

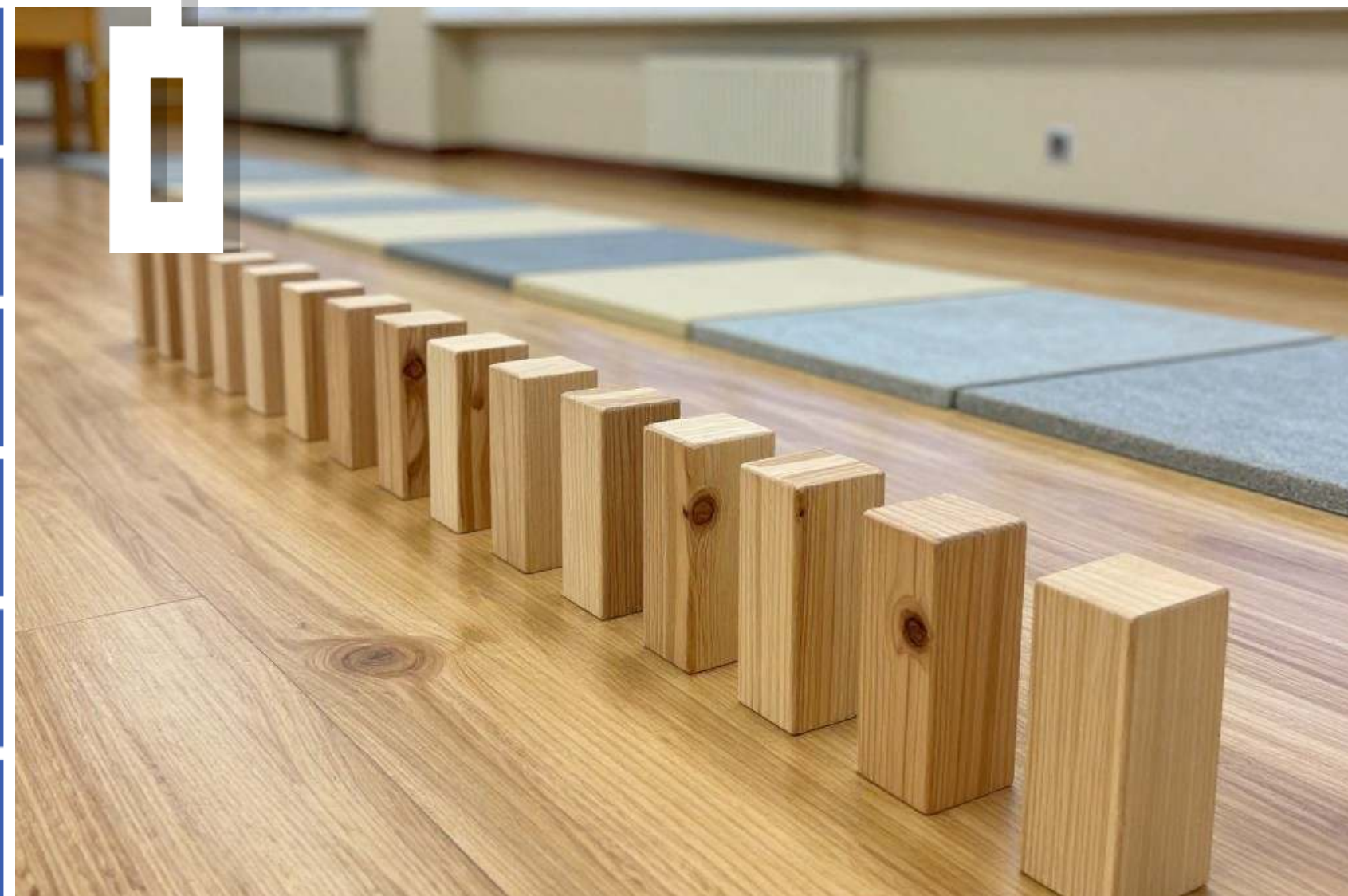
Ограниченные и неограниченные последовательности

Как числа ведут себя
в последовательности?

