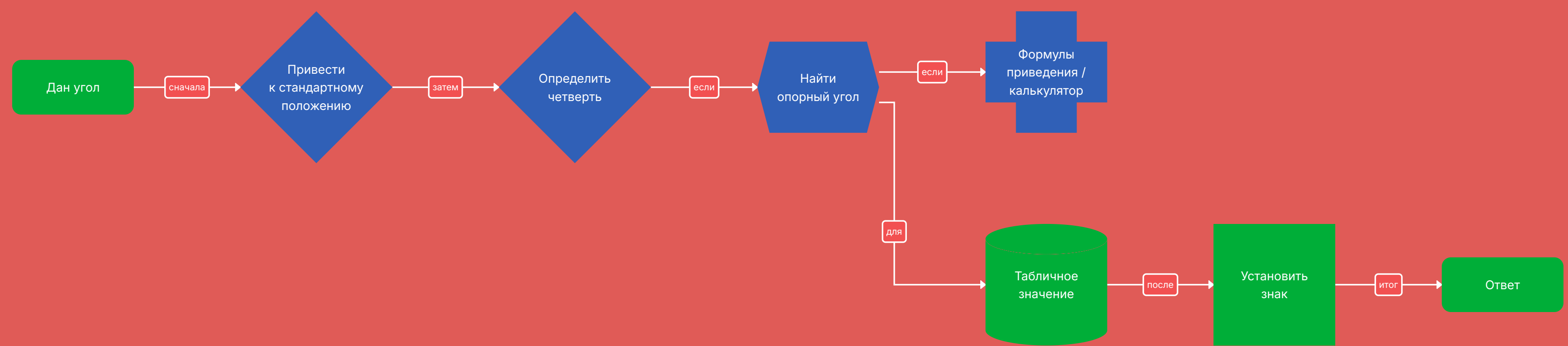
Геометрическая интерпретация соединяет алгебру, координатную плоскость и рисунок окружности. Поэтому один и тот же угол можно исследовать несколькими способами и проверять результат разными методами.

Алгоритм вычисления $\sin$ и $\cos$ любого угла

Последовательность основана на единичной окружности, четвертях и формулах приведения.



--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Знаки синуса и косинуса в четырёх четвертях



I четверть

В первой четверти обе функции положительны: $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$. Здесь координаты точки на окружности лежат в области положительных значений обеих осей.



II четверть

Во второй четверти синус остаётся положительным, а косинус становится отрицательным. Это соответствует положительной ординате и отрицательной абсциссе точки на окружности.



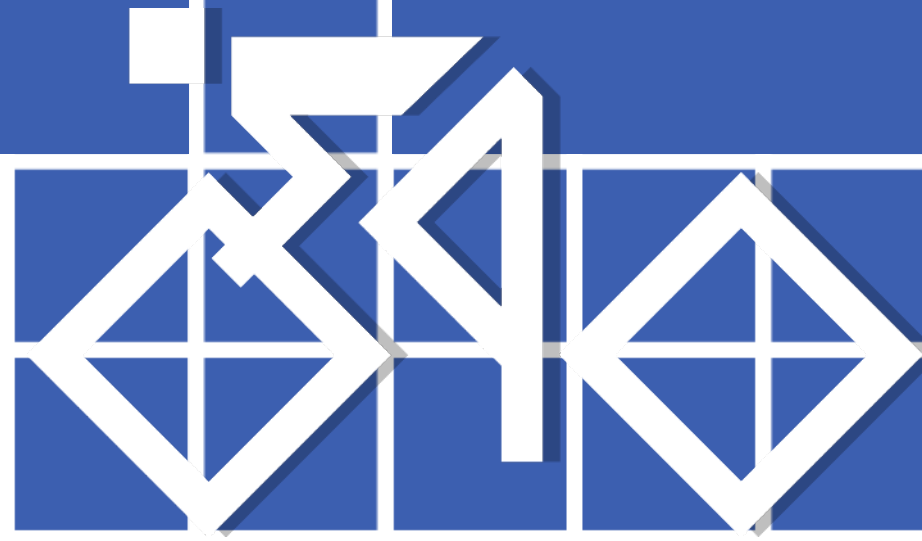
III четверть

В третьей четверти обе функции отрицательны: $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$. Конечная сторона угла находится в области отрицательных координат по обеим осям.



IV четверть

В четвёртой четверти синус отрицателен, а косинус положителен. Такое распределение знаков помогает быстро проверять вычисления и избегать ошибок при работе с углами.



Табличные значения ОСНОВНЫХ углов



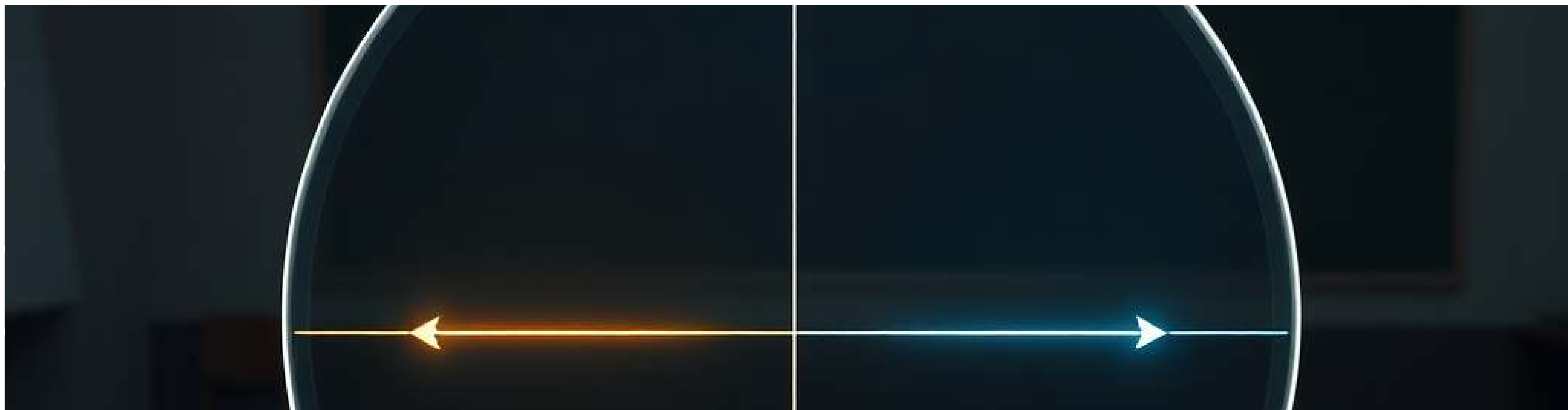
Эта таблица содержит наиболее часто используемые точные значения синуса и косинуса. Она особенно полезна при решении задач без калькулятора.

