

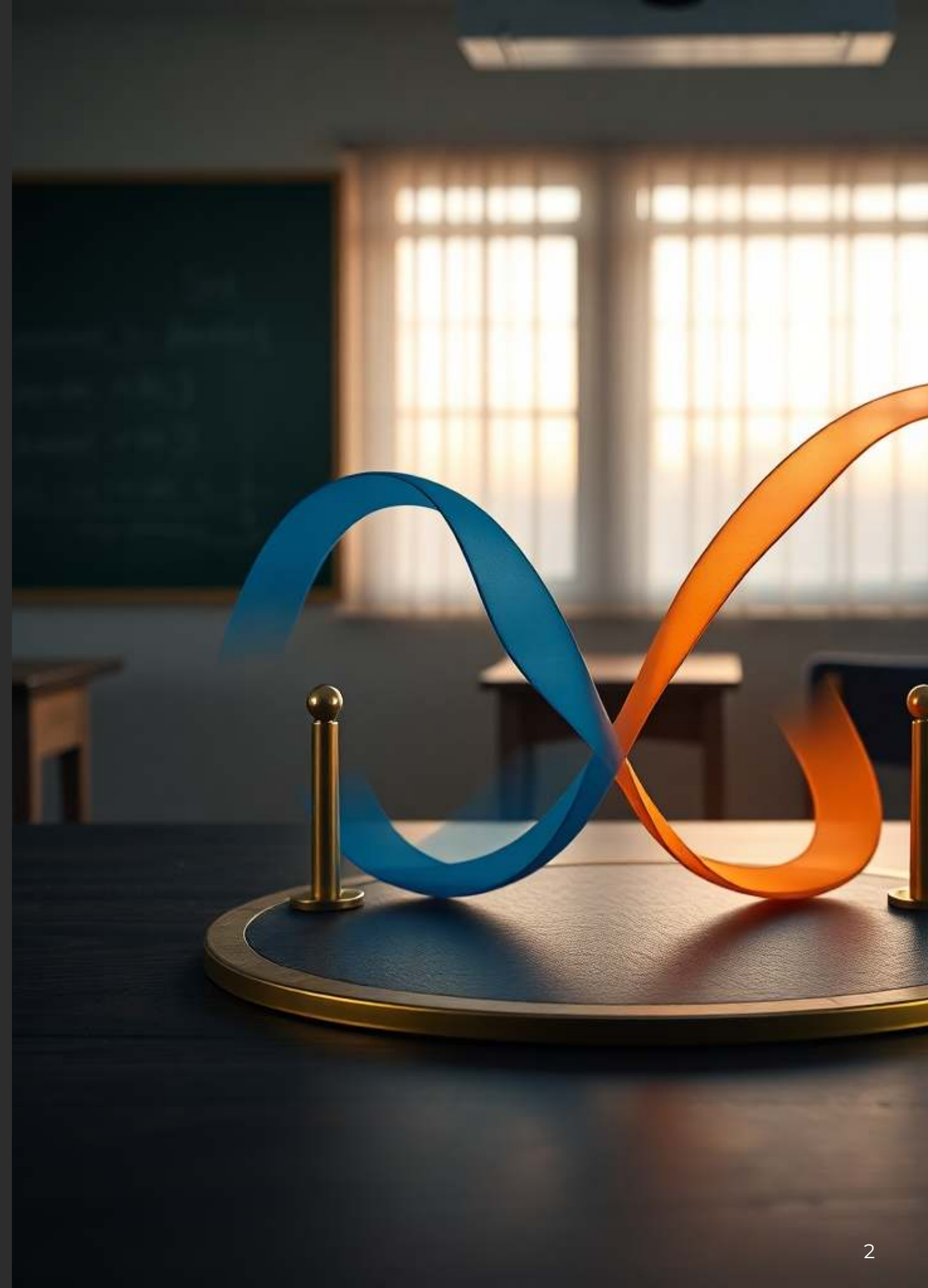
Синус и косинус суммы и разности аргументов

Формулы, которые открывают точные тригонометрические вычисления.



Зачем нужны формулы суммы и разности

Это базовый инструмент 10 класса: они помогают преобразовывать выражения, доказывать тождества и находить точные значения не табличных углов, не прибегая к калькулятору.



