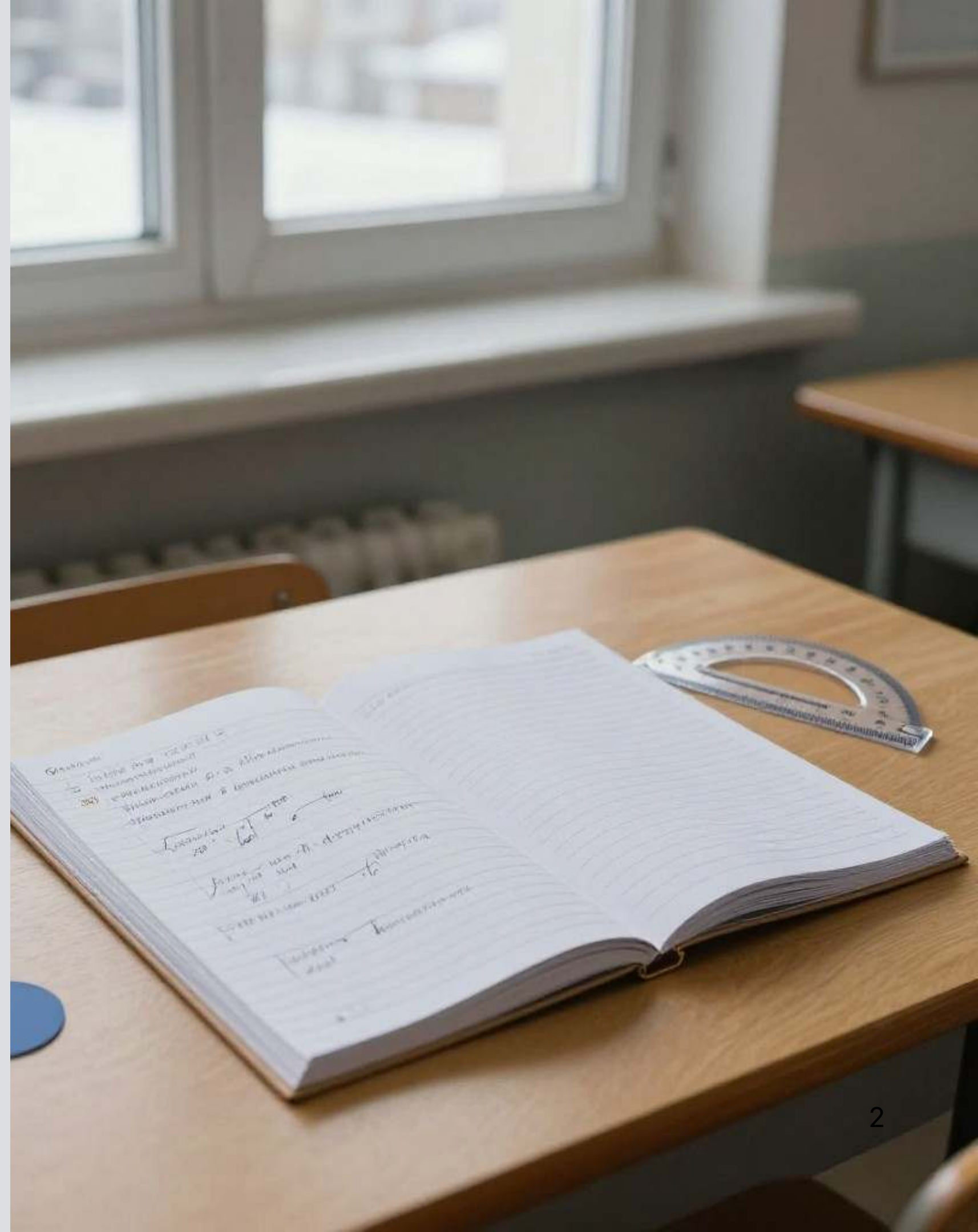


Синус, косинус и тангенс двойного угла

Разберём вывод, применение и типичные ошибки
в трёх формулах.

