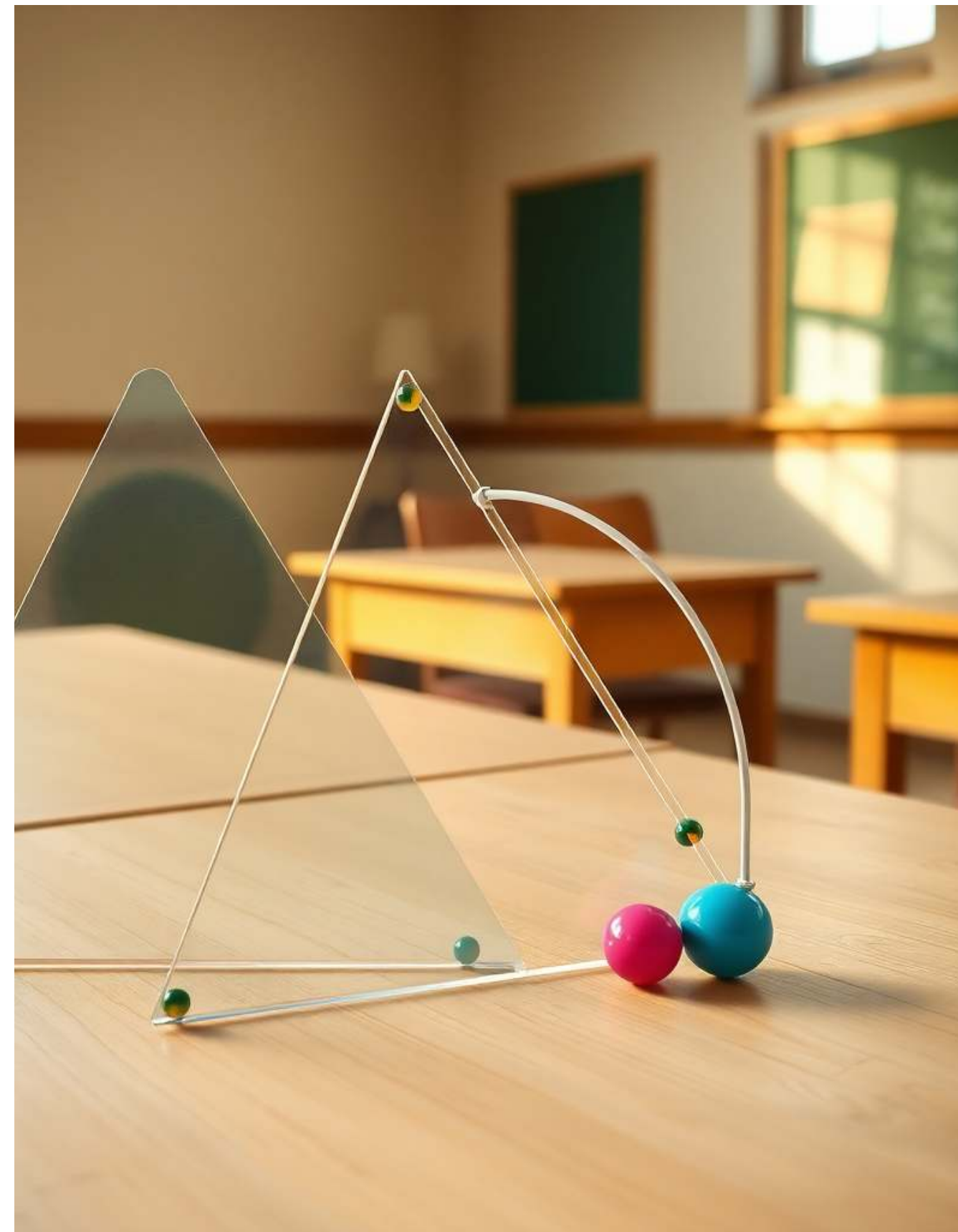


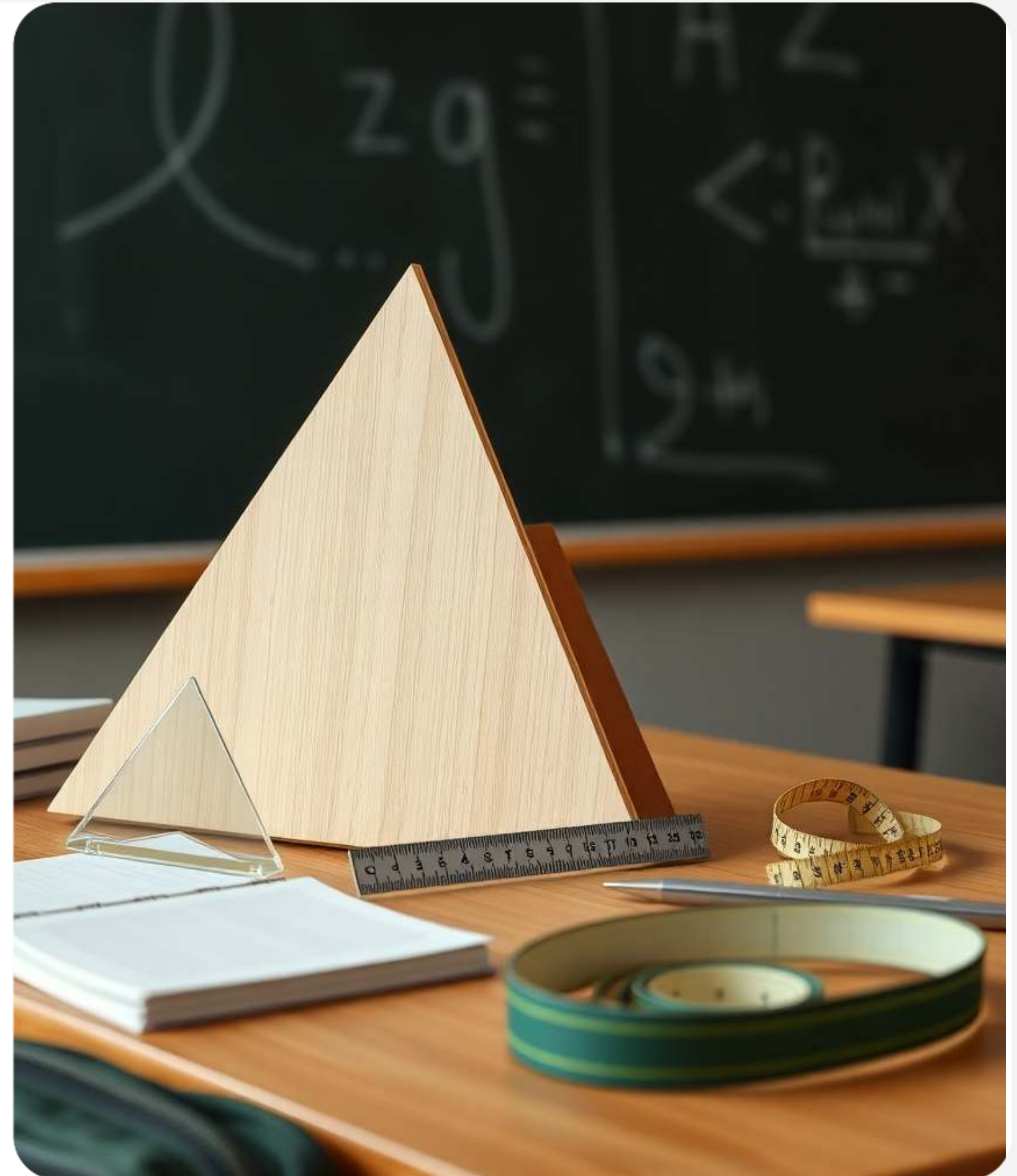
Квадратные уравнения: основная тема алгебры 8 класса

Разбираем вид, корни, дискриминант и способы решения.



Зачем изучать квадратные уравнения

Эта тема помогает уверенно решать задачи, понимать графики и готовит к более сложным разделам алгебры. Здесь важны аккуратные вычисления, выбор подходящего способа решения и умение проверять ответ.



Определение квадратного уравнения

Общий вид

Квадратным называют уравнение, в котором наибольшая степень неизвестного равна двум. Его записывают в форме $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c — числа.

Старший коэффициент

Коэффициент a стоит при x^2 и называется старшим. Именно он определяет, что уравнение относится к квадратным, поэтому условие $a \neq 0$ обязательно для правильной записи.