Единичная окружность и смысл углов α и β

Координаты точки

На единичной окружности каждой точке соответствует угол, а её координаты сразу дают значения $\cos$ и $\sin$. Поэтому тригонометрия удобно описывает поворот как положение точки на плоскости.

Два последовательных поворота

Если сначала задать угол α , а затем добавить или вычесть β , то меняется новое положение точки. Именно это изменение координат и приводит к формулам суммы и разности.

Связь с осями

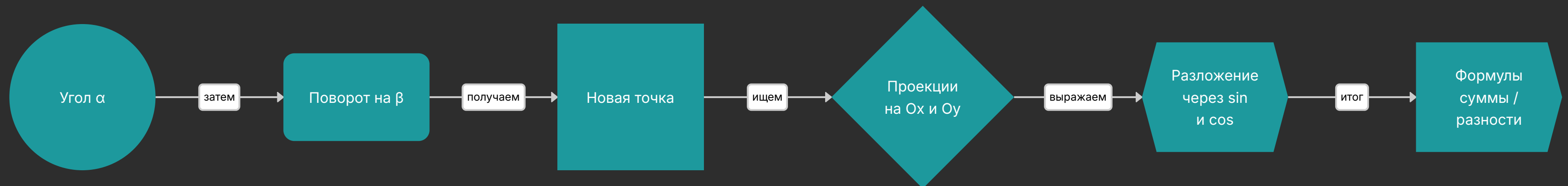
Абсцисса точки измеряет косинус, а ордината — синус. При повороте проекции на оси Ox и Oy складываются не напрямую, а по определённом правилу, которое нужно вывести.

Зачем нужна схема

Изображение единичной окружности помогает увидеть, откуда берутся знаки в формулах. Без геометрического смысла записи легко перепутать, а с рисунком они становятся логичными и проверяемыми.

Как получают формулы суммы и разности

Геометрическая логика через поворот точки на единичной окружности и её проекции на оси



Четыре основные формулы тригонометрии

Запомните общий вид формул и характер знаков: они отличаются для суммы и разности, а у синуса и косинуса ведут себя по-разному.

У синуса и косинуса знаки в сумме и разности меняются по разным правилам; это удобно проверять через свойства чётности и нечётности.

Выражение	Формула	Знак	Комментарий
$\sin(\alpha+\beta)$	$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	плюс	Сумма
$\sin(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	минус	Разность
$\cos(\alpha+\beta)$	$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	минус	Сумма
$\cos(\alpha-\beta)$	$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	плюс	Разность

2

**перекрёстных произведения
входят в выражение $\sin(\alpha+\beta)$
и позволяют раскрывать
сумму через значения двух
углов.**

Формула строится на двух смешанных слагаемых и помогает переводить сумму углов в знакомые значения синуса и косинуса.

Формула $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Формула синуса разности

1. Исходная запись

Формула $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ показывает, что разность углов выражается через те же комбинации синусов и косинусов, но с другим знаком между слагаемыми.

