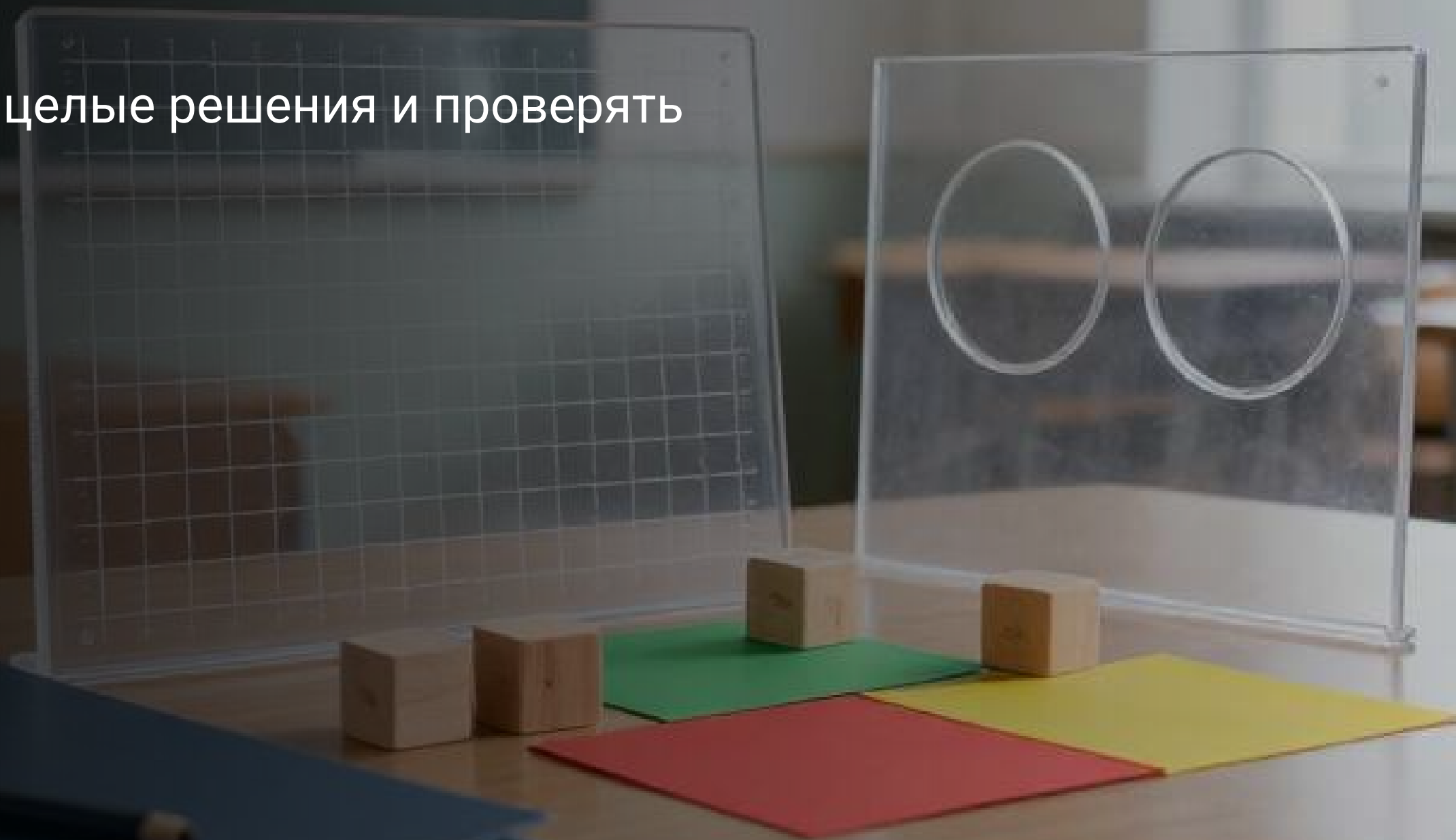


Линейные уравнения с двумя переменными в целых числах

Научимся находить целые решения и проверять их без ошибок.



Почему это важно в задачах

Такие уравнения помогают находить пары целых чисел в задачах про покупки, наборы предметов, распределение и подсчёт вариантов без дробей. В 7 классе они опираются на действия с умножением, сложением и делением с остатком.



Вид уравнения и что считается решением

1

Общий вид

Линейное уравнение с двумя переменными обычно записывают как $ax + by = c$, где a , b и c — целые числа, а x и y — неизвестные значения.