Что нужно помнить перед темой двойного угла

Чтобы уверенно работать с двойным углом, нужно помнить единичную окружность, формулы сложения и определение тангенса как отношения синуса к косинусу.



Зачем нужны формулы двойного угла

1

Быстрый переход

Формулы двойного угла превращают выражения с углом $2x$ в записи через x . Это упрощает вычисления, когда нужное значение напрямую не известно.

2

Упрощение выражений

Они помогают сокращать дроби и радикальные выражения, потому что заменяют сложные тригонометрические части более удобными тождествами с одним аргументом.

3

Решение уравнений

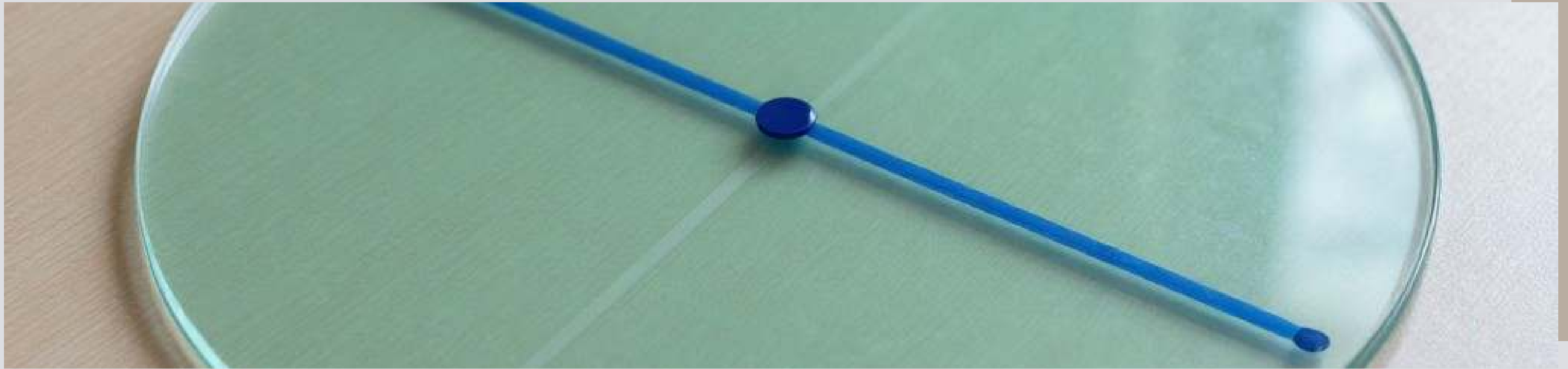
При решении уравнений двойной угол часто позволяет свести задачу к стандартным формулам и выбрать более простой путь преобразований.

4

Проверка результата

Та же идея полезна в проверке ответа: разные формы одной и той же формулы позволяют контролировать вычисления и избегать ошибок.

База: определения и формулы сложения



Единичная окружность

На единичной окружности косинус задаёт абсциссу точки, а синус — её ординату. Поэтому тригонометрические функции тесно связаны с геометрическим положением угла.

Синус суммы

Формула синуса суммы и разности записывается как $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. Она станет основой для вывода формулы $\sin(2x)$.

Косинус суммы

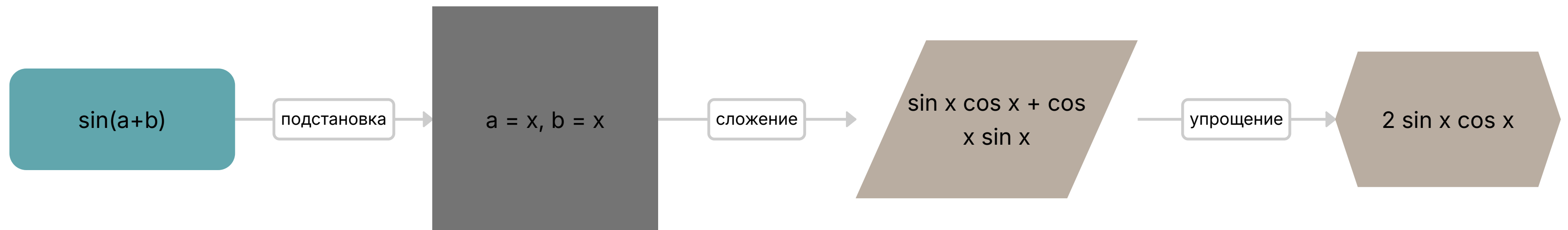
Для косинуса используется правило $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$. Именно здесь появляется знакомое выражение с разностью квадратов.