Значения 30° и 60° симметричны и меняются местами; 45° даёт равные значения синуса и косинуса.

Угол	sin	cos
0°	0	1
30°	1/2	√3/2
45°	√2/2	√2/2
60°	√3/2	1/2
90°	1	0

Точные значения для стандартных углов единичной окружности

Примеры углов больше 360° и отрицательных углов



Угол больше полного оборота

Для углов, превышающих 360° , сначала выделяют полный оборот. Поэтому $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, а $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

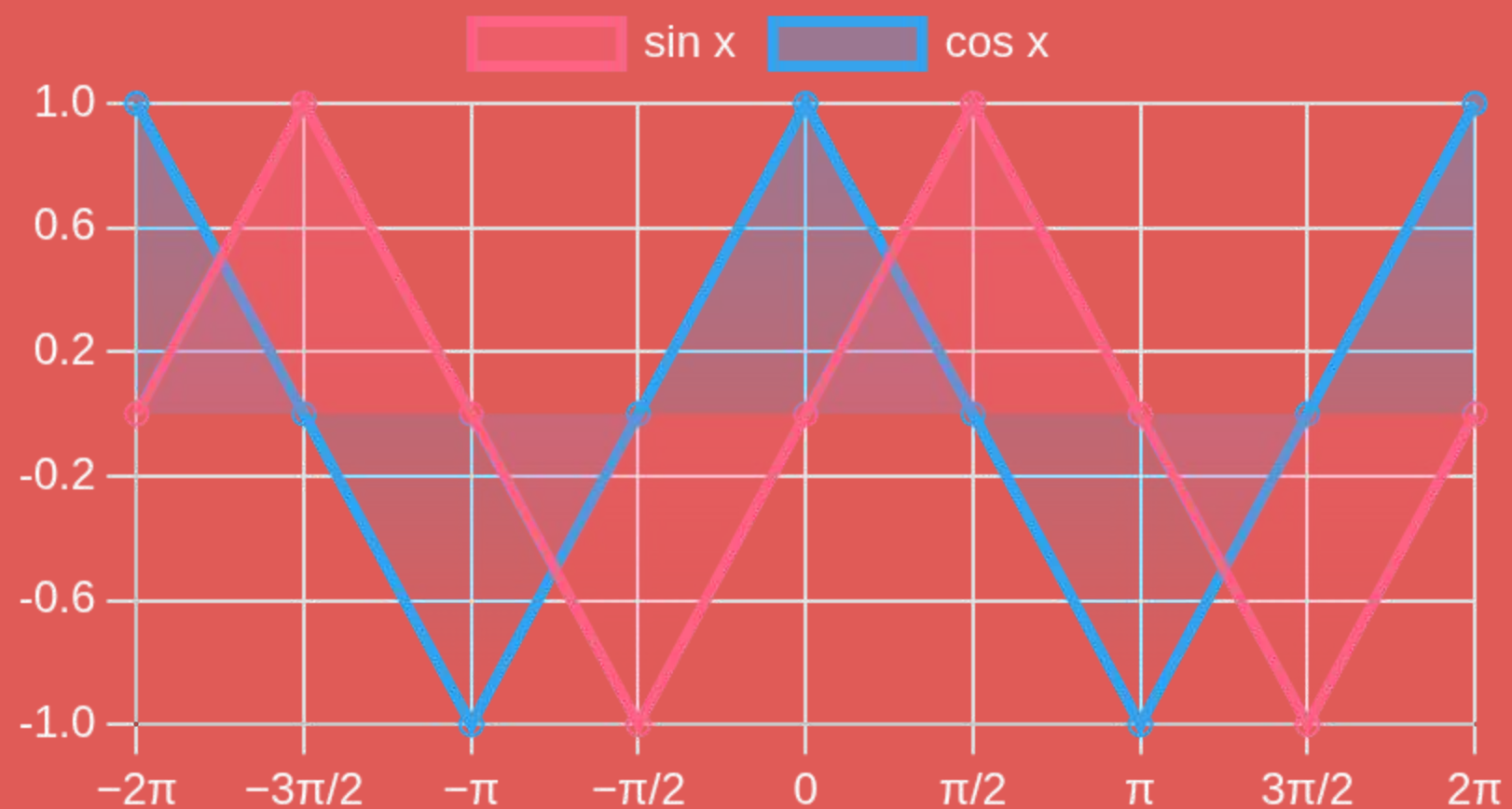
Отрицательный угол

Отрицательные углы рассматривают как поворот по часовой стрелке. Из симметрии относительно оси Ox получаем $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