2

Что является решением

Решением называют пару целых чисел (x, y) , которая делает равенство верным после подстановки. Важно, чтобы оба числа были целыми и подходили сразу вместе.

3

Пример проверки

Для уравнения $2x + 3y = 12$ подходят пары $(0, 4)$, $(3, 2)$ и $(6, 0)$, потому что в каждом случае левая часть равна 12.

Координатная плоскость и целые точки

Пара как точка

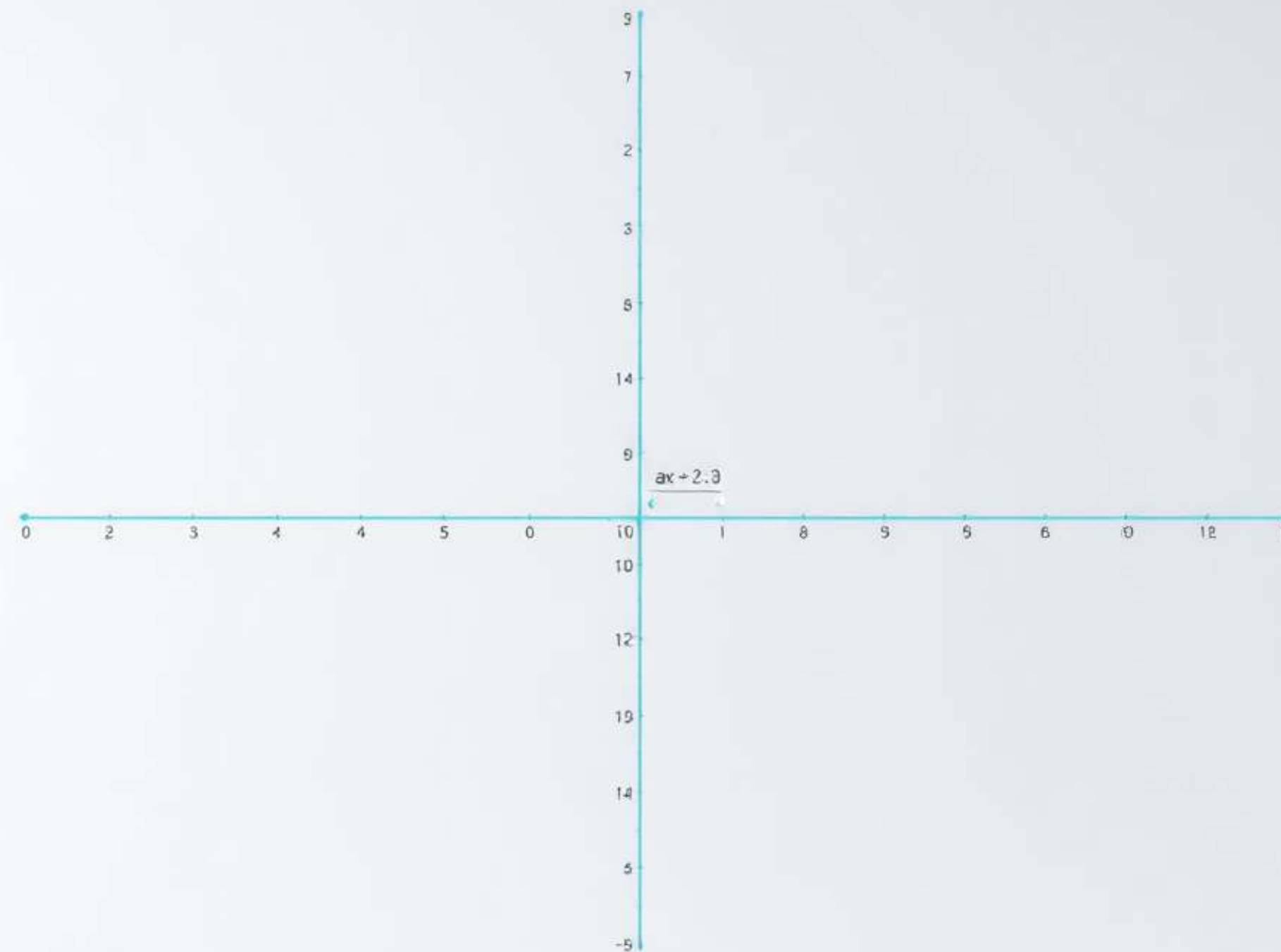
Каждая пара чисел (x, y) задаёт точку на координатной плоскости. Поэтому решения можно не только вычислять, но и изображать на рисунке.