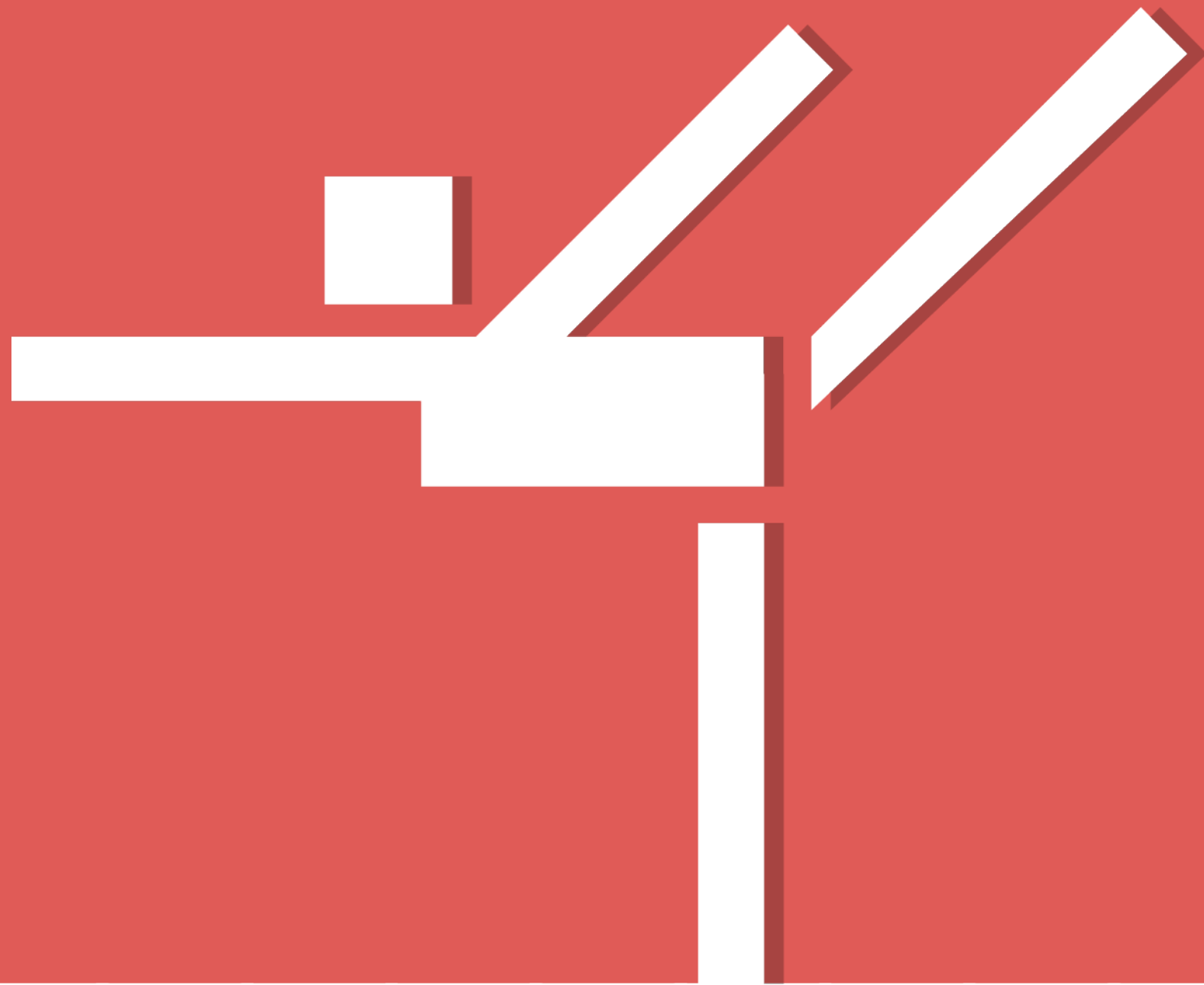


Где встречаются
последовательности
и зачем изучать их свойства

Последовательности помогают описывать
изменения в таблицах, формулах и графиках.
На их примере удобно увидеть, когда числа
остаются в одном диапазоне, а когда растут
без границ.



Что такое последовательность



Упорядоченный набор

Последовательность — это числа, записанные по порядку: $a_1, a_2, a_3, \dots$. Здесь важно не только, какие числа выбраны, но и какое место каждое из них занимает.

У каждого члена свой номер

Номер показывает, какой по счёту стоит член последовательности. Поэтому a_1, a_2 и a_3 — разные элементы, даже если сами значения совпадают или повторяются много раз.

Порядок нельзя менять

Если переставить одинаковые числа местами, получится уже другая последовательность. Для последовательностей важен именно порядок записи, а не только набор входящих в неё чисел.

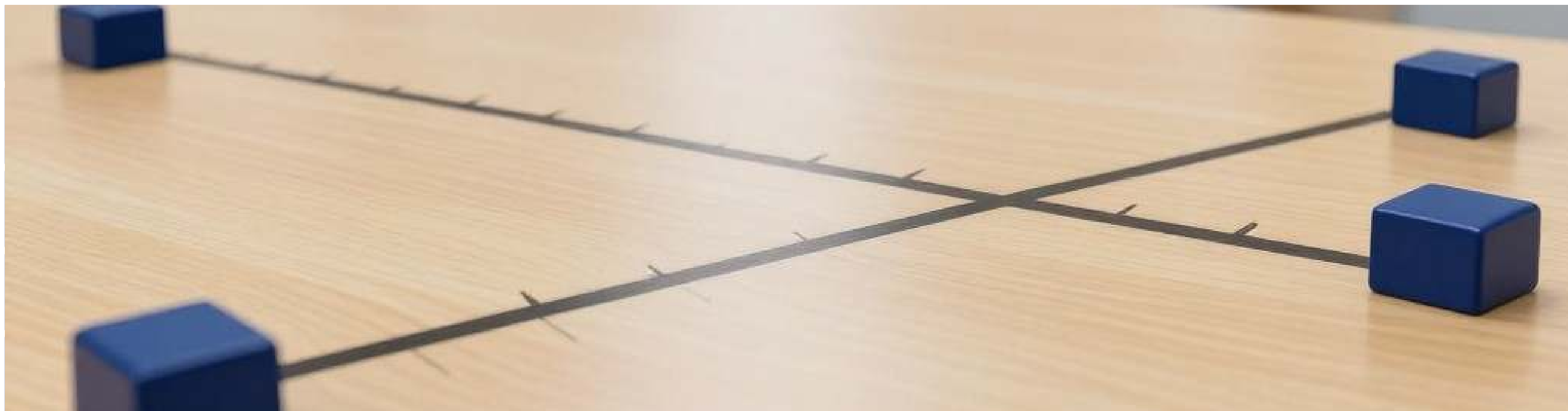
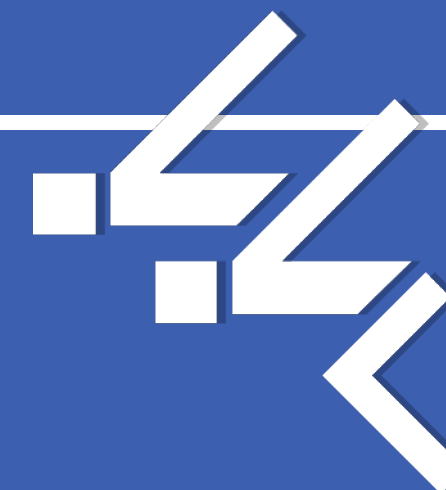
Разные виды чисел

Членами последовательности могут быть натуральные, целые, дробные, отрицательные и десятичные числа. Это делает последовательности удобным способом записывать самые разные закономерности.

Запись через формулу

Часто последовательность задают правилом для n -го члена, например выражением с переменной n . Тогда можно находить любой член, не выписывая все предыдущие значения.

Ограниченность на числовой прямой



Две границы

Ограниченная последовательность целиком помещается между двумя числами: нижней и верхней границей. Все её члены остаются внутри одного промежутка на числовой прямой.

Наглядное расположение

Если изобразить члены последовательности точками, видно, что они не выходят за пределы отмеченного отрезка. Это и означает, что значения удерживаются в заданных границах.

Пример с числами

Последовательность $-2; 0; 1,5; 1,9; 1,99$ расположена в одном диапазоне. Хотя значения меняются, они всё равно остаются между выбранными границами.

Главная идея

Ограниченность означает не маленькие значения, а наличие общего коридора для всех членов. Именно поэтому последовательность может меняться, но оставаться ограниченной.

Примеры ограниченных последовательностей



Во всех приведённых примерах значения не выходят за один и тот же диапазон.

Во всех случаях можно указать общие границы для членов последовательности, значит значения остаются в одном диапазоне.

Последовательность	Нижняя	Верхняя	Тип
$1/n$	0	1	ограниченная
$3, 3, 3, \dots$	3	3	ограниченная
$(-1)^n$	-1	1	ограниченная
$2 - 1/n$	1	2	ограниченная

Примеры из школьного курса алгебры: анализ первых членов и возможных границ последовательностей.