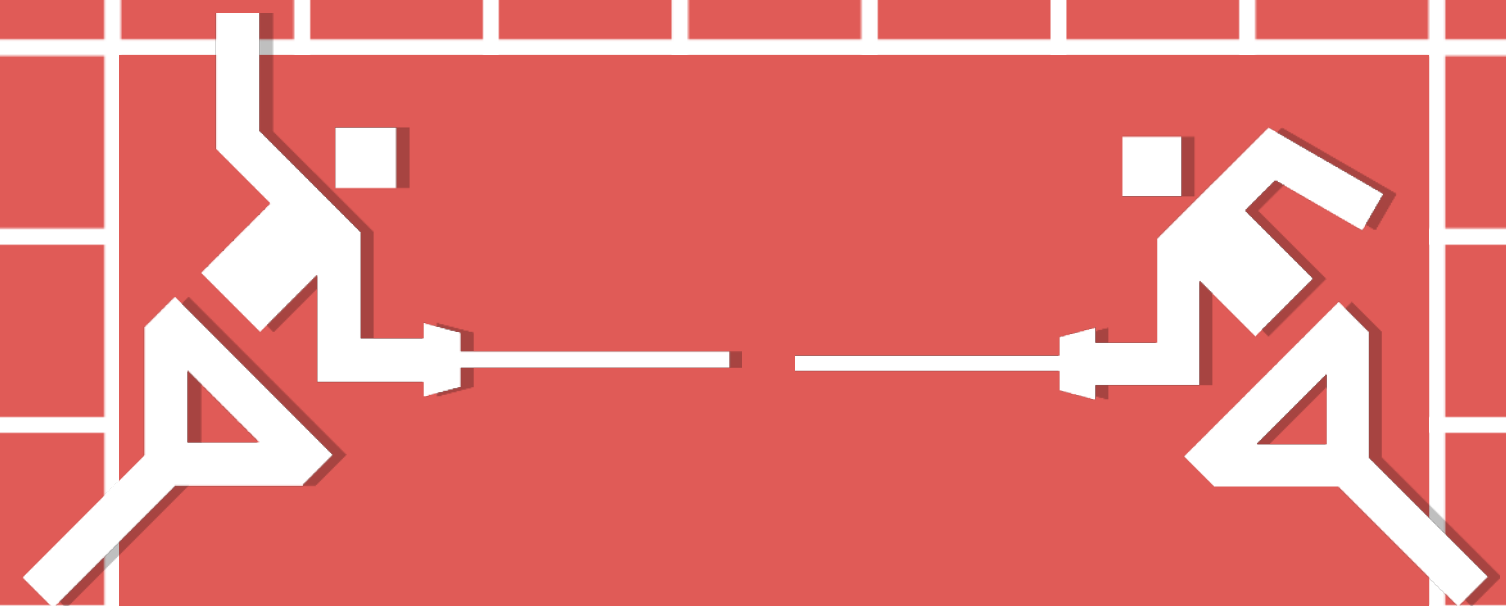
Наглядная проверка

Единичная окружность показывает, что значения повторяются после полного оборота, а отражение относительно оси Ox меняет знак только у синуса. Это удобно для быстрой проверки ответа.

Периодичность синуса и косинуса



Стандартные значения $\sin x$ и $\cos x$ на промежутке от -2π до 2π



На одном графике удобно сравнить повторяемость обеих функций и увидеть, как их значения меняются синхронно при движении по оси аргумента.

Обе функции повторяют форму каждые 2π ; график наглядно подтверждает периодичность и противоположность максимумов и минимумов.

Основное тригонометрическое тождество

Равенство на окружности

- 1** Для любого угла выполняется $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Оно напрямую связано с уравнением единичной окружности и отражает тот факт, что точка всегда остаётся на расстоянии 1 от центра.

Подстановка координат

- 2** Если на окружности координаты точки записать как $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, то в уравнение $x^2 + y^2 = 1$ подставляются именно эти значения. Так получается тождество без дополнительных преобразований.

Границы значений

- 3** Из равенства сразу следует, что ни синус, ни косинус не могут выходить за пределы от -1 до 1 . Это важная проверка при решении задач и работе с калькулятором.

Практическое применение

- 4** Тождество используют для проверки вычислений, нахождения неизвестной функции и упрощения выражений. Если результат нарушает это равенство, значит, в рассуждении допущена ошибка.



Связь синуса и косинуса дополнительных углов



Поворот на 90°

Если от угла α отложить дополнительный угол до 90° , точка на единичной окружности смещается по симметрии, поэтому $\sin(90^\circ - \alpha)$ становится равен $\cos \alpha$ без дополнительных вычислений.