Определение тангенса

Тангенс определяют как отношение $\sin x / \cos x$. Эта запись удобна, но требует помнить, что знаменатель не должен обращаться в ноль.

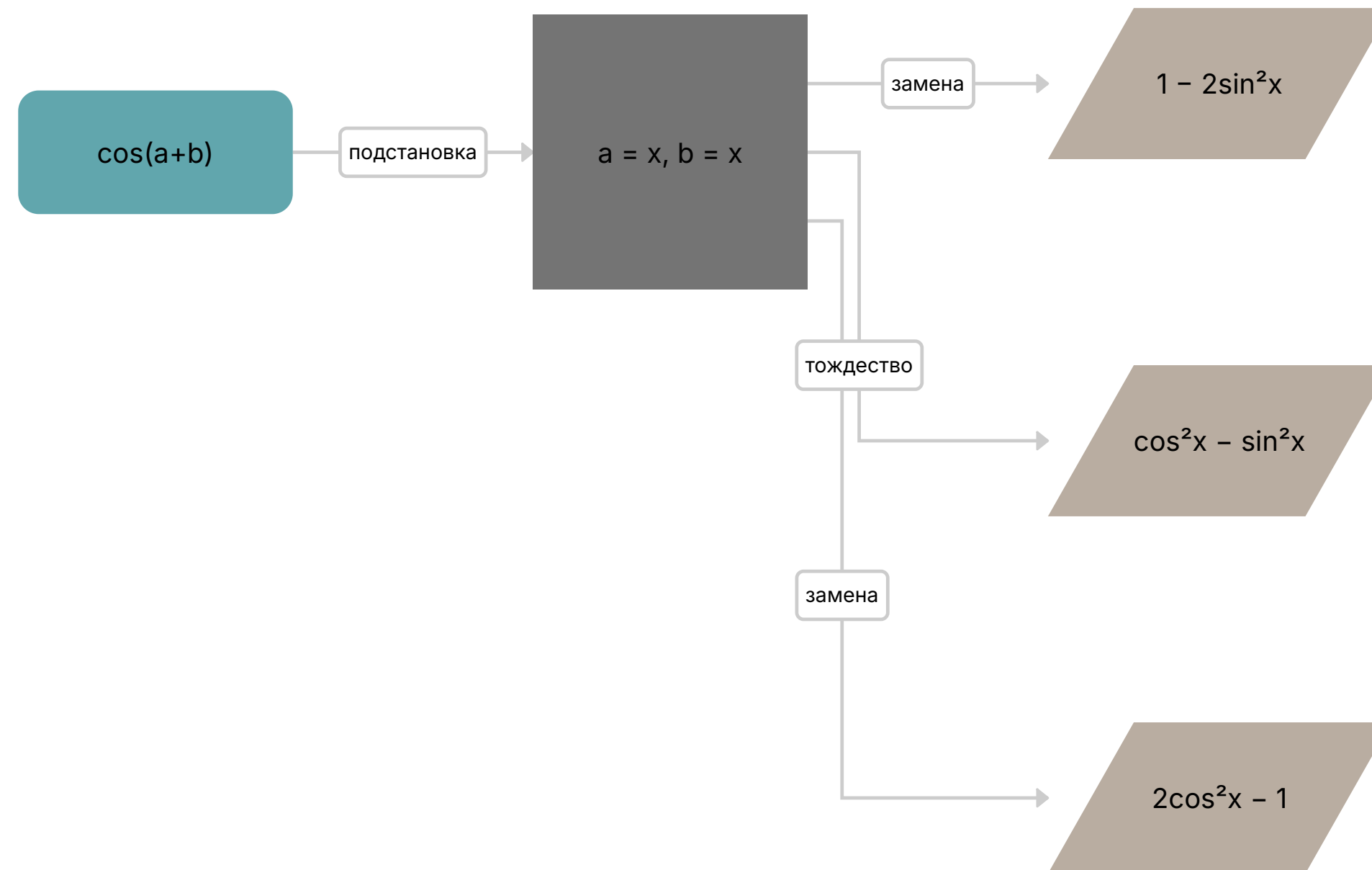
Как получить $\sin(2x)$

Последовательность преобразований от формулы суммы к итоговому виду



Как получить $\cos(2x)$

От формулы суммы к трём равносильным записям косинуса двойного угла



Тангенс двойного угла и область определения

1

Шаг через отношение

Сначала записывают тангенс двойного угла как отношение $\sin(2x)$ к $\cos(2x)$. Затем подставляют формулы двойного угла и выражают результат через $\tan x$.

2

Итоговый вид

После деления числителя и знаменателя на $\cos^2 x$ получают компактную формулу $\tan(2x) = 2\tan x / (1 - \tan^2 x)$. Она особенно удобна для алгебраических преобразований.

3

Область определения

Формула верна только там, где $\cos(2x)$ не равен нулю. Если знаменатель обращается в ноль, тангенс двойного угла не определён.

Сводка формул в одном месте

Функция	Формулы	Смысл
$\sin(2x)$	$2\sin x \cos x$	Произведение
$\cos(2x)$	$\cos^2 x - \sin^2 x$; $2\cos^2 x - 1$; $1 - 2\sin^2 x$	Три формы
$\tan(2x)$	$2\tan x / (1 - \tan^2 x)$	Дробь

Все основные записи удобно держать рядом: они взаимно заменяют друг друга и позволяют выбирать форму под конкретную задачу.

Для вычислений и упрощений особенно важен выбор той записи, которая быстрее сокращается или подставляется в выражение.

Тригонометрические тождества двойного угла

Пример 1: вычисление значения синуса

Подстановка угла

Возьмём $x=15^\circ$, тогда $\sin 30^\circ$ можно записать как $\sin(2x)$. Это сразу переводит задачу к формуле $\sin(2x)=2\sin x \cos x$.

Известные значения