Прямая и решения

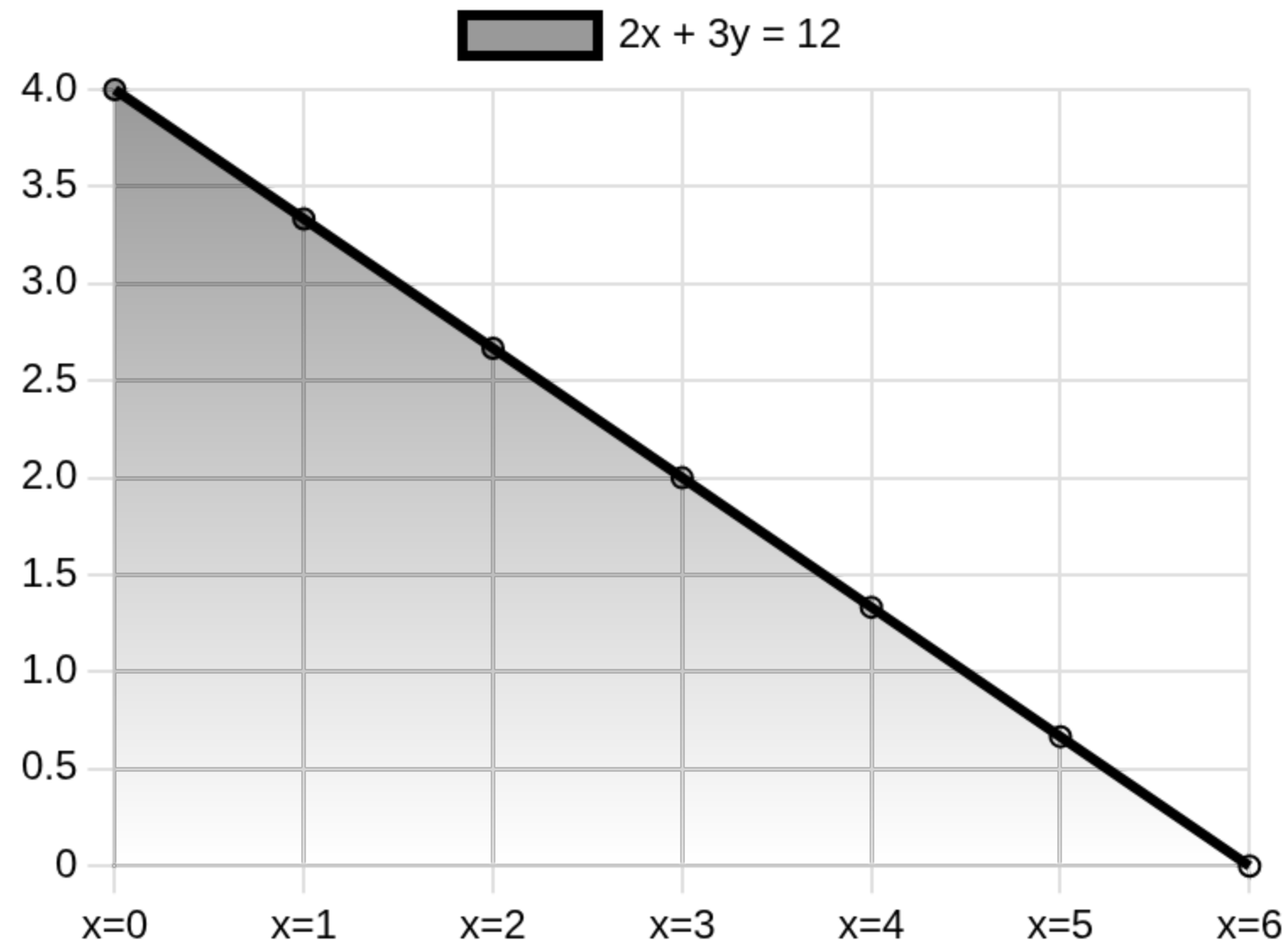
Уравнение $ax + by = c$ задаёт прямую линию. Целыми решениями будут только те точки этой прямой, у которых обе координаты — целые числа.

Что показать на рисунке

Для уравнения $2x + 3y = 12$ удобно изобразить прямую и отметить на ней точки $(0, 4)$, $(3, 2)$ и $(6, 0)$, чтобы увидеть закономерность.