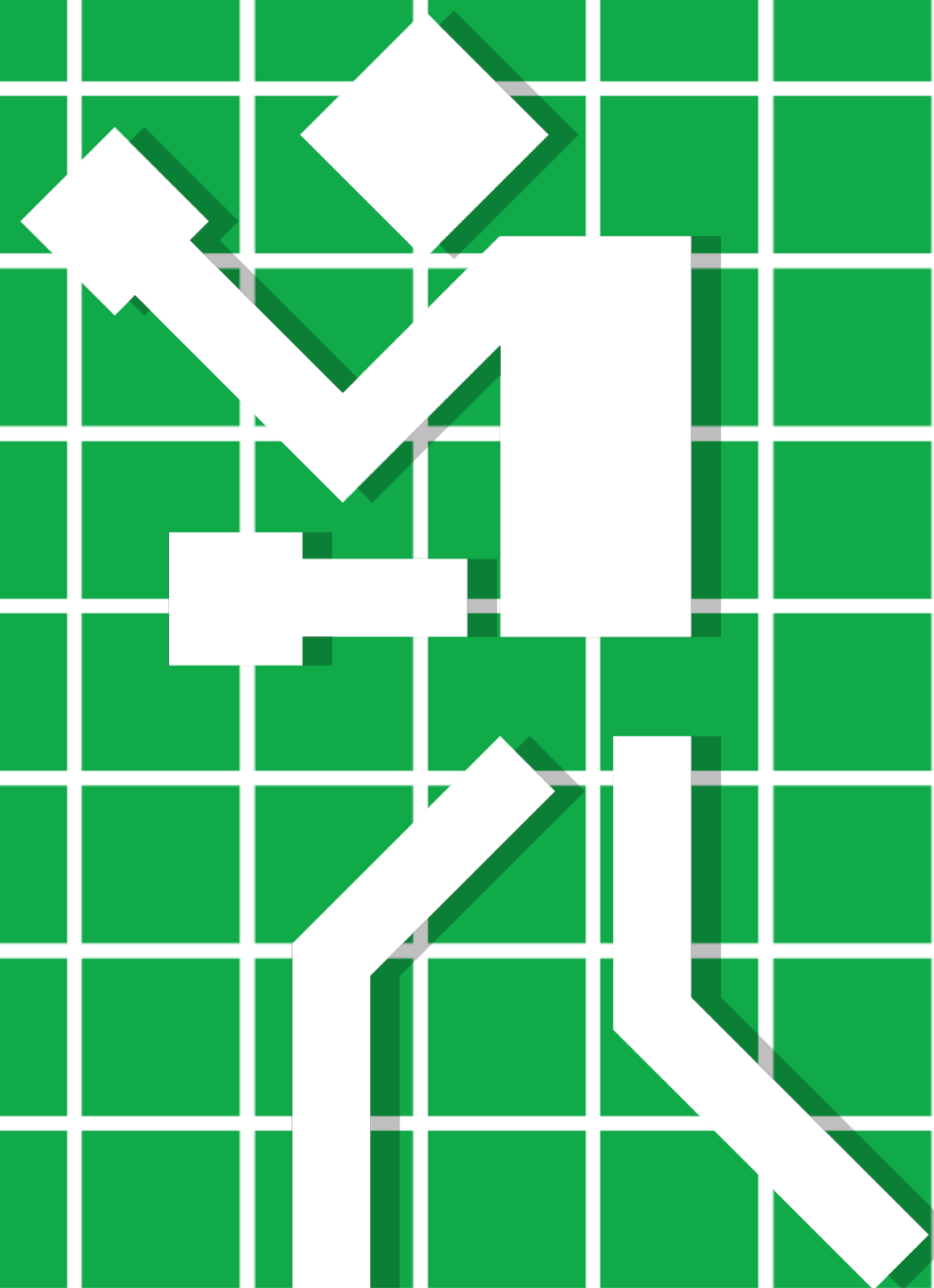
Отражение координат

На окружности координаты точки после отражения относительно прямой $y = x$ меняются местами. Поэтому $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, а знаки сохраняются или меняются по четверти.



Связь табличных значений

Именно так получают парные значения для 30° и 60° . Достаточно знать одно из них, чтобы быстро восстановить второе и сократить число вычислений в задачах.



Способы вычисления значений функций

1. Точная основа

Сначала угол приводят к стандартному виду и находят опорный угол. Если он совпадает с 0° , 30° , 45° , 60° или 90° , используют точное табличное значение.

2. Формулы и симметрия

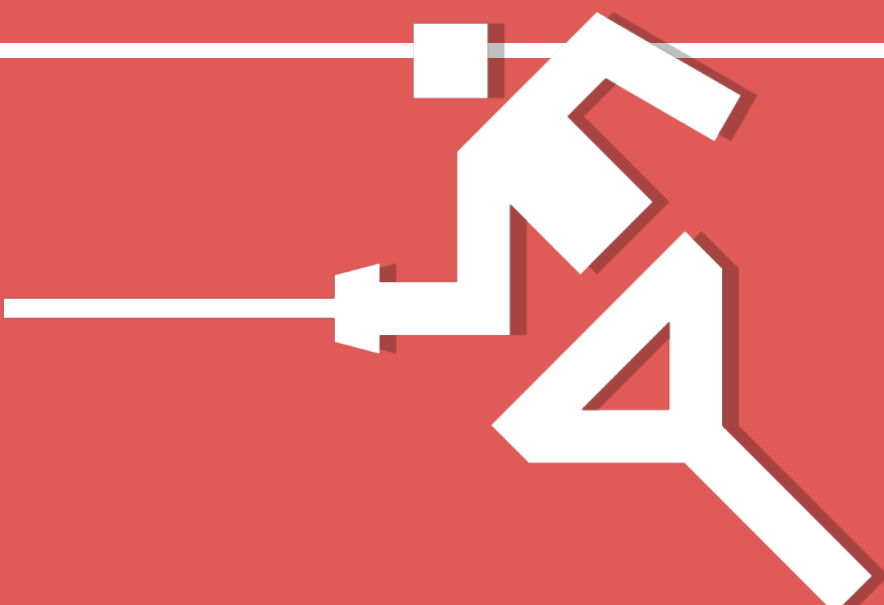
Затем применяют формулы приведения и свойства симметрии единичной окружности. Это позволяет определить знак и перенести вычисление к значению из первой четверти.

3. Приближённый расчёт

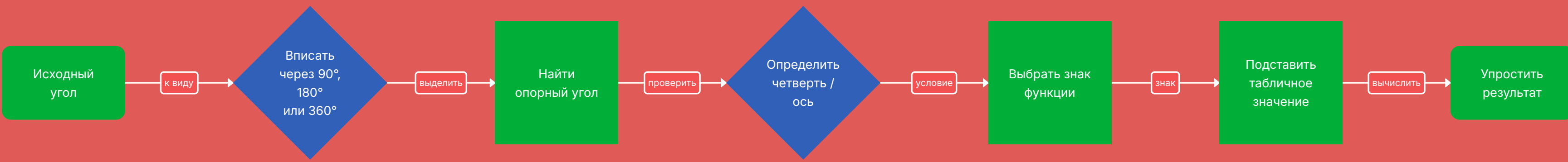
Для углов вне таблицы используют калькулятор или вычислительные средства. После этого обязательно проверяют знак, диапазон ответа и согласование градусной и радианной меры.