Далее подставляют известные значения $\sin 15^\circ$ и $\cos 15^\circ$, полученные стандартными преобразованиями или из табличных формул.

Сведение к произведению

После умножения получается точное значение без приближений. Здесь особенно видно, что двойной угол превращает задачу в произведение двух функций.

Общий шаблон

Такой приём полезен не только для 30° , но и для многих углов, которые удобно представить как удвоение меньшего угла.

Здесь удобно перейти от известного угла к форме, которая сразу даёт значение косинуса через одно тождество.

60°

получается как удвоенный угол и подставляется в формулу двойного угла.

При $\tan x = 1/3$ формула даёт одно рациональное значение вместо громоздкого выражения.

$3/4$

— это результат подстановки в формулу $\tan(2x)$.

Подстановка в формулу $\tan(2x) = 2 \tan x / (1 - \tan^2 x)$ при $\tan x = 1/3$.

После раскрытия скобок остаются два слагаемых с одинаковой структурой, которые удобно объединить.

2

формулы двойного угла дают одно выражение через $\sin x$ и $\cos x$.

Две эквивалентные замены помогают убрать косинус двойного угла из дробей и короче записать выражение.

2

подстановки $\begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$ помогают перейти к квадратам $\sin x$ или $\cos x$.

Тождества $\begin{cases} 1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x \\ 1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x \end{cases}$

Одна удачная замена позволяет вынести общий множитель и сократить выражение без лишних преобразований.

1

правильно выбранная форма двойного угла часто сокращает решение.

Два эквивалентных вида $\cos(2x)$ позволяют свести выражение к одной тригонометрической переменной.

2

альтернативные формы $\cos(2x)$ выбирают в зависимости от того, что нужно исключить.