Другие коэффициенты

Коэффициент b показывает, сколько слагаемых связано с x , а c — свободный член, не содержащий неизвестного. Эти части помогают быстро определить структуру уравнения.

Почему это важно

Зная определение, легче распознавать квадратные уравнения в заданиях, выбирать способ решения и не путать их с линейными или другими видами уравнений.

Строение квадратного уравнения

Три части записи

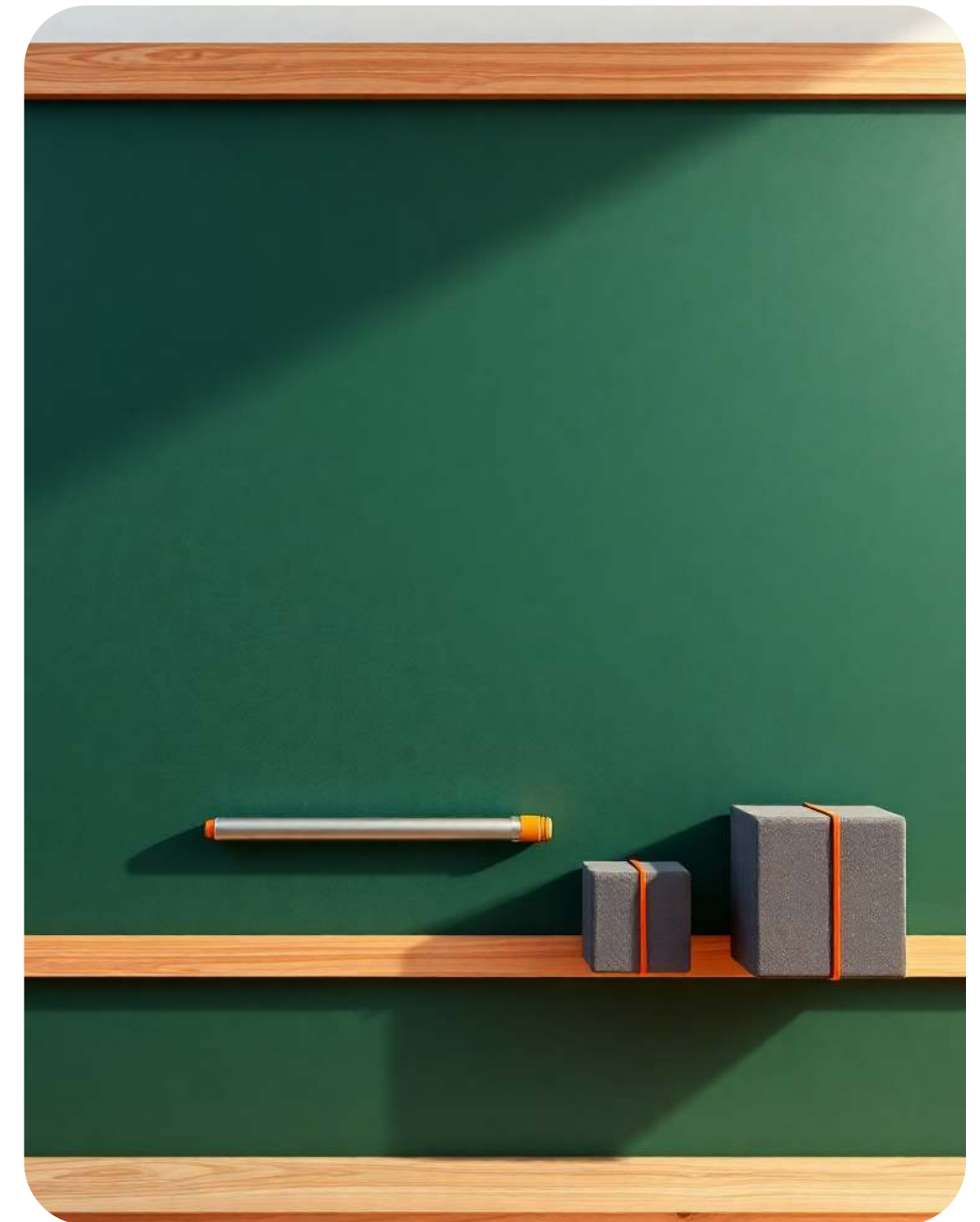
В записи $ax^2 + bx + c = 0$ легко выделить три элемента: член с квадратом неизвестного, член с x и свободное число. Это упрощает анализ уравнения.