Формулы приведения

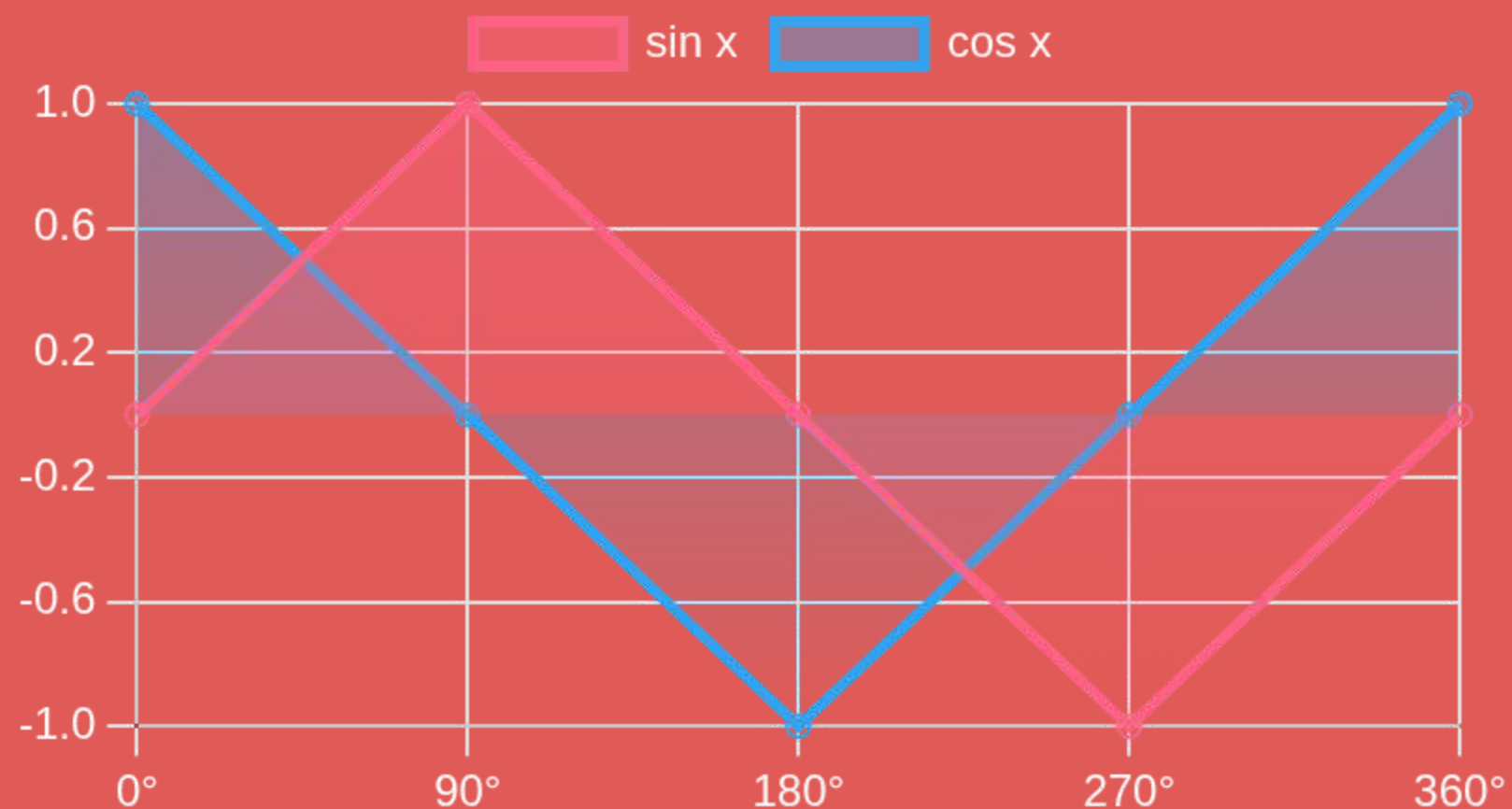
Переход от исходного угла к опорному и выбор знака по четверти позволяют выразить значение через табличные углы.



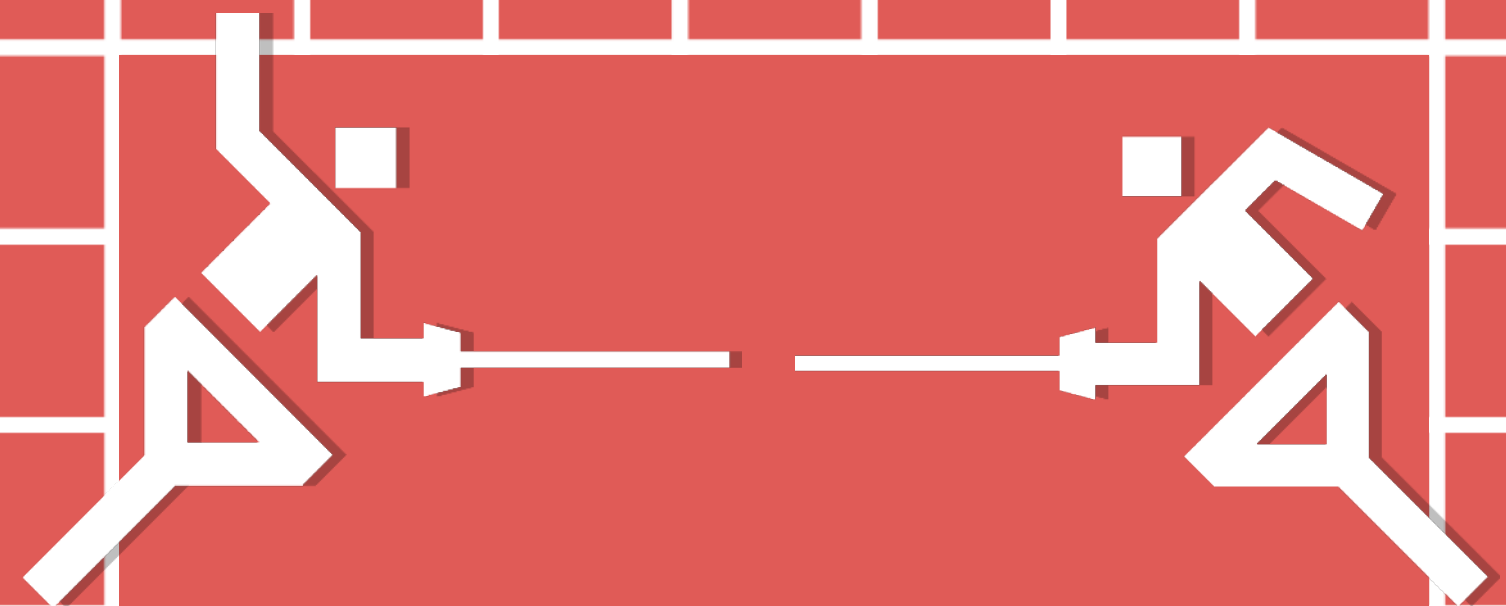
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Изменение значений при вращении луча