Тождества $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

Как выразить $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ через $\cos(2x)$

Величина	Через $\cos(2x)$
$\sin^2 x$	$(1 - \cos(2x))/2$
$\cos^2 x$	$(1 + \cos(2x))/2$

Обратные формулы удобно использовать при переходе от квадратов функций к двойному углу и обратно.

Обе формулы позволяют заменить квадрат тригонометрической функции выражением через двойной угол.

Следствие из формулы $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ и тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Частые ошибки и правильная запись

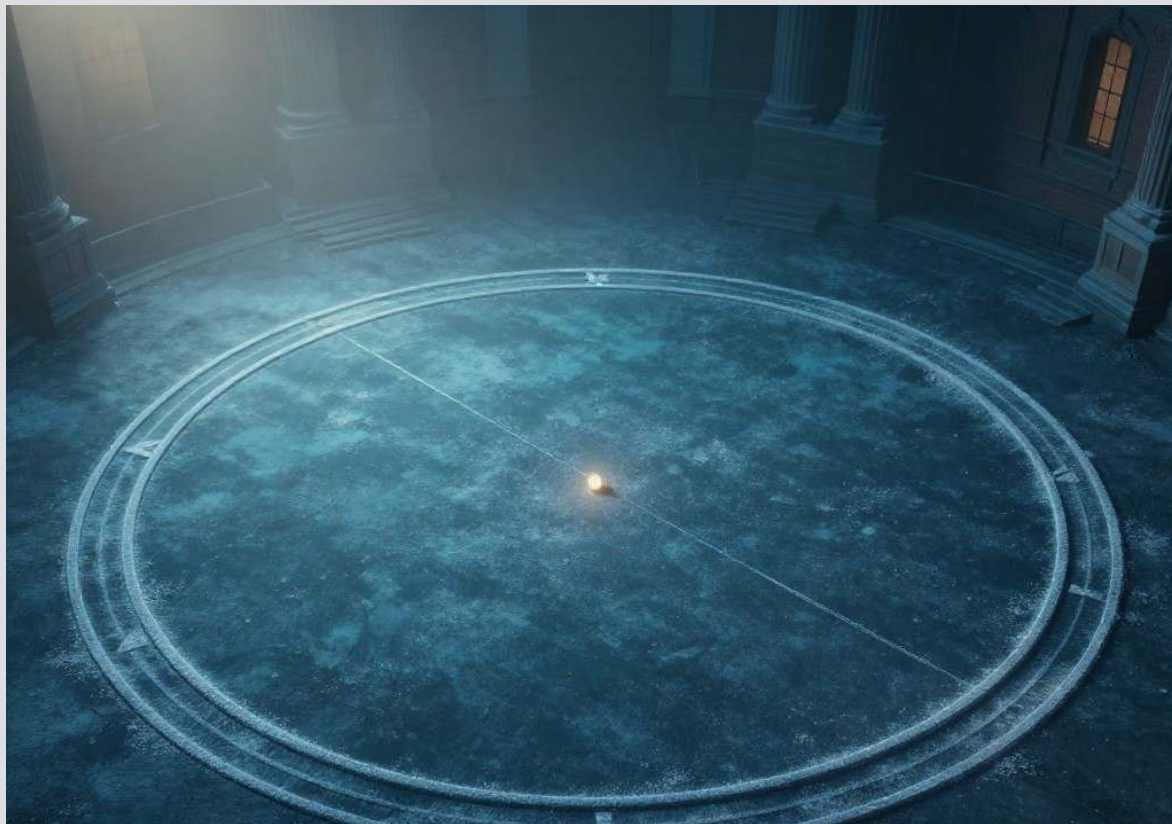
Ошибка	Как правильно
$\sin^2(2x)$	Писать без двусмысленности
$\tan(2x)$	Проверять знаменатель
$\cos(2x)$	Следить за знаками

Три типичные ошибки связаны с записью, областью определения и знаками в формулах.

Даже верная формула даёт неверный результат, если не проверять запись и условия применимости.