Разные коэффициенты

Коэффициенты могут быть целыми, дробными и отрицательными. Поэтому уравнение важно читать внимательно, не пропуская знаки и не смешивая отдельные слагаемые.

Особые случаи записи

Если одно из слагаемых отсутствует, его коэффициент равен нулю. Тогда уравнение выглядит короче, но остаётся квадратным, если a по-прежнему не равен нулю.



Виды квадратных уравнений

Таблица показывает основные разновидности квадратных уравнений и помогает сразу выбрать подходящий способ решения.

Вид уравнения подсказывает, какой метод будет самым удобным: общий, упрощённый или специальный.

Вид	Запись	Особенность
Полное	$ax^2+bx+c=0$	Все члены есть
Неполное	$ax^2+bx=0$	$c=0$
Приведённое	$x^2+px+q=0$	$a=1$

Неполные квадратные уравнения

1

Если $c = 0$

Уравнение принимает вид $ax^2 + bx = 0$. В этом случае удобно вынести x за скобку, получить произведение и применить правило нуля произведения.

2

Если $b = 0$

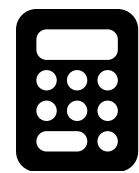
Получается уравнение $ax^2 + c = 0$. Его решают через нахождение x^2 , а затем извлекают квадратный корень, если это возможно в действительных числах.

3

Если $b = 0$ и $c = 0$

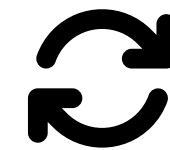
Тогда остаётся уравнение $ax^2 = 0$. Его решение одно: $x = 0$, потому что только это значение обращает выражение в ноль.

Приведённое квадратное уравнение



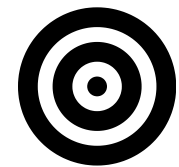
Удобная запись

Приведённое уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$.
Здесь старший коэффициент равен единице, поэтому запись становится короче и удобнее для вычислений.



Получение из общего вида

Часто такое уравнение получают, разделив обе части на старший коэффициент a . Это помогает перейти от более громоздкой записи к более простому виду.



Быстрый подбор корней

Для приведённого уравнения особенно полезна формула через p и q . Она помогает быстрее находить корни, если числа хорошо подбираются и легко проверяются.

Дискриминант и число корней

Вычисление D

Сначала находят дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$. Это число показывает, сколько действительных корней может иметь уравнение.

$D = 0$ или $D < 0$

При $D = 0$ получается один действительный корень, а при $D < 0$ действительных корней нет. Это позволяет заранее понять результат решения.