Целые решения уравнения $2x + 3y = 12$



На графике видно, что при некоторых целых значениях x получаются целые значения y , а при других — дробные.

Целые решения образуют отдельные точки на прямой, поэтому подходят не все значения x подряд.

Составлено по уравнению $2x + 3y = 12$

Когда целые решения существуют

1 Проверка делимости

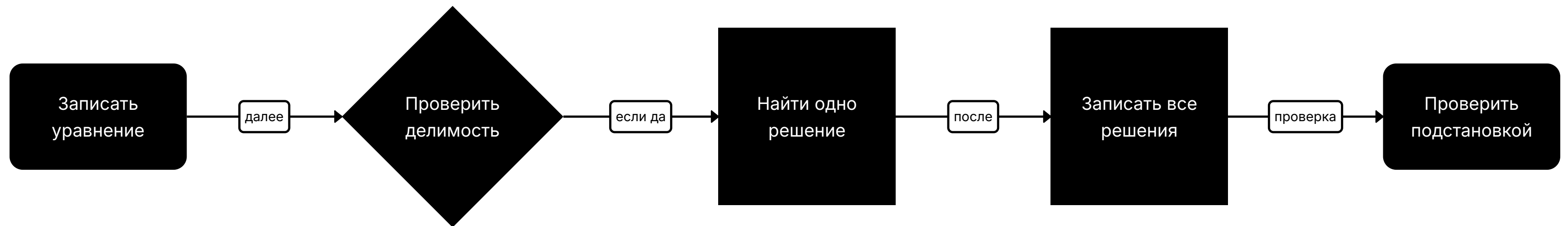
Если числа a и b имеют общий делитель, то правая часть c тоже должна делиться на него. Иначе целых решений уравнение не имеет.

2 Примеры вывода

Для $4x + 6y = 10$ решения возможны, потому что 4 и 6 делятся на 2, и число 10 тоже делится на 2. А уравнение $4x + 6y = 7$ целых решений не имеет.

Алгоритм поиска целых решений

Последовательность действий для уравнений $ax + by = c$



Проверка существования решений на примерах

Уравнение	ОД	с делится?	Решения
$4x+6y=10$	2	да	да
$4x+6y=7$	2	нет	нет
$5x+15y=20$	5	да	да

Сравним несколько уравнений и увидим, как делимость помогает быстро определить наличие целых решений.

Если правая часть не делится на общий делитель коэффициентов, целых решений не бывает.

Как находят одно частное решение



Подбор

При небольших числах решение часто находят подбором. Для $2x + 3y = 12$ подходит пара $(0, 4)$, потому что после подстановки левая часть равна 12.



Проверка пары

Для $3x + 2y = 8$ подходят $(0, 4)$ и $(2, 1)$. Каждую найденную пару обязательно проверяют подстановкой, чтобы не принять неверный ответ.

От одного решения ко всем остальным

1

Одно найденное решение

Если уже есть одна подходящая пара, её можно использовать как отправную точку. Это удобнее, чем каждый раз начинать поиск с нуля и пробовать случайные числа.