Ограниченность сверху и снизу

1

Верхняя граница

Последовательность ограничена сверху, если все её члены не превосходят одного числа M . Это число служит общей верхней границей для всех значений.

2

Нижняя граница

Последовательность ограничена снизу, если все её члены не меньше одного числа m . Тогда значения не опускаются ниже общей нижней границы.

3

Обе границы сразу

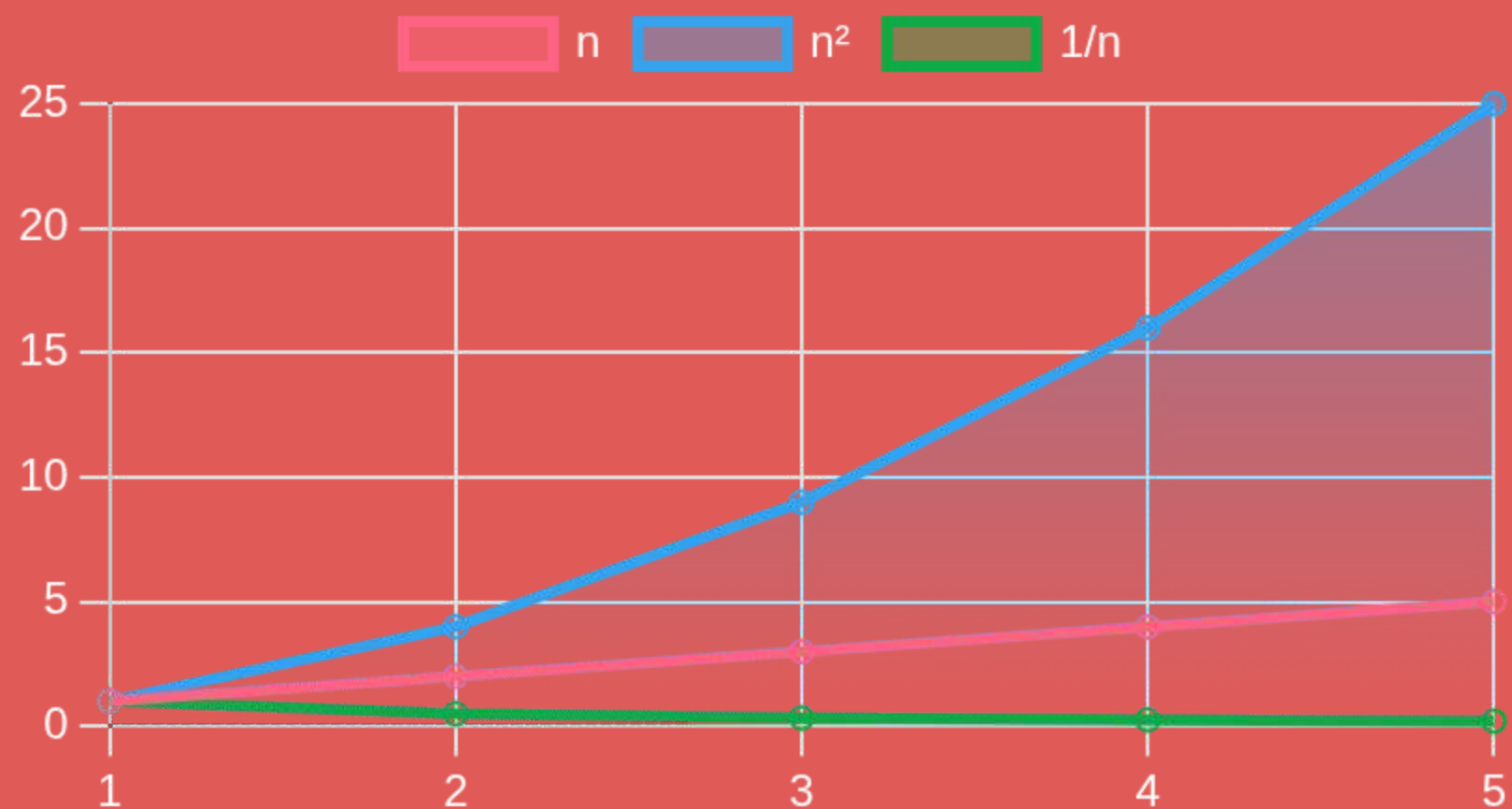
Если последовательность имеет и верхнюю, и нижнюю границу, она ограничена. Значит, все её члены лежат в одном конечном промежутке.