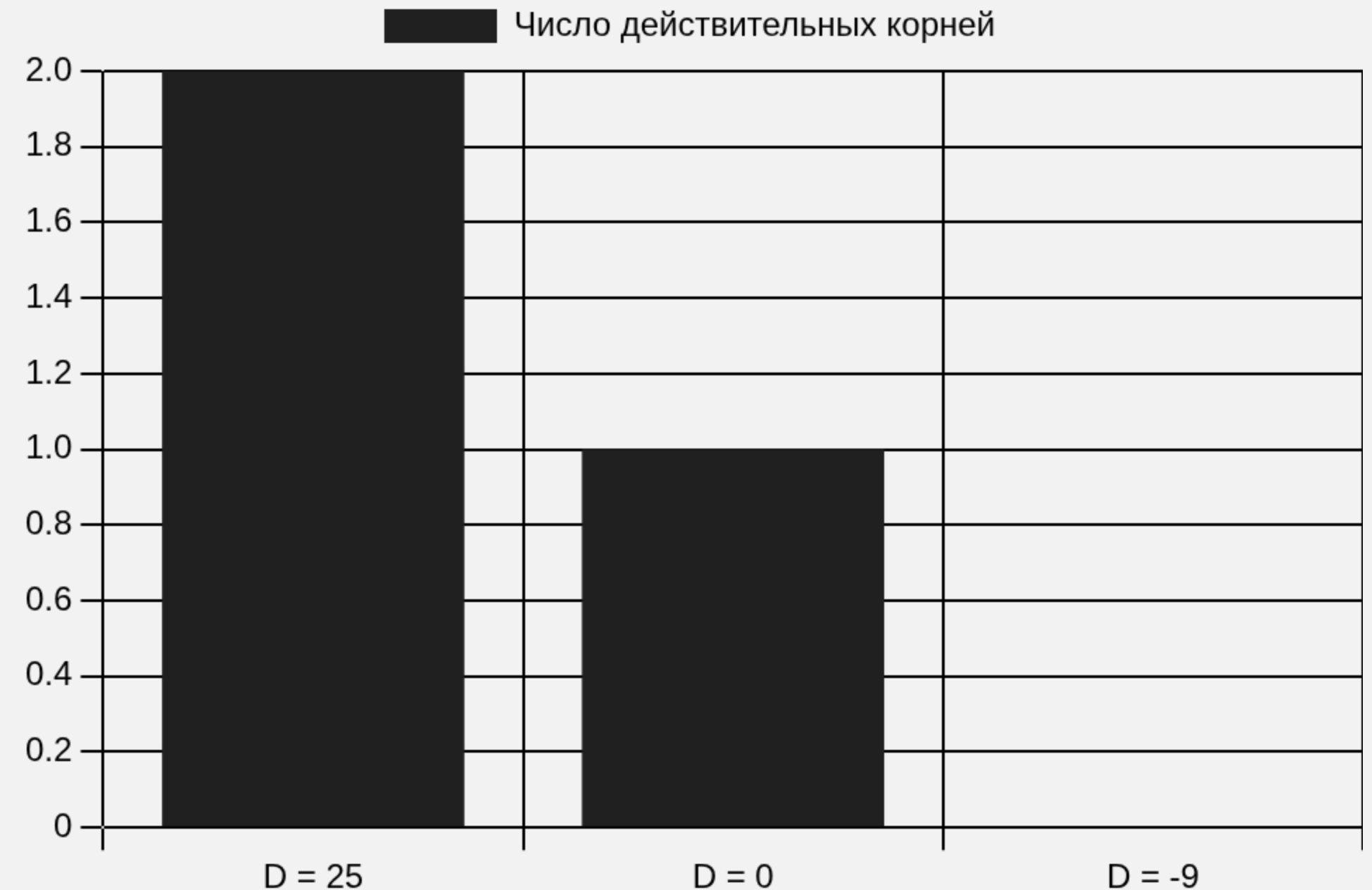
$D > 0$

Если дискриминант положителен, уравнение имеет два различных действительных корня. Они находятся по формуле корней и обычно отличаются друг от друга.

Как дискриминант влияет на количество корней

Три примера показывают, как меняется результат решения при разных значениях дискриминанта. Это удобно для быстрой проверки ответа.

Число действительных корней полностью зависит от знака дискриминанта: положительный, нулевой или отрицательный.



Формула корней квадратного уравнения

Основная формула

Корни находят по формуле $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$.

Сначала вычисляют дискриминант, а затем подставляют его значение в выражение.

Знак «плюс-минус»

Запись с $\pm$ означает два возможных значения x .

Если $D > 0$, формула даёт два разных корня; при $D = 0$ оба значения совпадают.

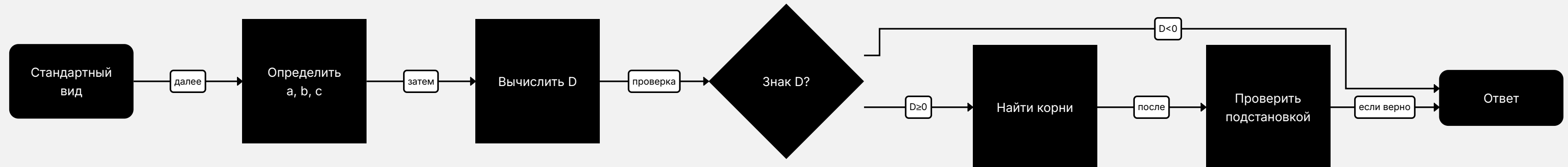
Когда применять

Формулу используют после нахождения дискриминанта и определения коэффициентов.