2

Общее правило

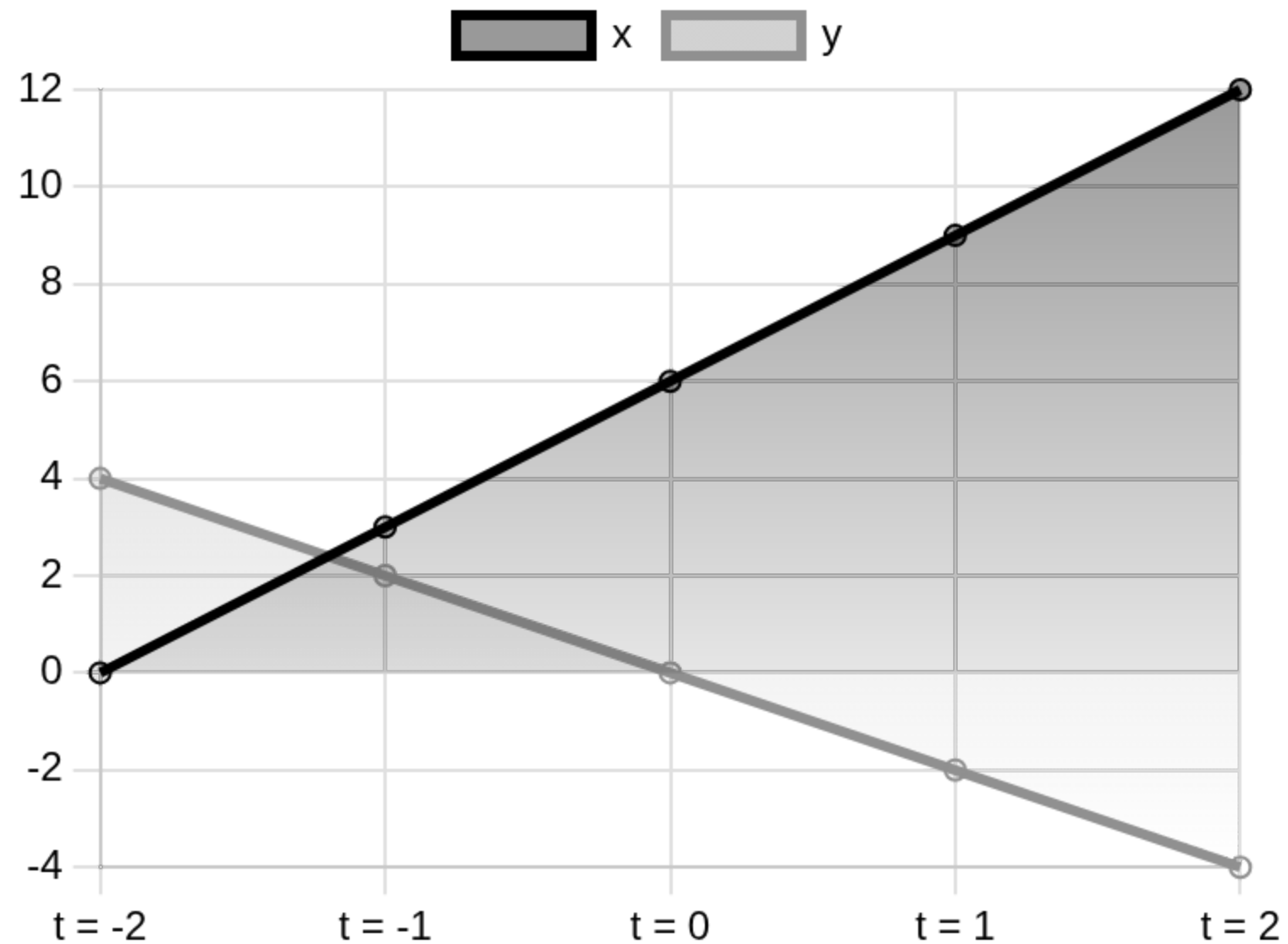
Для уравнения $2x + 3y = 12$ можно записать все решения так: $x = 6 + 3t$, $y = 0 - 2t$, где t — любое целое число.

3

Проверка на примерах

При $t = 0$ получаем $(6, 0)$, при $t = -1$ — $(3, 2)$, при $t = -2$ — $(0, 4)$. Так видно, что решений бесконечно много.

Как меняются решения при разных значениях t



Каждое значение t задаёт новую пару целых чисел. По правилу видно, что решение можно сдвигать без потери равенства.

Параметр t порождает бесконечное множество целых решений, а их значения меняются по строгому закону.

Пример для уравнения $2x + 3y = 12$, составленный по данным условия задачи.

Дополнительные условия в задачах

Сначала уравнение

Записывают линейное уравнение и находят все целые решения, если они существуют. Без ограничений множество ответов может быть бесконечным.

Итоговый отбор

Оставляют только те решения, которые соответствуют предметам, билетам, упаковкам или деньгам. Так математический ответ становится практическим.

Потом ограничения

Добавляют условия по смыслу задачи: неотрицательность, натуральные числа или верхнюю границу. Это сразу отсеивает неподходящие пары.