4

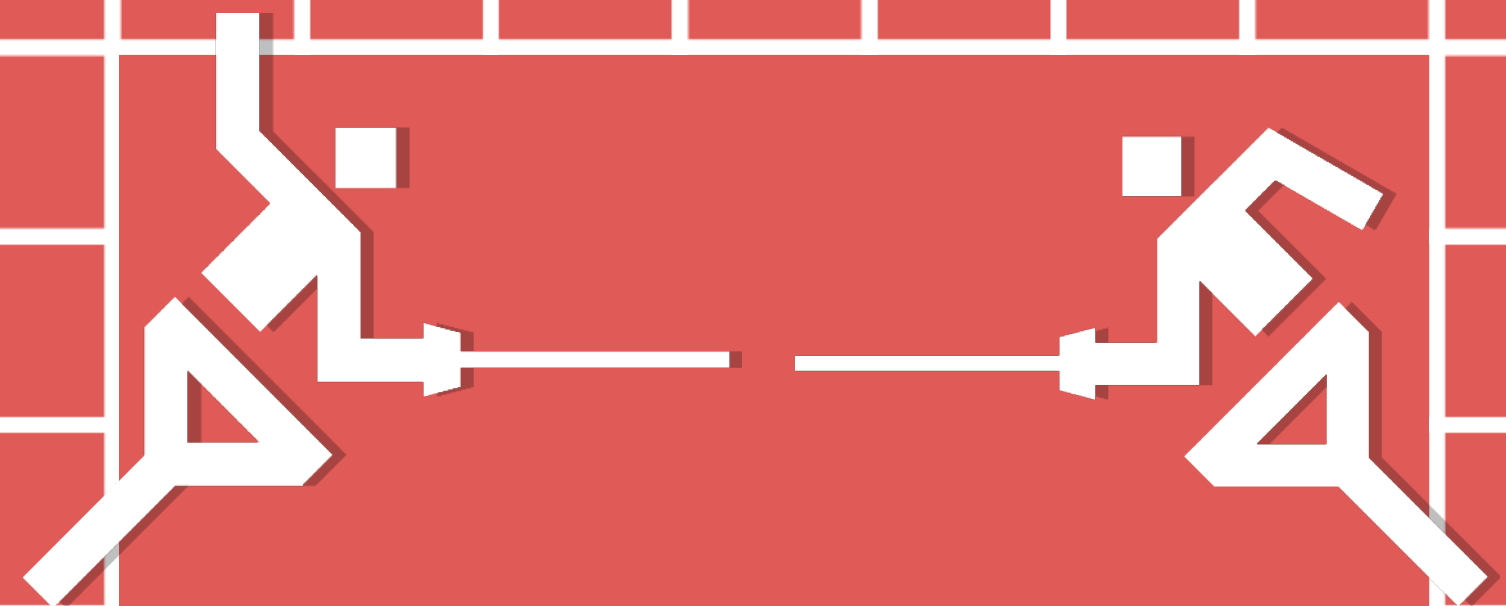
Запись неравенством

Для последовательности $1/n$ можно сразу показать обе границы: $0 < 1/n \leq 1$ при любом натуральном n . Такая запись удобно описывает ограниченность.

Сравнение роста разных последовательностей



Вычисленные значения первых пяти членов последовательностей n , n^2 и $1/n$.



На одном графике удобно видеть, как одно и то же правило задаёт совсем разное поведение чисел при увеличении n .

n и n^2 не имеют верхней границы, а $1/n$ убывает к нулю и остаётся ограниченной.

Что такое неограниченная последовательность

1 Нет общей границы

Неограниченная последовательность не помещается между двумя общими числами. Её члены могут становиться всё больше или по модулю всё дальше от нуля.

2 Рост без конца

Если значения увеличиваются без остановки, у последовательности нет верхней границы. Так ведут себя, например, последовательности n , $2n$ и n^2 .

3 Когда нет и нижней границы

Иногда последовательность уходит не только вверх, но и вниз, поэтому отсутствует и нижняя граница. Тогда ограничить её одним промежутком невозможно.

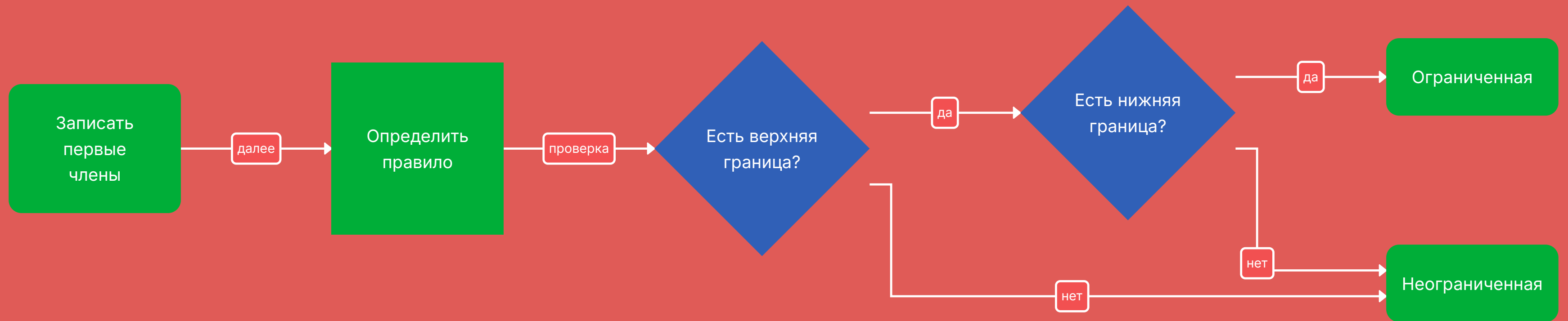
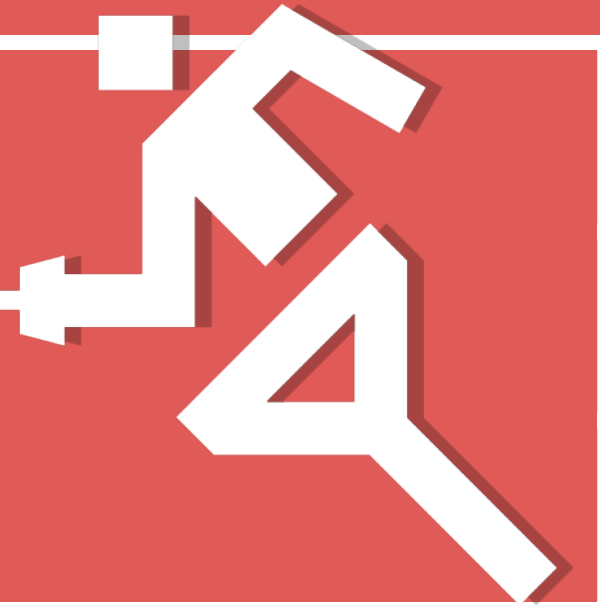
4 Примеры из чисел

Последовательности $1, 2, 4, 8, 16$ и $n, 2n, n^2$ показывают разные способы роста. Во всех случаях значения становятся всё больше.