Она подходит для любого квадратного уравнения, записанного в стандартном виде.

Порядок решения квадратного уравнения

Последовательность действий от приведения уравнения к стандартному виду до проверки найденных корней



Решение через разложение на множители

1

Переносим всё в одну часть

Сначала уравнение приводят к виду, где справа стоит ноль. Это нужно, чтобы можно было применить правило произведения: если произведение равно нулю, хотя бы один множитель обращается в ноль.

2

Разлагаем выражение

Левую часть стараются представить как произведение скобок. Например, запись вида $(x - 2)(x + 5) = 0$ сразу показывает два возможных значения x , не прибегая к дискриминанту.

3

Проверяем каждый корень

Далее каждую скобку приравнивают к нулю и получают отдельные уравнения. После решения обязательно подставляют найденные значения в исходное выражение, чтобы убедиться в правильности ответа.



Способы решения квадратных уравнений

Метод	Когда удобен	Пример уравнения
Множители	Есть разложение	$ax^2+bx+c=0$
Квадрат двучлена	Выделяется часть	$x^2+px+q=0$
Дискриминант	Подходит всегда	любое
Виет	Приведённое	$x^2+px+q=0$

Выбор метода зависит от вида коэффициентов и от того, насколько удобно преобразуется левая часть уравнения.

Каждый способ полезен в своей ситуации: универсальная формула подходит всегда, а разложение и теорема Виета часто дают более быстрый путь к ответу.

Теорема Виета для приведённого уравнения



Сумма корней

Для уравнения $x^2 + px + q = 0$ сумма корней равна $-p$. Эта связь позволяет быстро сопоставлять найденные числа с коэффициентом при x и сразу замечать ошибку.



Произведение корней

Произведение корней равно q , то есть свободному члену. Если числа подобраны верно, их произведение и сумма одновременно совпадают с условиями уравнения.