2. Как её получить

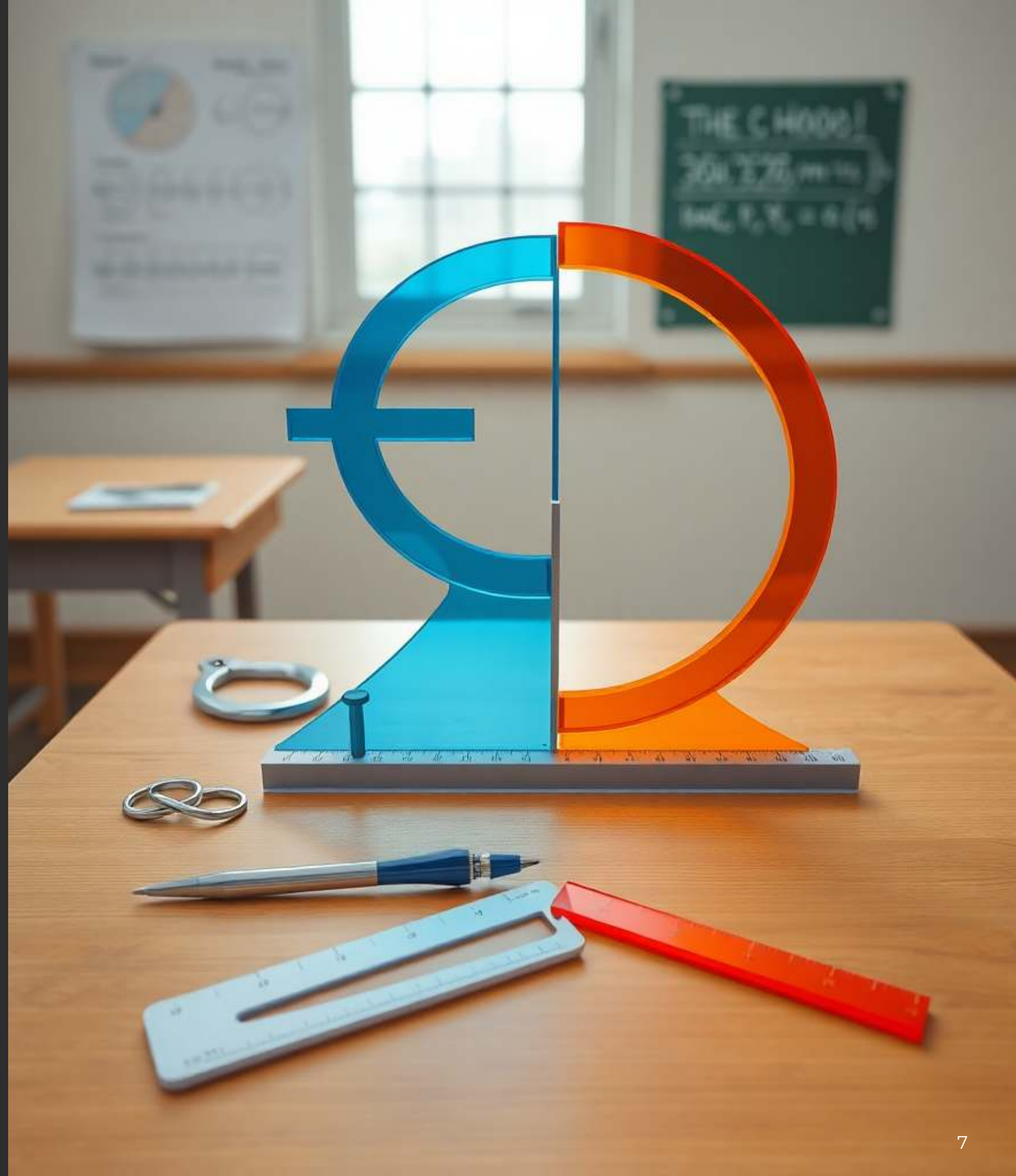
Её удобно выводить из формулы суммы, если заменить β на $-\beta$. Тогда $\sin(-\beta)$ меняет знак, а $\cos(-\beta)$ остаётся прежним, и получается нужная запись.

3. Практическое применение

Эта формула особенно полезна для углов, близких к табличным, например для $\sin 15^\circ$ как $\sin(45^\circ - 30^\circ)$, где ответ получается точным и без десятичных приближений.

4. Работа с выражениями

В уравнениях и преобразованиях она помогает распознавать разность синус-косинус произведений и собирать её в компактную формулу, сокращая громоздкие записи.



Формула косинуса суммы



Точные вычисления

Формула $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ позволяет находить значения косинуса через известные углы без округления и удобно работает с табличными значениями.



Проверка тождеств

Она часто используется при преобразовании выражений и сверке равенств: если раскрыть обе части, можно привести их к общему виду и проверить совпадение.



Основа дальнейших формул

Именно из этой записи удобно выводиться формулу $\cos 2\alpha$, поэтому она становится опорой для следующих тем по тригонометрии.

Формула косинуса разности

Основная запись

Формула $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ использует те же компоненты, что и формула суммы, но в ней появляется плюс между произведениями.