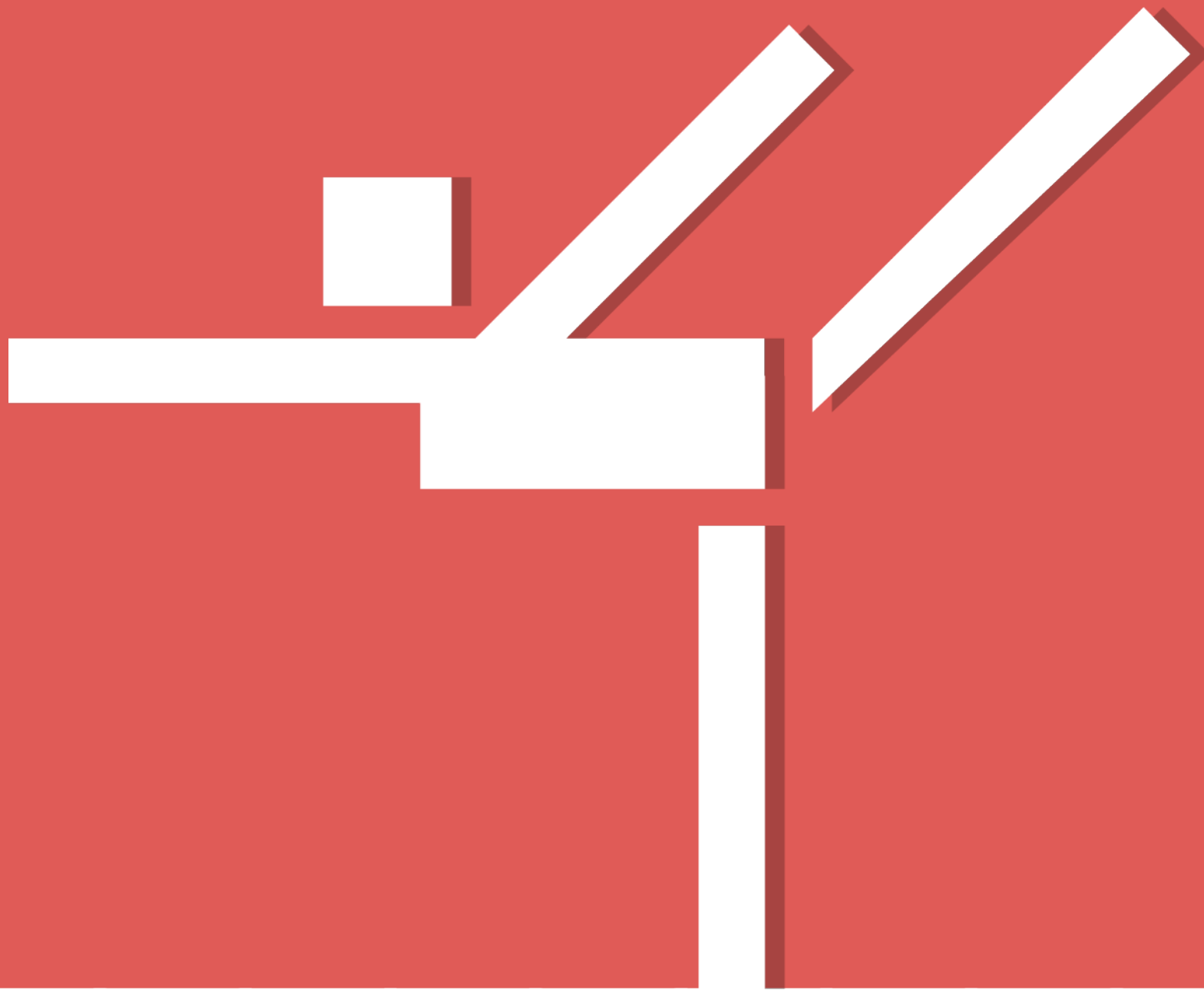


Проверка последовательности на ограниченность

Алгоритм помогает последовательно определить наличие верхней и нижней границ.



Типичные примеры и важные контрпримеры



Ограниченные примеры

К ограниченным последовательностям относятся $1/n$, $(-1)^n$, $2-1/n$ и $\sin n$. Их значения остаются внутри одного промежутка, даже если меняются по-разному.

Неограниченные примеры

Последовательности n , n^2 , $3n-5$ и $2n$ растут без верхней границы. Чем больше номер члена, тем больше становятся их значения.

Колебания не всегда опасны

Последовательность $(-1)^n$ чередуется между -1 и 1 , но остаётся ограниченной. Значит, частая смена значений ещё не означает неограниченность.

Контрпример к спешке

Нельзя судить только по внешнему виду первых членов. Даже если последовательность много раз меняется, она может оставаться внутри одного и того же диапазона.

Главный вывод по примерам

Чтобы понять тип последовательности, нужно смотреть на её правило и возможные границы. Внешнее впечатление не всегда даёт правильный ответ.

График последовательности как набор точек

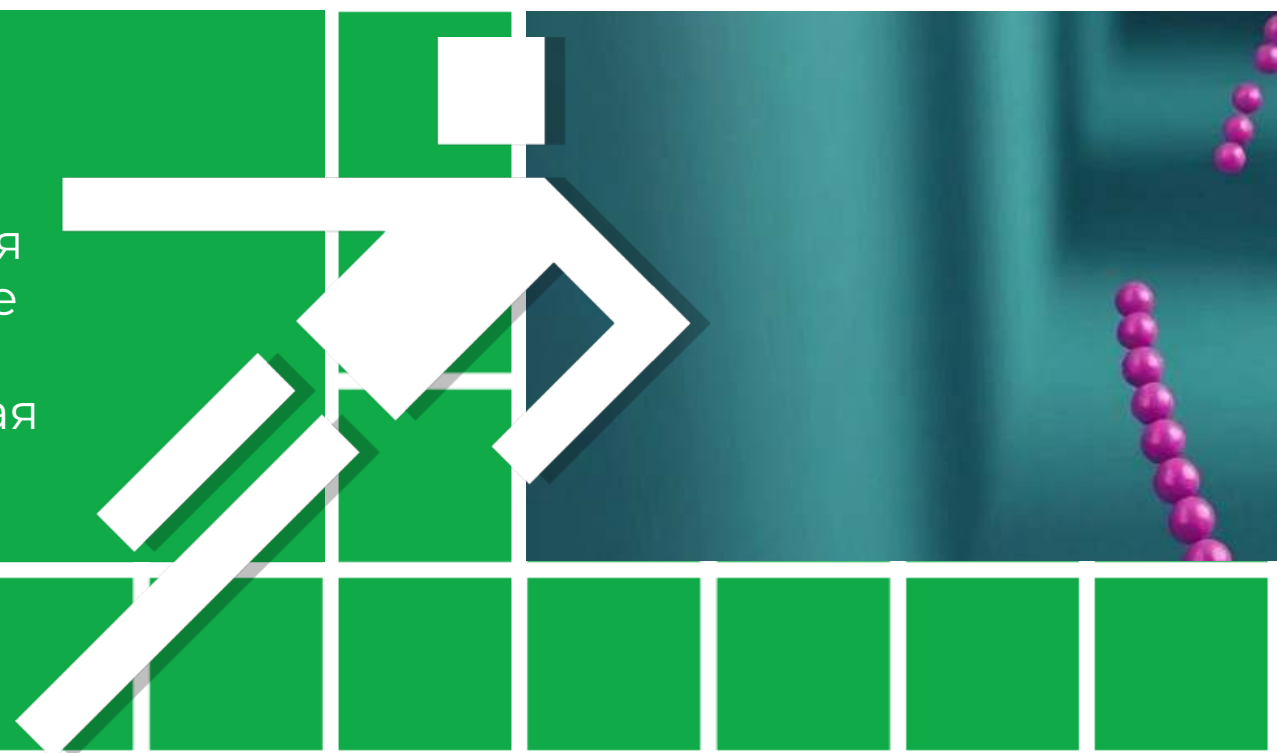
Точки вместо линии

График последовательности не соединяют плавной линией: каждое значение отмечают отдельно, как точку с координатами $(n; a_n)$. Так сразу видно, как меняются члены последовательности и где они расположены на плоскости. Для ограниченных последовательностей эти точки остаются в одном коридоре между двумя горизонтальными уровнями.