Учебная схема по единичной окружности и графикам
тригонометрических функций



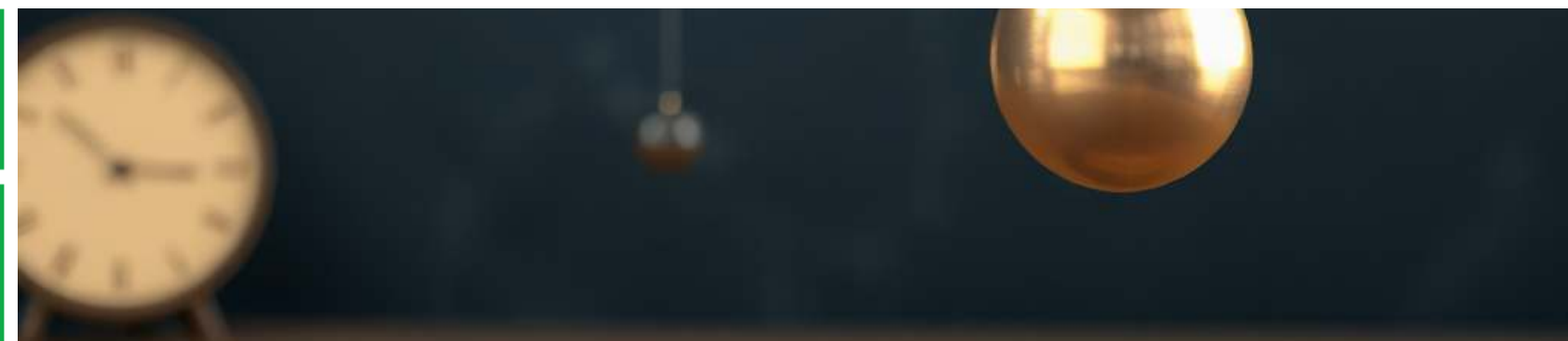
Обе функции меняются плавно
и повторяют один и тот же цикл
при полном обороте, но сдвинуты друг
относительно друга на четверть периода.

График показывает период 360°
и наглядно связывает значения
функций с положением луча
на окружности.

Применение синуса и косинуса в физике и технике

Колебание маятника

Когда маятник отклоняется от положения равновесия, его движение удобно описывать как периодическое изменение координаты во времени. Синус помогает показать, как величина сначала возрастает, затем убывает и снова возвращается к началу цикла.



Вращение колеса

Точка на ободе колеса постоянно меняет своё положение, а её проекции на оси ведут себя как синус и косинус. Такая модель помогает объяснять вращение, движение механизмов и работу датчиков положения.