Удобство для расчётов

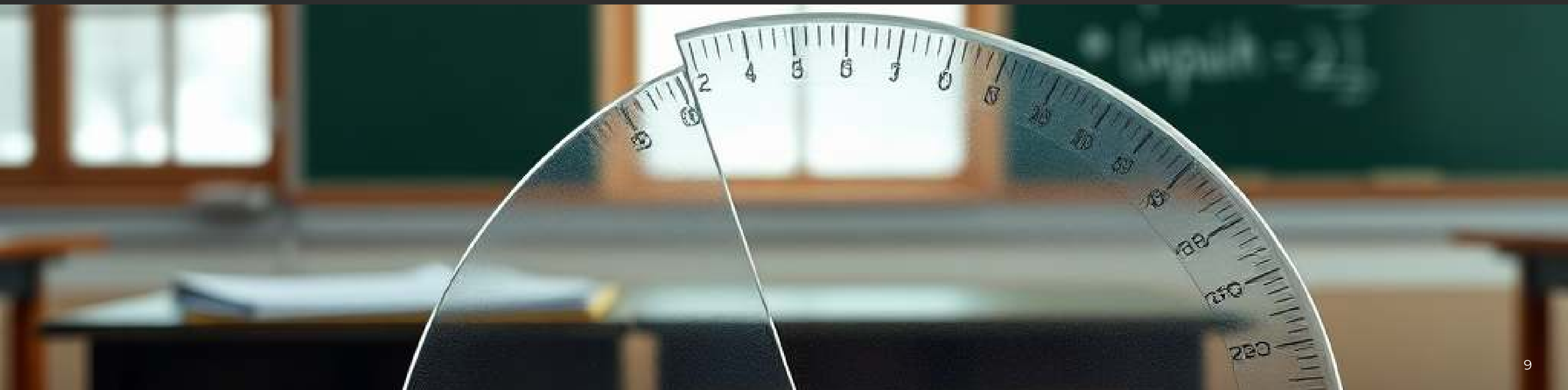
Она особенно полезна, когда нужно найти точное значение косинуса через два известных угла. Это типичная ситуация в задачах на нестандартные, но выражаемые углы.

Примеры школьных задач

Вычисления $\cos 15^\circ$ и $\cos 75^\circ$ часто сводятся к разности или сумме 45° и 30° . В результате ответ выражается через корни, а не через десятичные числа.

Почему это важно

Формула позволяет избегать приблизительных значений и сохранять точность. Для школьной алгебры это особенно ценно при упрощении выражений и решении уравнений.



Сравнение знаков в формулах синуса и косинуса

Функция	Сумма	Разность
sin	плюс	минус
cos	минус	плюс

Формулы $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$

Сравните, как меняются знаки в формулах суммы и разности для двух основных функций.

Синус и косинус ведут себя по-разному: это связано с нечётностью $\sin$ и чётностью $\cos$, а проверка при $\beta=0$ быстро подтверждает правильность записи.

Основные школьные применения формул

Чаще всего формулы нужны там, где требуется точный ответ без округления и аккуратное преобразование выражений в школьных задачах.

Основной учебный эффект дают вычисления и упрощения: именно они становятся опорой для более сложных тем алгебры.



Табличные значения, которые используются в вычислениях

1.

Синус 30°

Значение $\sin 30^\circ$ равно $\frac{1}{2}$ и часто становится отправной точкой для вычислений углов, выражаемых через 30° , например 15° или 75° .

2.

Косинус 30°

Косинус 30° равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$; именно эта величина вместе с синусом 30° позволяет раскладывать формулы суммы и разности на точные радикалы.

3.

Угол 45°

Для 45° синус и косинус совпадают: оба равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому этот угол особенно удобен при переходе к красивым точным ответам.

4.

Угол 60°

Значения $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ дополняют набор основных опорных чисел, необходимых для школьных вычислений без десятичных приближений.

5.

Точные ответы

Комбинация значений 30° , 45° и 60° позволяет находить $\sin 15^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\sin 105^\circ$ и другие нестандартные углы в виде дробей с корнями.

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$$

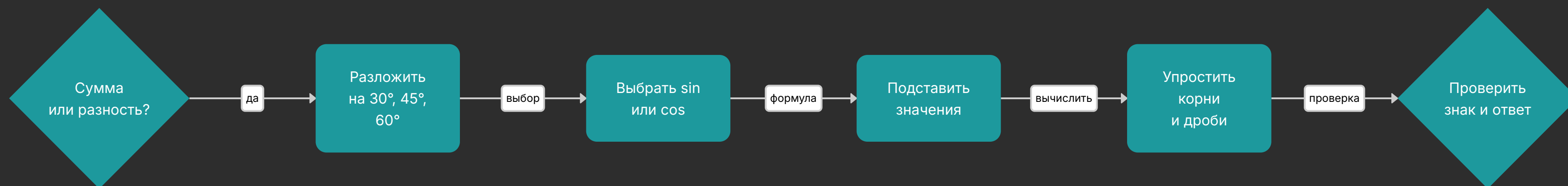
— это точное значение
и для $\sin 75^\circ$, и для $\cos 15^\circ$.