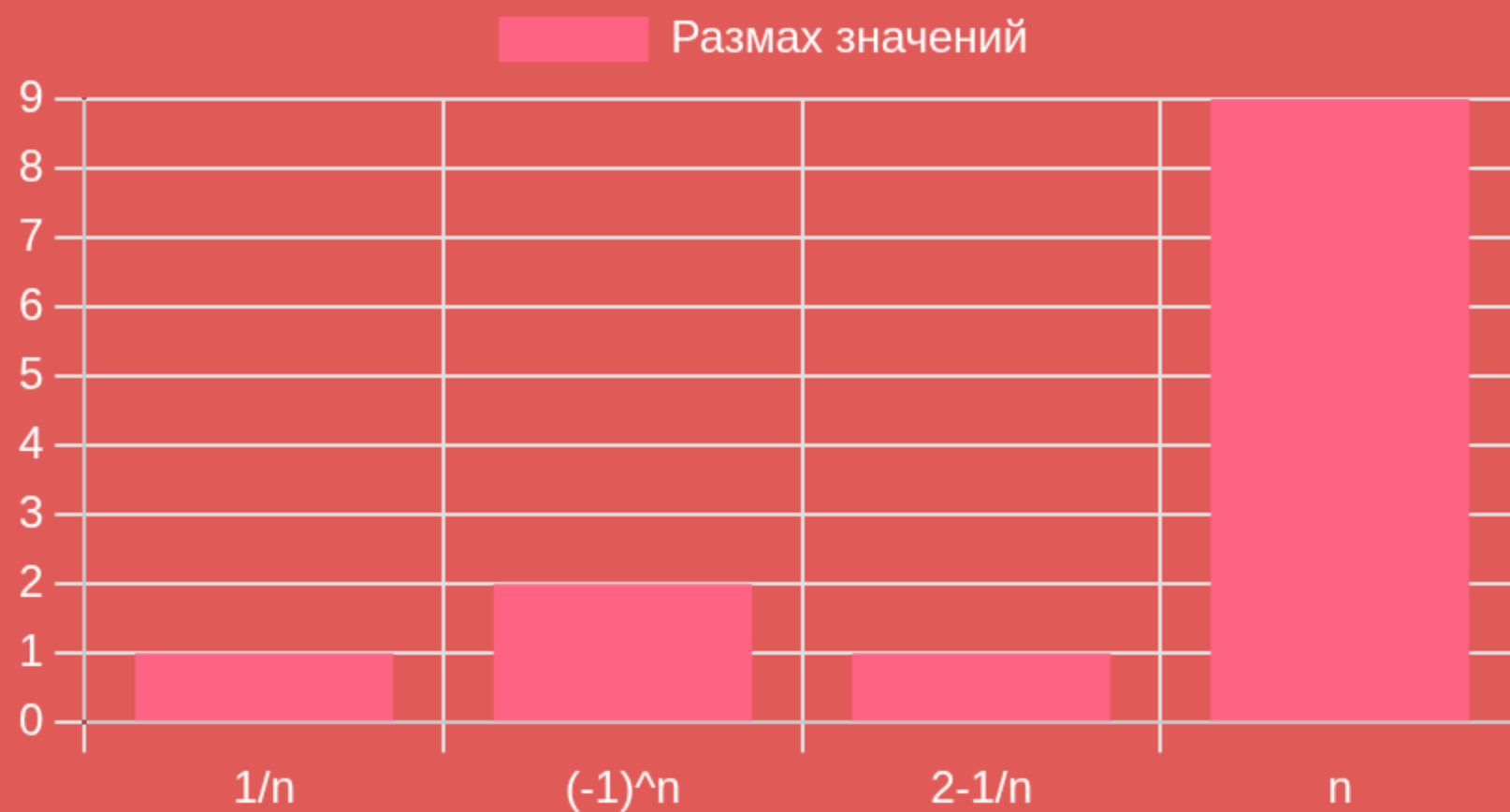


Когда рост выходит за пределы

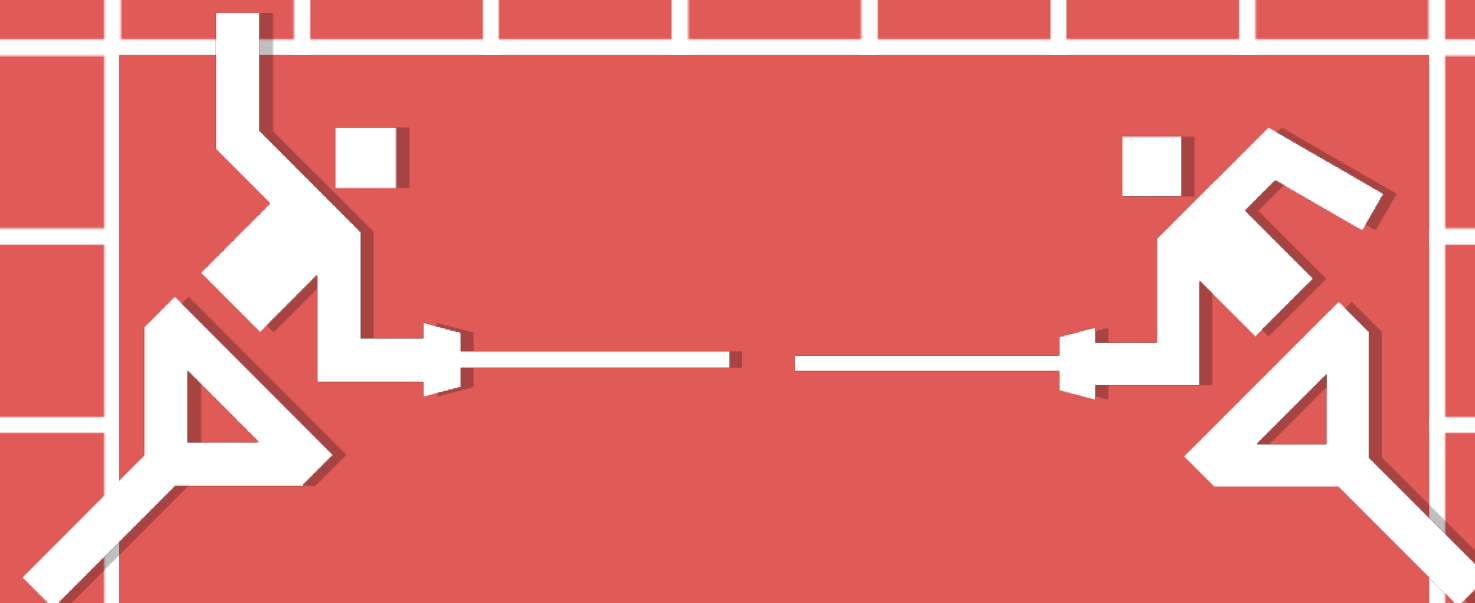
У неограниченной последовательности точки постепенно поднимаются всё выше или опускаются всё ниже, не удерживаясь между одними и теми же границами. На одном рисунке удобно сравнить, например, $1/n$ и n : первая стремится к нулю, а вторая уверенно уходит вверх без конца.