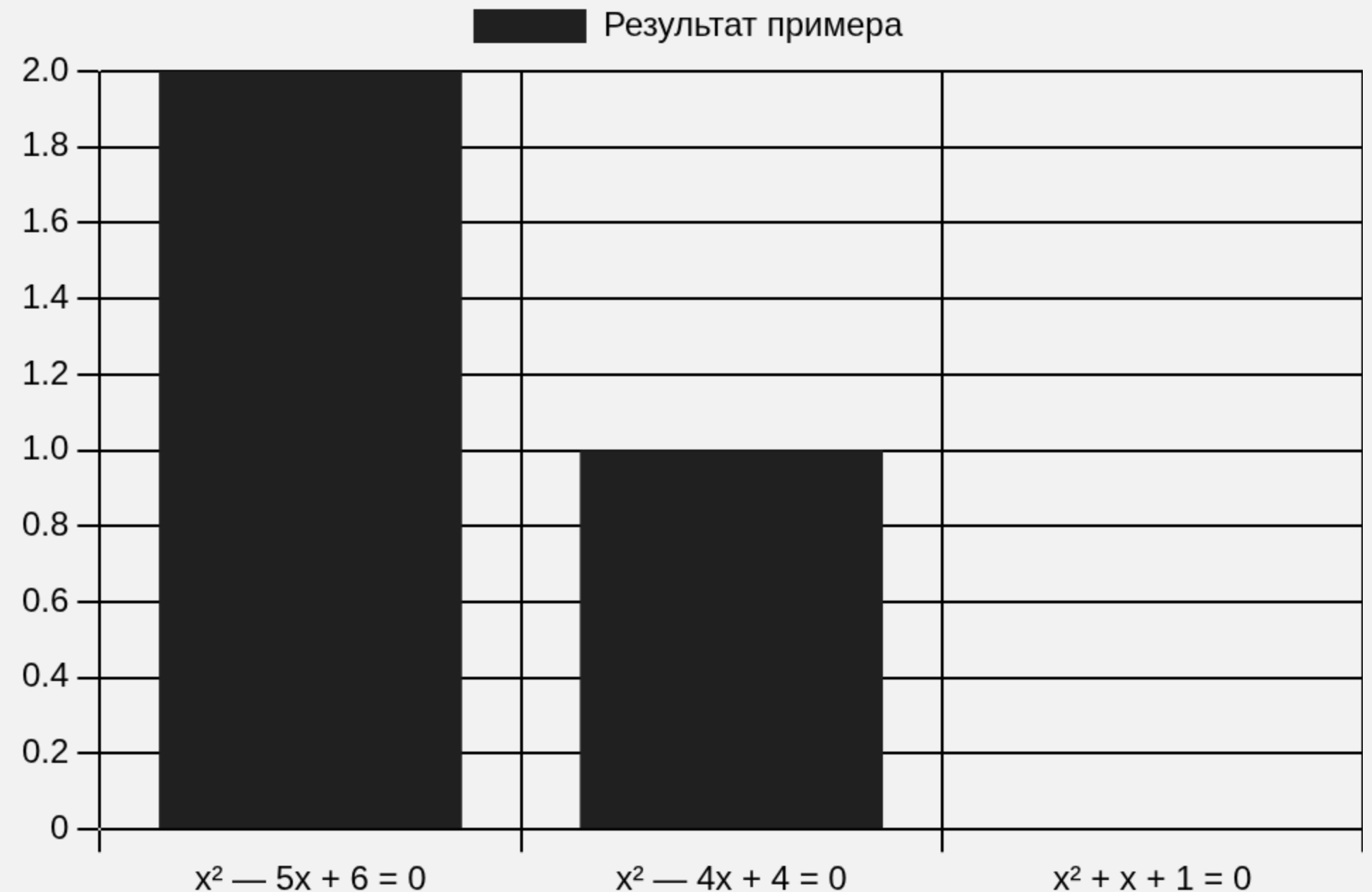
Проверка ответа

Теорема Виета удобна не только для подбора корней, но и для проверки решения. Она помогает убедиться, что полученные числа действительно образуют нужную пару.

Проверка решений на примерах

На диаграмме показано, как меняется число действительных корней у трёх уравнений с разными значениями дискриминанта.

Чем меньше дискриминант, тем меньше действительных корней: положительный даёт два, нулевой — один, отрицательный — ни одного.



Типовые ошибки при решении

1

Неверные коэффициенты

Часто ошибаются уже при записи a , b и c , особенно если уравнение нужно сначала преобразовать. Из-за этого дальше неверно считаются дискриминант и корни.

2

Ошибка в знаках

В формуле корней легко пропустить знак минус перед b или неправильно раскрыть знак после извлечения корня. Такая неточность сразу меняет ответ.

3

Неверный дискриминант

Иногда неправильно возводят в квадрат число b или забывают умножить $4ac$. Чтобы избежать ошибки, полезно записывать вычисления по шагам и не сокращать их слишком рано.

4

Нет проверки

Даже если корни получены, их нужно подставить в исходное уравнение. Проверка показывает, что ответ действительно обращает левую часть в ноль, а не только выглядит правильным.

Квадратные уравнения в задачах



Площадь прямоугольника как уравнение

Если одна сторона прямоугольника выражена через x , а другая зависит от того же неизвестного, условие площади приводит к квадратному уравнению. Тогда нужно не только вычислить корни, но и выбрать тот, который подходит по смыслу задачи. Такой приём часто встречается в школьной геометрии.