Сравнение способов работы с уравнением

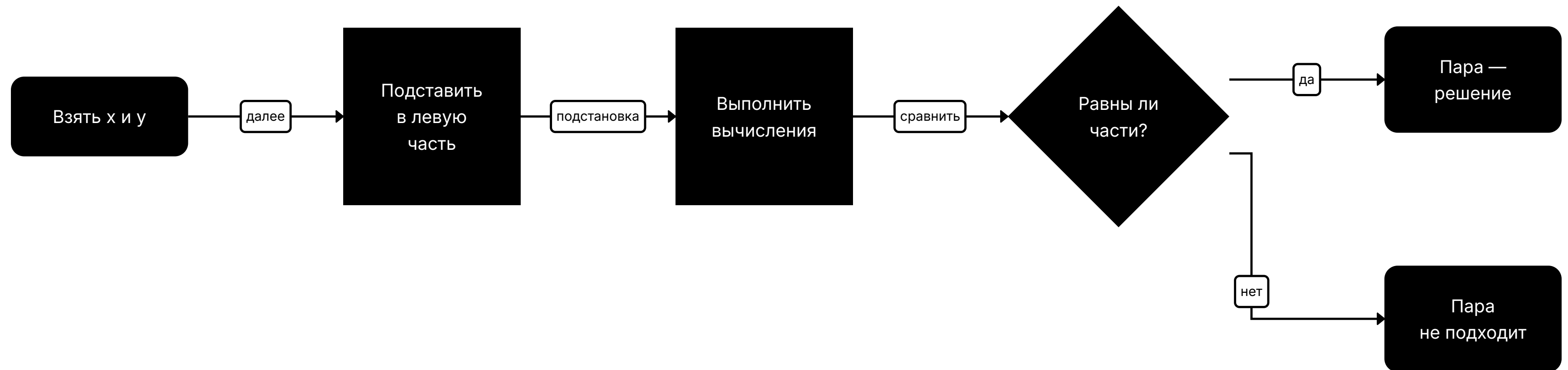
Разные приёмы решают разные этапы задачи: от быстрой проверки до полного описания всех ответов.

Ни один способ не заменяет остальные: подбор, проверка делимости, общее решение и подстановка дополняют друг друга.

Способ	Что даёт	Когда удобен
Подбор	Одно решение	Малые числа
Делимость	Есть ли решения	Быстрая проверка
Общее решение	Все решения	После одного ответа
Подстановка	Проверка ответа	После вычислений

Проверка найденной пары

Пошаговая подстановка значений x и y в уравнение $2x + 3y = 12$.



Типичные ошибки при решении

Проверяют не пару

Иногда ученик подставляет только одно число и забывает второе. В этом случае легко получить неверный ответ, потому что решение уравнения всегда проверяется сразу по двум переменным.

Теряют знак минус

При записи общего решения и при подстановке минус часто пропускают или меняют на плюс. Из-за этого верная пара превращается в неверную, хотя сама идея решения была правильной.

Принимают дроби

В этой теме нужны целые числа, поэтому дробные ответы не подходят. Если получилась дробь, стоит ещё раз проверить вычисления и условия задачи, а затем выполнить подстановку.



Карандаши в коробке: две разные интерпретации

Собрать 12 карандашей из наборов

В задаче можно представить, что один набор содержит 2 синих карандаша, а другой — 3 красных. Тогда нужно найти все целые пары, которые дают ровно 12 карандашей без остатка. Каждая подходящая пара показывает свой способ собрать нужное число.



Проверить, сколько наборов подойдёт

Если взять, например, 0 наборов по 2 и 4 набора по 3, получится 12. Подходят и другие пары, например 3 и 2. Такая запись помогает увидеть, что одно и то же число можно получить разными целыми способами.



Сколько решений остаётся после ограничений



Ограничения отбирают только те пары, которые имеют смысл в задаче. Без них решений не просто много, а бесконечно много.

Чем строже условие, тем меньше подходящих ответов; иногда остаются лишь несколько пар.

Пример для уравнения $2x + 3y = 12$, составленный по данным условия задачи.

Связь с делимостью и остатками

Общий делитель

Если числа a и b имеют общий делитель, левая часть $ax + by$ тоже делится на него. Поэтому правая часть c должна быть кратна этому числу.

Есть решение или нет

Когда c не делится на общий делитель коэффициентов, целых решений не существует. Это быстро объясняет, почему некоторые уравнения сразу исключаются.

Проверка без лишних вычислений

Связь с делимостью помогает не перебирать все варианты подряд. Сначала проверяют условие, а потом ищут конкретные пары только в подходящих случаях.

Мини-набор примеров для закрепления

Уравнение	Есть решения	Пример
$x + y = 5$	да	(2,3)
$3x + 2y = 8$	да	(2,1)
$2x + 4y = 7$	нет	—

Небольшие примеры помогают быстро увидеть, где есть целые решения, а где их не бывает.

Подстановка показывает верные пары, а проверка делимости сразу выявляет уравнения без целых решений.

Что важно запомнить

Главное правило простое: сначала проверяют делимость, затем находят одно целое решение, а после этого записывают все остальные через параметр t .
Именно так решают школьные задачи без дробей и лишних проб.