Размах значений у разных последовательностей



Учебные примеры по алгебре 9 класса; значения подобраны по первым членам последовательностей.



На диаграмме показано, насколько далеко расходятся минимальные и максимальные значения. У первых трёх последовательностей диапазон остаётся небольшим, а у n он быстро расширяется.

Чем устойчивее размах, тем легче увидеть ограниченность. Если значения всё дальше расходятся, последовательность теряет общую границу.

Если удаётся указать и нижнюю,
и верхнюю границу, последовательность
можно считать ограниченной. Для $1/n$
и $(-1)^n$ это видно прямо из неравенств.



2
границы
одновременно
описывают
ограниченную
последовательность

Определение ограниченной последовательности и примеры
из школьного курса алгебры.

Сравнение трёх последовательностей



Последовательность	Поведение	Ограниченность
$1/n$	к 0	да
$(-1)^n$	колеблется	да
n	растёт	нет

Таблица показывает первые члены, характер изменения и вывод об ограниченности для трёх типичных последовательностей.

Одинаковый внешний вид не гарантирует одинаковый вывод: колебания могут быть ограниченными, а рост без границы — неограниченным.

Типовые примеры из темы «Ограниченные и неограниченные последовательности»

Связь ограниченности и предела

1

Если есть предел

Когда последовательность приближается к конечному числу, её члены не могут бесконечно убегать вверх или вниз. Поэтому любая последовательность с конечным пределом обязательно ограничена.

2

Пример $1/n$

Последовательность $1/n$ стремится к нулю и всё время остаётся между 0 и 1. Это удобный пример, где предел и ограниченность видны одновременно и очень наглядно.

3

Ограниченность без предела

Не всякая ограниченная последовательность имеет предел. У $(-1)^n$ члены чередуются между -1 и 1, поэтому последовательность остаётся в пределах одного промежутка, но не сближается с одним числом.

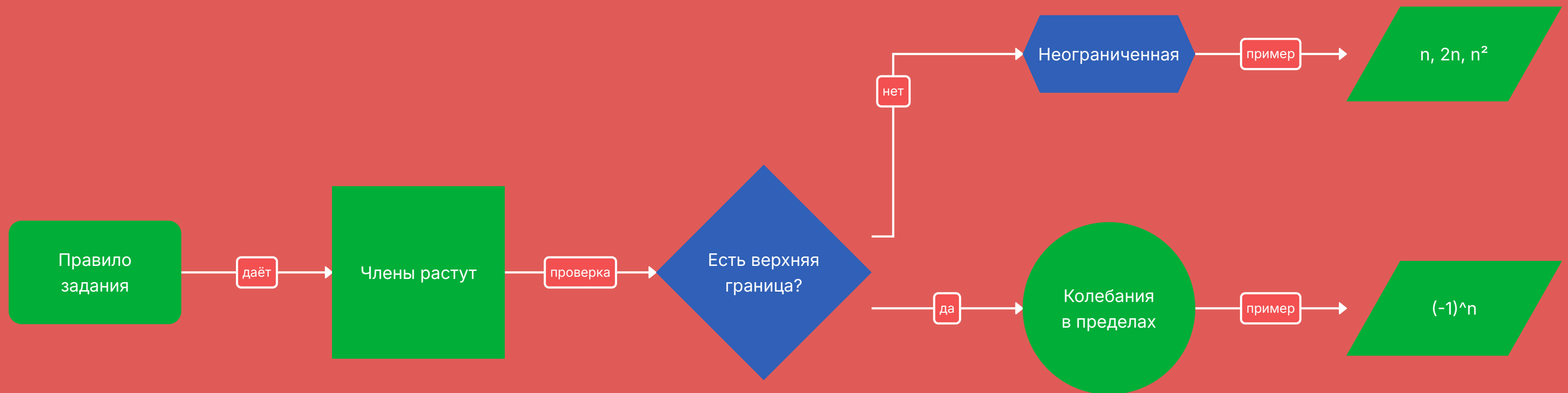
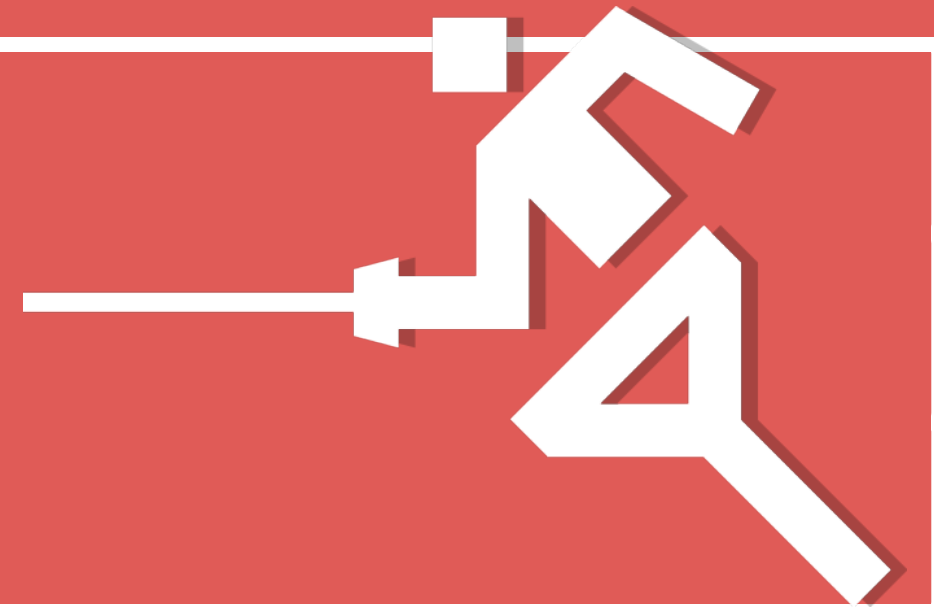
4