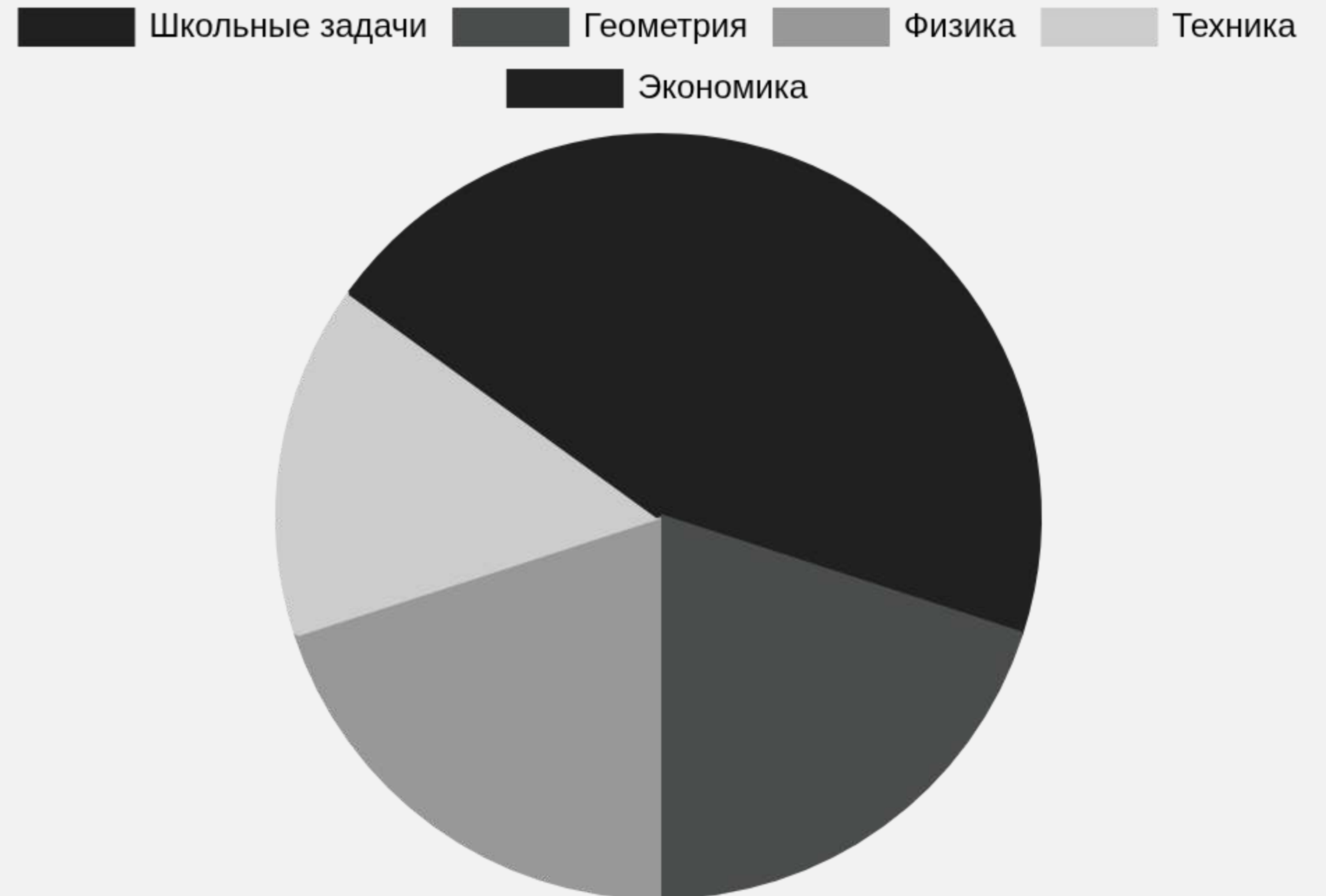
Числа, которые нужно подобрать

В задачах на поиск чисел по условию квадратное уравнение появляется после составления выражения для суммы, разности или произведения. Затем ответ проверяют не только вычислением, но и тем, выполняются ли все условия задачи. Это учит переводить текст в алгебраическую запись.

Где встречаются квадратные уравнения

В школьном курсе чаще всего они появляются в задачах на площадь, периметр и движение, где неизвестное входит и линейно, и квадратично.

Квадратные уравнения описывают ситуации, в которых одна величина зависит сразу от x и от x^2 , поэтому они встречаются в разных разделах математики и наук.



Связь уравнения и параболы

1

График функции

График функции $y = ax^2 + bx + c$ называется параболой. Его форма зависит от знака a : ветви могут быть направлены вверх или вниз, но связь с уравнением сохраняется.

2

Точки пересечения

Корни квадратного уравнения — это абсциссы точек, где парабола пересекает ось x . Если пересечений два, уравнение имеет два действительных корня; если одно, корень один.

3

Связь с дискриминантом

Когда парабола не пересекает ось x , действительных корней нет. Поэтому по виду графика можно заранее понять результат решения и проверить, соответствует ли он знаку дискриминанта.



Ключ к уверенной работе с квадратными уравнениями

Квадратные уравнения решаются разными способами, но всегда требуют внимательной записи коэффициентов, аккуратных вычислений и проверки ответа. Именно это делает тему полезной и практичной.