Одинаковый результат показывает, как формулы суммы и разности приводят к совпадающим выражениям для связанных углов.

Вычисление по формулам $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha - \beta)$

Как применять формулы на практике

Последовательность отражает типичный ход решения школьной задачи по тригонометрии.



Типичные ошибки десятиклассников при работе с формулами

Путаница знаков

Чаще всего ошибаются в знаках у косинуса: в сумме появляется минус, а в разности — плюс. Чтобы избежать сбоя, полезно отдельно проговаривать каждую формулу перед подстановкой.

Смешение разных выражений

Нередко запись $\sin(\alpha - \beta)$ ошибочно принимают за $\sin\alpha - \sin\beta$. На самом деле формула содержит произведения синусов и косинусов, поэтому простое вычитание здесь неприменимо.

Потеря скобок

При подстановке значений учащиеся иногда теряют скобки и меняют структуру выражения. Из-за этого один неверно записанный множитель искажает весь результат, даже если дальнейшие вычисления выполнены правильно.

Неверная замена угла

При переходе к отрицательному углу важно помнить, что $\sin$ меняет знак, а $\cos$ сохраняется. Игнорирование этих свойств приводит к ошибкам в формулах суммы и разности.

Механическое запоминание

Если формулу заучить без понимания, трудно проверить себя на частных случаях. Подстановка $\beta = 0$ или $\beta = \alpha$ быстро показывает, верно ли записано выражение.

Полезные частные случаи формул

Эти простые проверки помогают убедиться, что формулы записаны верно, и позволяют быстро сверить решение без длинных вычислений.

Во всех частных случаях формулы дают ожидаемые значения, поэтому они удобны и для проверки, и для самоконтроля в решении задач.

Частный случай	Результат	Смысл
$\beta=0$	$\sin(\alpha+0)=\sin\alpha$	Сохранение функции
$\beta=\alpha$	$\sin(\alpha-\alpha)=0$	Нулевая разность
$\beta=\alpha$	$\cos(\alpha-\alpha)=1$	Единичный результат
$\beta=-\alpha$	$\sin(\alpha+(-\alpha))=0$	Взаимное уничтожение
$\beta=-\alpha$	$\cos(\alpha+(-\alpha))=1$	Проверка формулы

Следует из формул $\sin(\alpha\pm\beta)$ и $\cos(\alpha\pm\beta)$

Как формулы суммы и разности работают в преобразованиях

От произведения к сумме

Когда в выражении встречаются $\sin x \cos y$ или $\cos x \sin y$, формулы суммы и разности позволяют собрать их в один тригонометрический образ. Так разрозненные множители превращаются в компактную запись, которую проще вычислять и преобразовывать в школьных задачах.