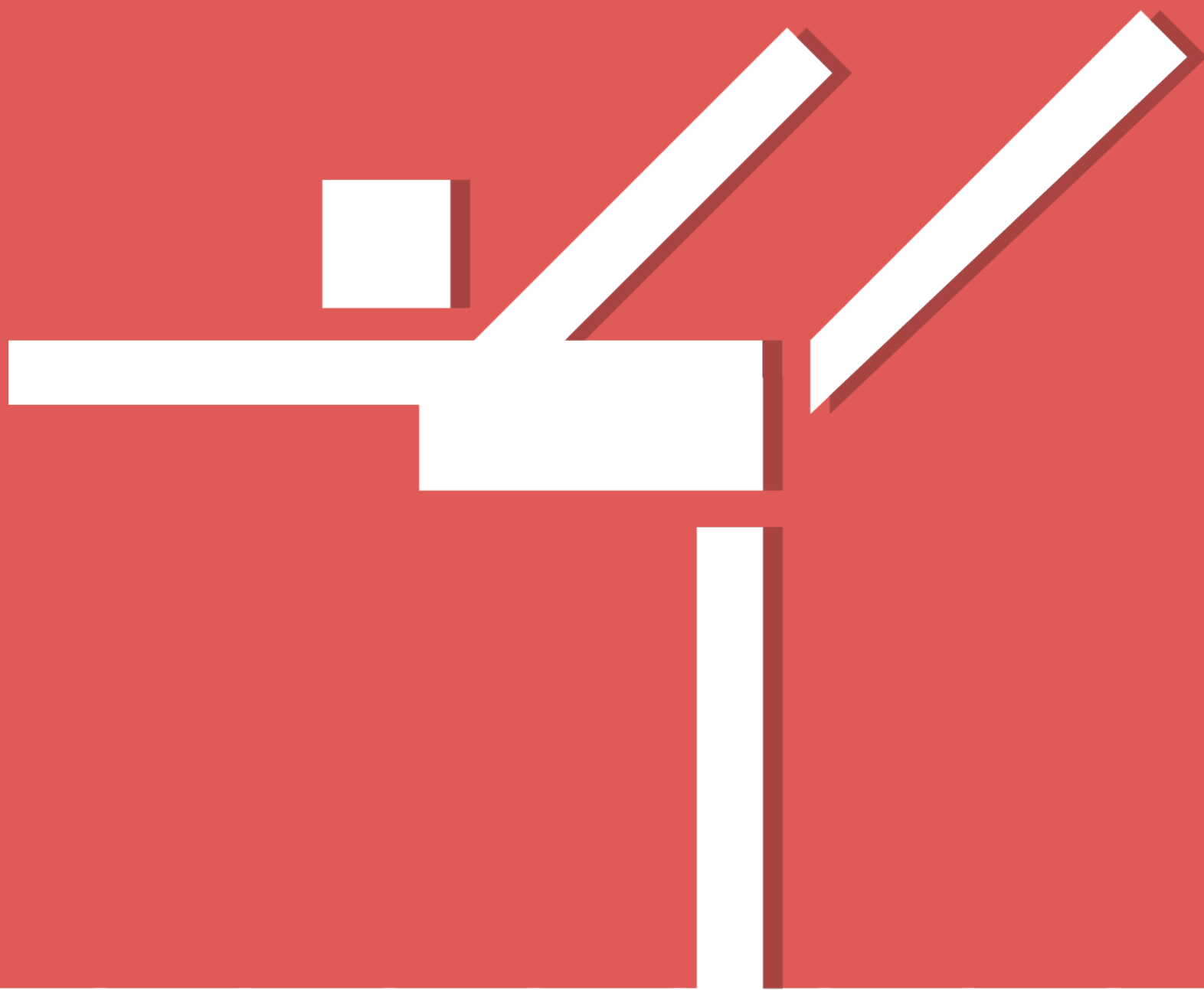


Волны и сигналы

Звуковые и электрические сигналы часто имеют периодическую форму, близкую к синусоиде. Поэтому эти функции используют при изучении волн, графиков измерений и передачи информации, где важно видеть повторяемость процесса.



Типичные ошибки при работе с любым углом



Путают координаты

На единичной окружности координаты точки — это $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, а не наоборот. Такая путаница особенно мешает при чтении графиков и решении задач на движение.

Не учитывают четверть

Знак функции зависит от положения угла, поэтому перед вычислением нужно определить четверть. Без этого легко получить правильное число, но с неверным знаком.

Смешивают период

Для синуса и косинуса период равен 2π , а не π . Ошибка в периоде приводит к неправильному приведению углов и повторению неверного результата.

Путают меры угла

Градусы и радианы нельзя использовать как взаимозаменяемые записи без пересчёта. Перед подстановкой в формулу следует убедиться, что мера угла выбрана одинаково во всём решении.

Сравнение способов задания угла



Способ	Где удобно	Плюс	Задача
Градусы	Черчение	Наглядно	Углы на рисунке
Радианы	Формулы	Компактно	Графики функций
Поворот	Окружность	Универсально	Любой угол
Координаты	Аналитика	Точно	Движение точки

Разные способы записи угла удобны для разных типов задач: одни проще для чертежа, другие — для формул и графиков.

Градусы удобны для изображения, радианы — для вычислений, а координатный и поворотный способы позволяют описывать любой угол без ограничений.

Связь с координатами и векторами

1

Точка на окружности

Если угол α задан на единичной окружности, его конечная точка имеет координаты $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Это сразу связывает тригонометрию с координатной плоскостью и делает вычисления наглядными.