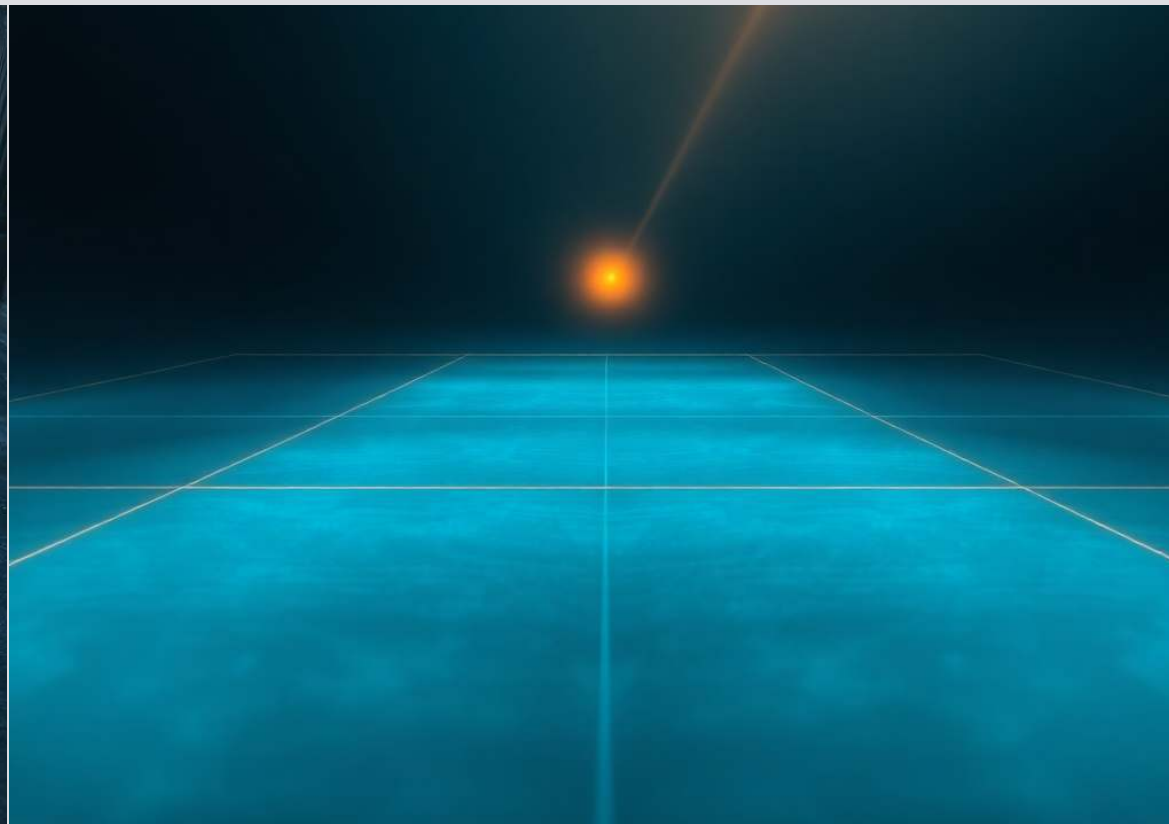
Правила применения формул двойного угла и стандартные тождества тригонометрии.