Обратный ход: от суммы к произведению

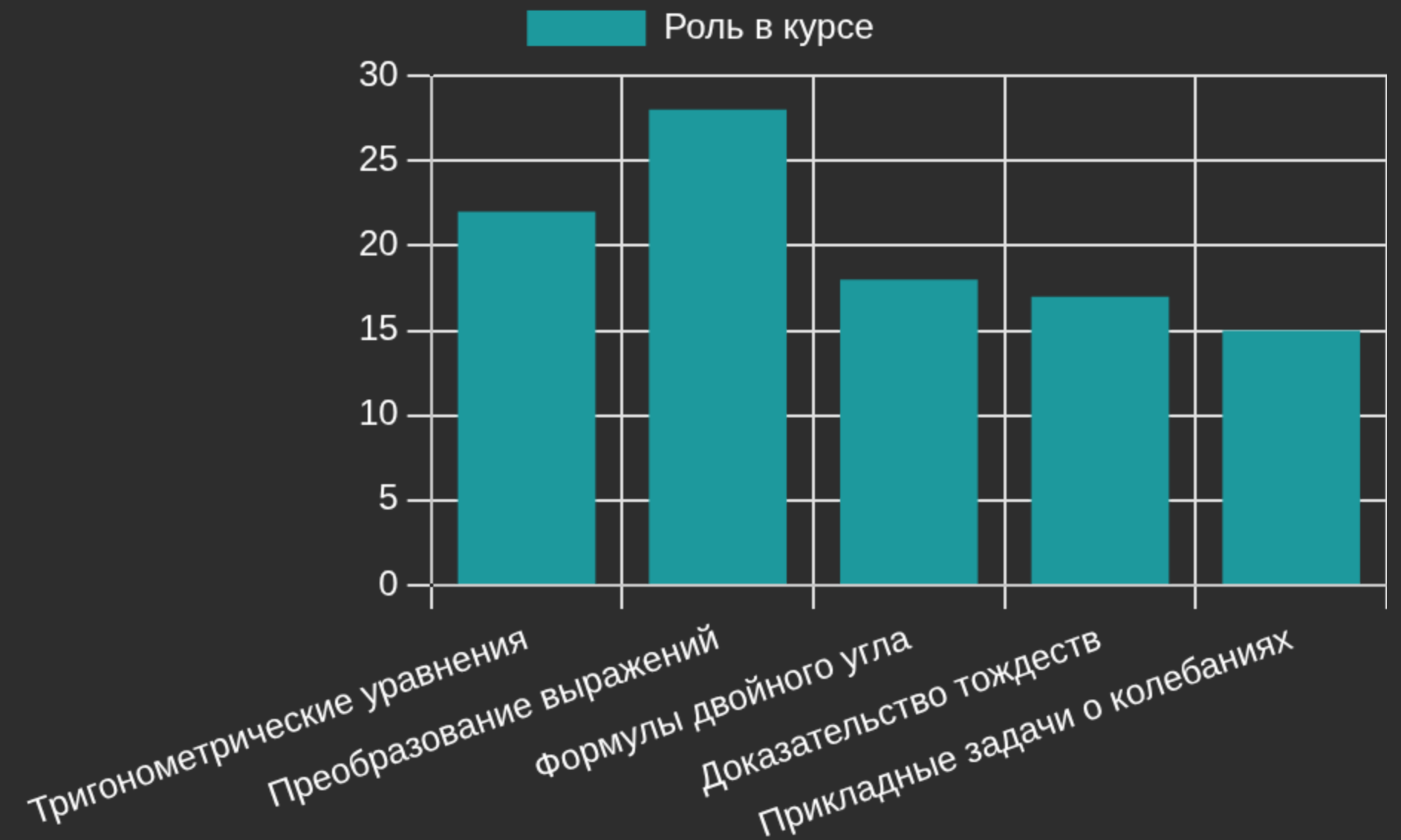
Связь работает и в обратную сторону: сложные комбинации синусов и косинусов можно разложить на привычные произведения. Это особенно полезно при упрощении выражений, где нужно увидеть скрытую структуру и выбрать удобный путь решения.



Что строится на базе формул суммы и разности

Эти формулы связывают школьные темы в единую систему и делают возможным переход к более сложным преобразованиям.

Наибольшую нагрузку несут преобразование выражений и уравнения: именно они чаще всего требуют уверенного владения формулами.



Составлено по логике школьного курса алгебры 10 класса, 2025

Значение формул для дальнейшего изучения алгебры и тригонометрии



Точные выражения

Формулы учат получать ответы в виде радикалов и дробей, а не ограничиваться десятичными приближениями. Это развивает аккуратность вычислений и понимание структуры тригонометрических выражений.



Новые тождества

На их основе выводятся следующие формулы, включая двойной и половинный угол. Благодаря этому школьник видит не набор разрозненных правил, а логически связанную систему.



Уравнения и преобразования

При решении тригонометрических уравнений формулы помогают сводить выражения к более удобному виду. Это сокращает путь к ответу и повышает надежность рассуждений.



Подготовка к сложным темам

Освоение этих формул становится переходом к более глубокому курсу тригонометрии. После этого легче понимать последующие преобразования и уверенно работать с нестандартными углами.

Четыре формулы, которые открывают всю тему

Формулы синуса и косинуса суммы и разности связывают геометрию окружности, свойства функций и школьные вычислительные приёмы. Они нужны для точных ответов, преобразований и дальнейшего изучения тригонометрии.