2

Проекции вектора

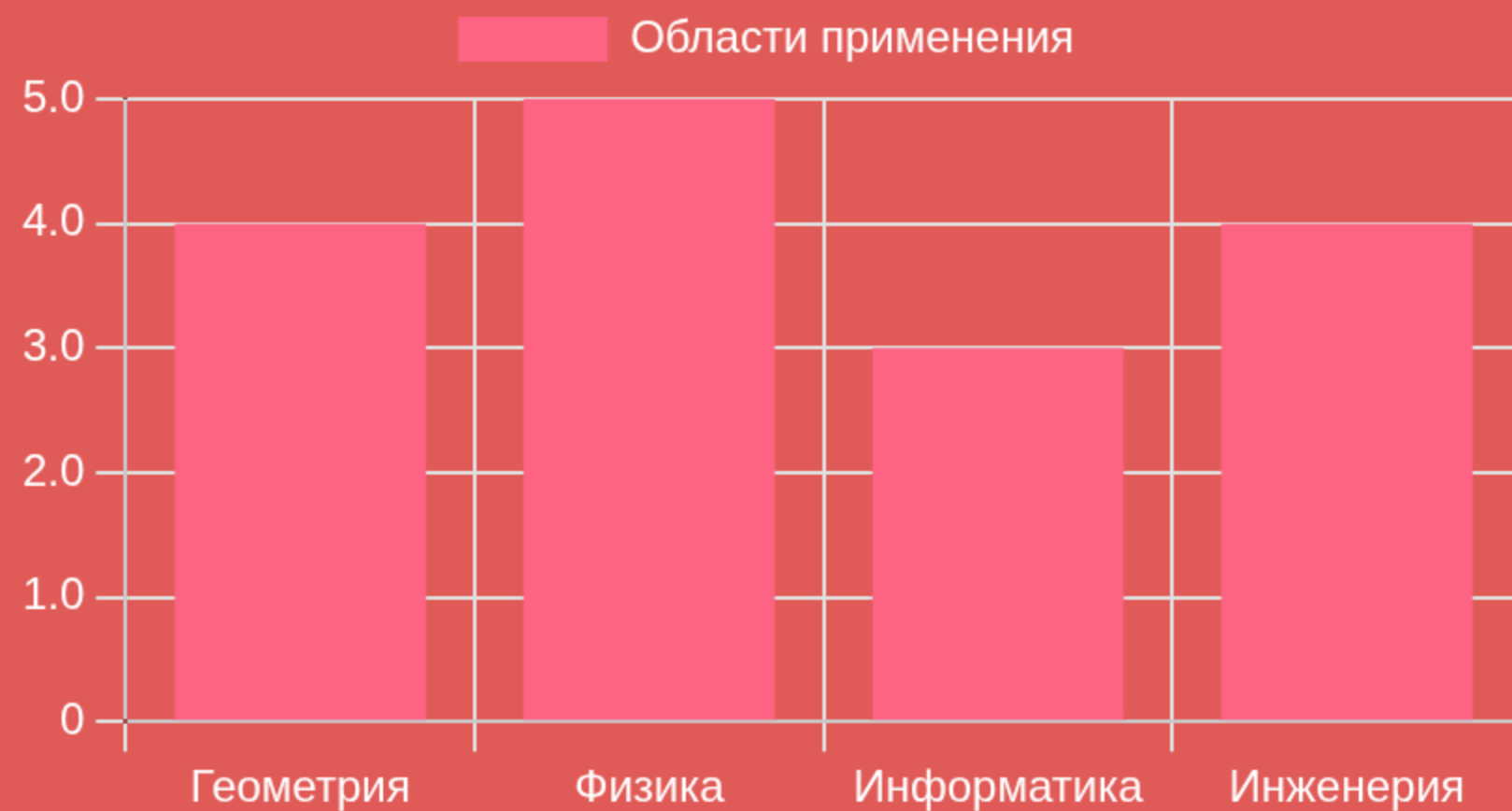
Для вектора на плоскости косинус и синус описывают его проекции на оси. Поэтому по углу наклона можно находить координаты конца вектора и анализировать направление движения.

3

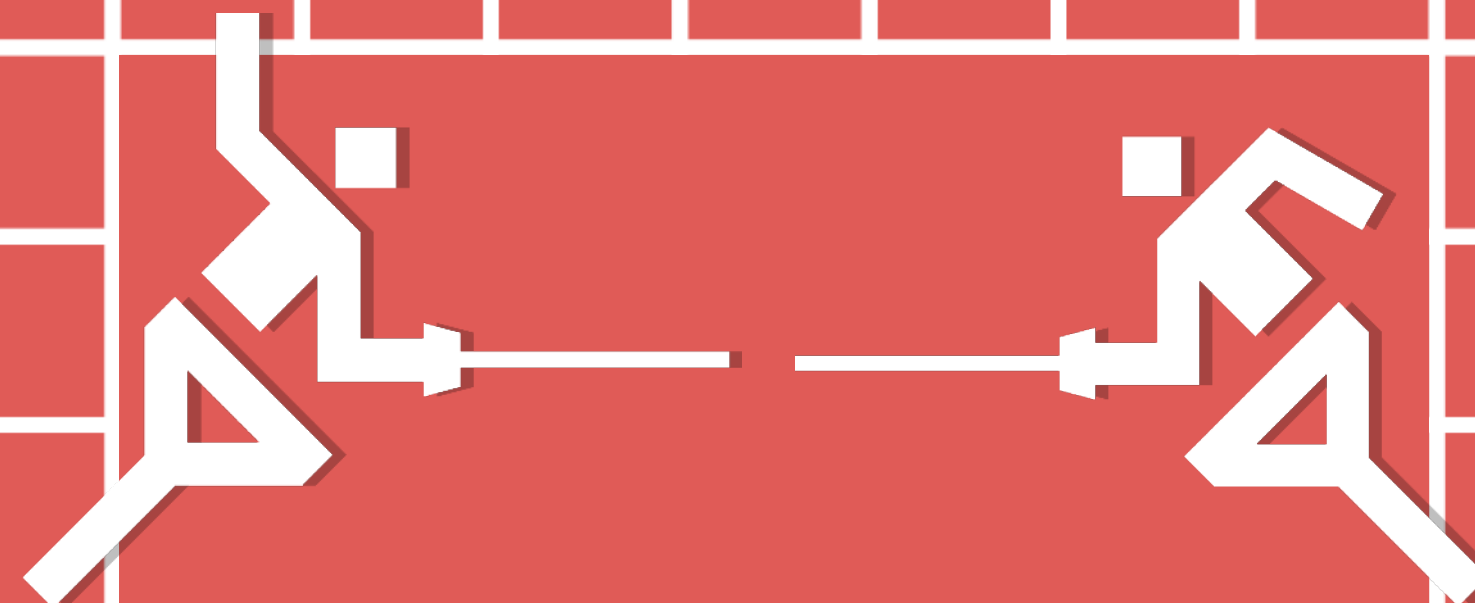
Основа задач

Такая связь особенно полезна в задачах на длину, координаты и построение графиков. Она объединяет геометрию, алгебру и векторную запись в одном способе рассуждения.

Где используются синус и косинус



Обобщение типичных школьных и прикладных примеров



Одна и та же тригонометрическая модель работает в задачах разной природы: от построений и измерений до анализа сигналов и движения. Чем сложнее задача, тем чаще синус и косинус выступают как универсальный язык периодичности, направления и проекций.

Почему синус и косинус любого угла важны

Универсальное определение через единичную окружность делает тригонометрию применимой к любому углу. Знаки, периодичность и формулы приведения превращают вычисления в понятную систему, полезную в 10 классе и дальше.