Геометрическая интуиция удвоения угла



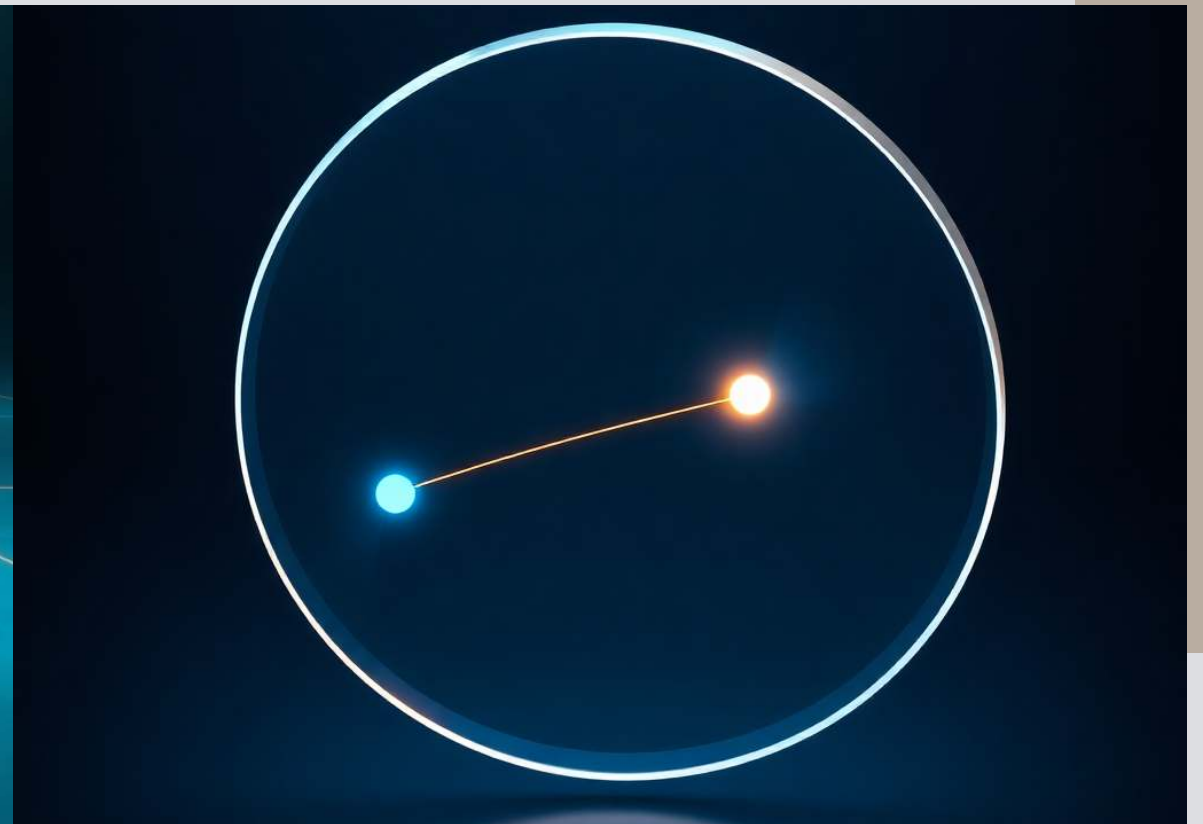
Поворот по окружности

На единичной окружности удвоение угла видно как движение по дуге вдвое дальше. Точка меняет координаты не случайно: формулы двойного угла точно описывают, как смещаются синус и косинус.



Почему важна четверть

Знак функций определяется четвертью, в которой оказывается новый угол. Поэтому на рисунке важно отметить оси и направление отсчёта: без этого легко перепутать положительные и отрицательные значения.



Геометрия формулы

Если соединить исходную точку и точку после удвоения, становится заметно, что преобразование не изменяет закон движения, а лишь пересчитывает координаты через уже известные значения $\sin x$ и $\cos x$.

Мини-практикум: 3 короткие задачи

1

1. Найти $\cos(2x)$

Подставьте $\sin x = 3/5$ в $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$. Так вы получите значение без поиска самого угла и увидите, почему удобно выбирать именно эту форму.

2

2. Упростить выражение

Раскройте $1 - \cos(2x)$ через $\sin^2 x$ и проверьте, как исчезает косинус двойного угла. Это короткое преобразование часто используется для сокращения дробей и упрощения корней.

3

3. Найти $\tan(2x)$

Используйте формулу $\tan(2x) = 2\tan x / (1 - \tan^2 x)$ при $\tan x = 2$. После подстановки обязательно оцените знаменатель: именно он показывает, определён ли результат.

Три формулы, которые экономят время

Формулы двойного угла превращают сложные выражения в знакомые тождества и дают быстрый путь к вычислениям. Запомните три основы: синус, косинус и тангенс двойного угла.