Главный вывод

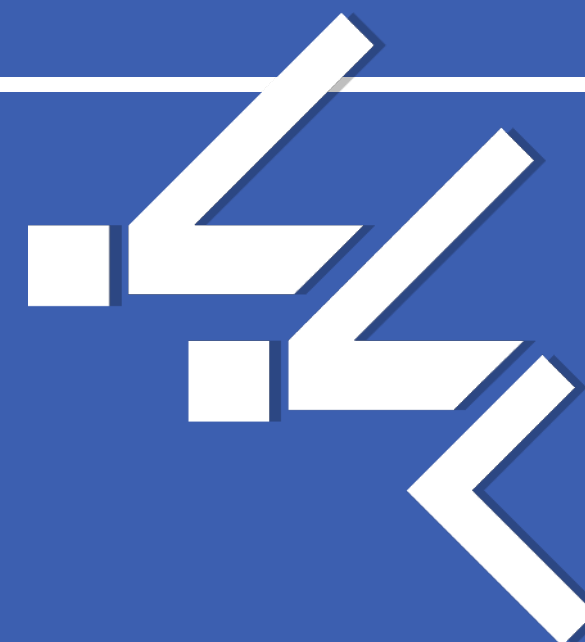
Предел помогает понять поведение последовательности, но сам по себе не заменяет проверку границ. Ограниченность — более широкое свойство, которое может быть и без предела.

Рост последовательности и отсутствие верхней границы

Схема показывает, как правило задания помогает определить, есть ли у последовательности верхняя граница.



Частые ошибки при определении



Слишком ранний вывод

Нельзя судить о последовательности только по первым нескольким членам. Иногда начало выглядит спокойным, а дальше значения начинают быстро расти или, наоборот, остаются в одном промежутке.

Путаница колебаний

Колебания не означают неограниченность. Если последовательность всё время меняется, но её члены не выходят за одни и те же границы, она всё равно остаётся ограниченной.

Нужно посмотреть правило

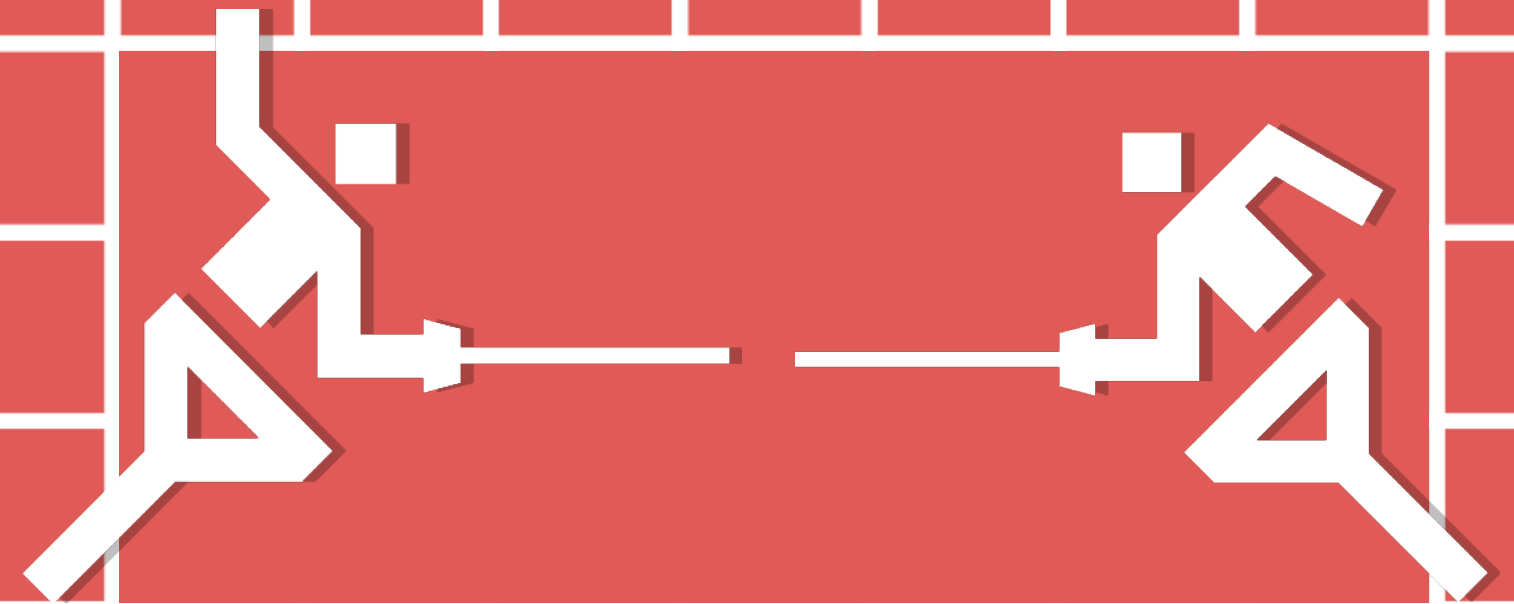
Для правильного ответа важно не только увидеть числа, но и понять способ задания. Именно общее правило показывает, будут ли значения оставаться в пределах или уйдут без конца.

Сравнение количества примеров

Ограниченные Неограниченные



Учебные примеры по теме; подсчёт по перечисленным в задании последовательностям.



В наборе использованы знакомые примеры, чтобы сравнение было наглядным и удобным для запоминания.

Оба типа встречаются одинаково часто, поэтому важно не угадывать по внешнему виду, а проверять свойства последовательности.

Алгоритм решения задач на ограниченность

1

Сначала правило

Определи, как задана последовательность: формулой, рекуррентно или через первые члены. Без этого трудно понять, как будут вести себя значения дальше.

2

Проверка сверху

Посмотри, можно ли найти число, выше которого члены не поднимаются. Если такое число существует, у последовательности есть верхняя граница.

3

Проверка снизу

Затем выясни, не уходят ли члены слишком низко. Нижняя граница особенно важна, когда последовательность может принимать отрицательные значения.

4

Сравнение с примерами

Сопоставь последовательность с уже известными образцами: $1/n$, $(-1)^n$, n и другими. Это помогает быстрее понять, к какому типу она ближе.

5

Итог по неравенству

После проверки запиши вывод словами и, если возможно, подкрепи его неравенством. Так ответ будет не только верным, но и обоснованным.



Что важно запомнить об ограниченности

Ограниченная последовательность
остаётся внутри своих границ,
а неограниченная выходит за них.
Если есть конечный предел, то есть
и ограниченность, но обратное верно
не всегда.

