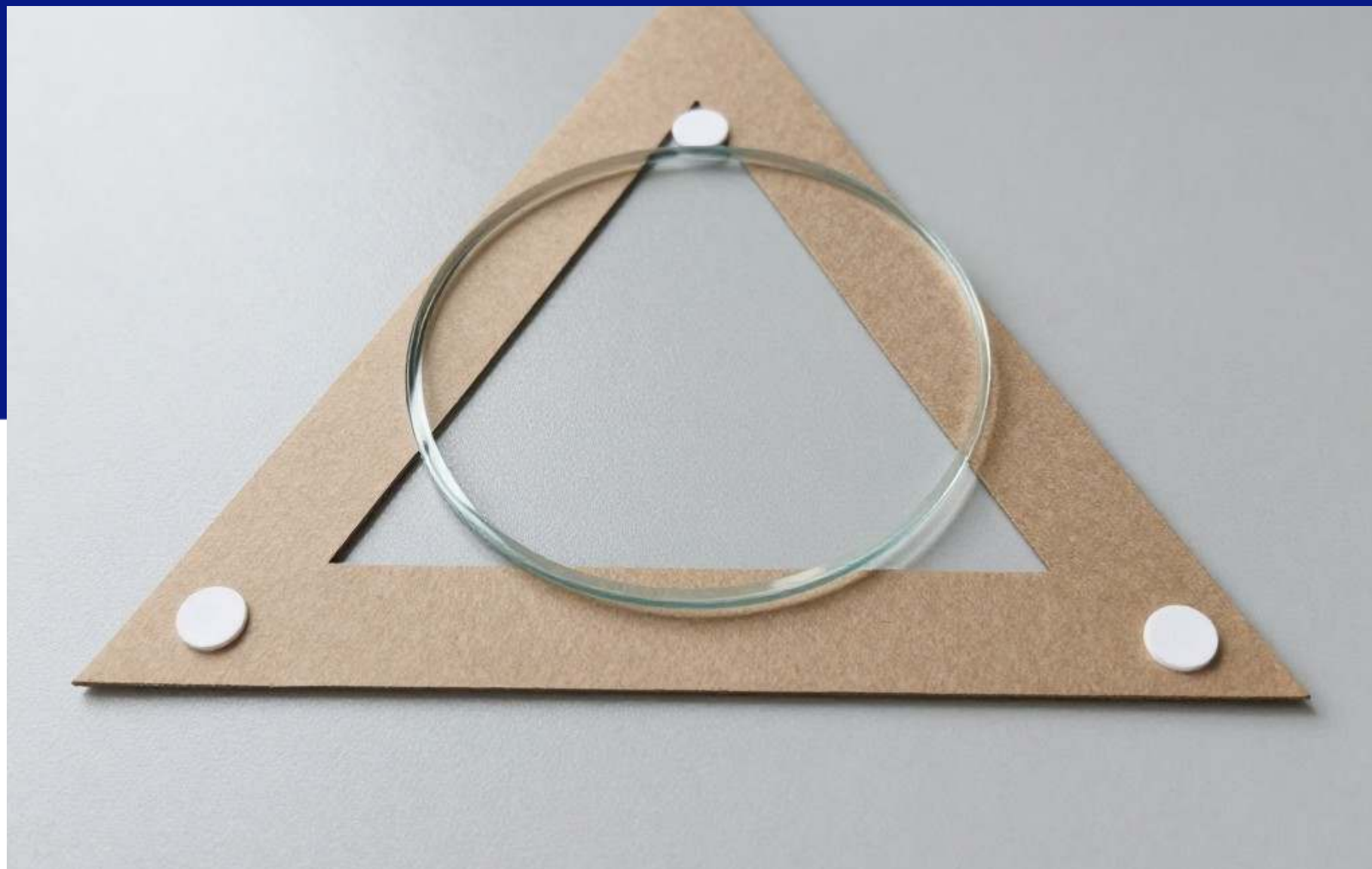


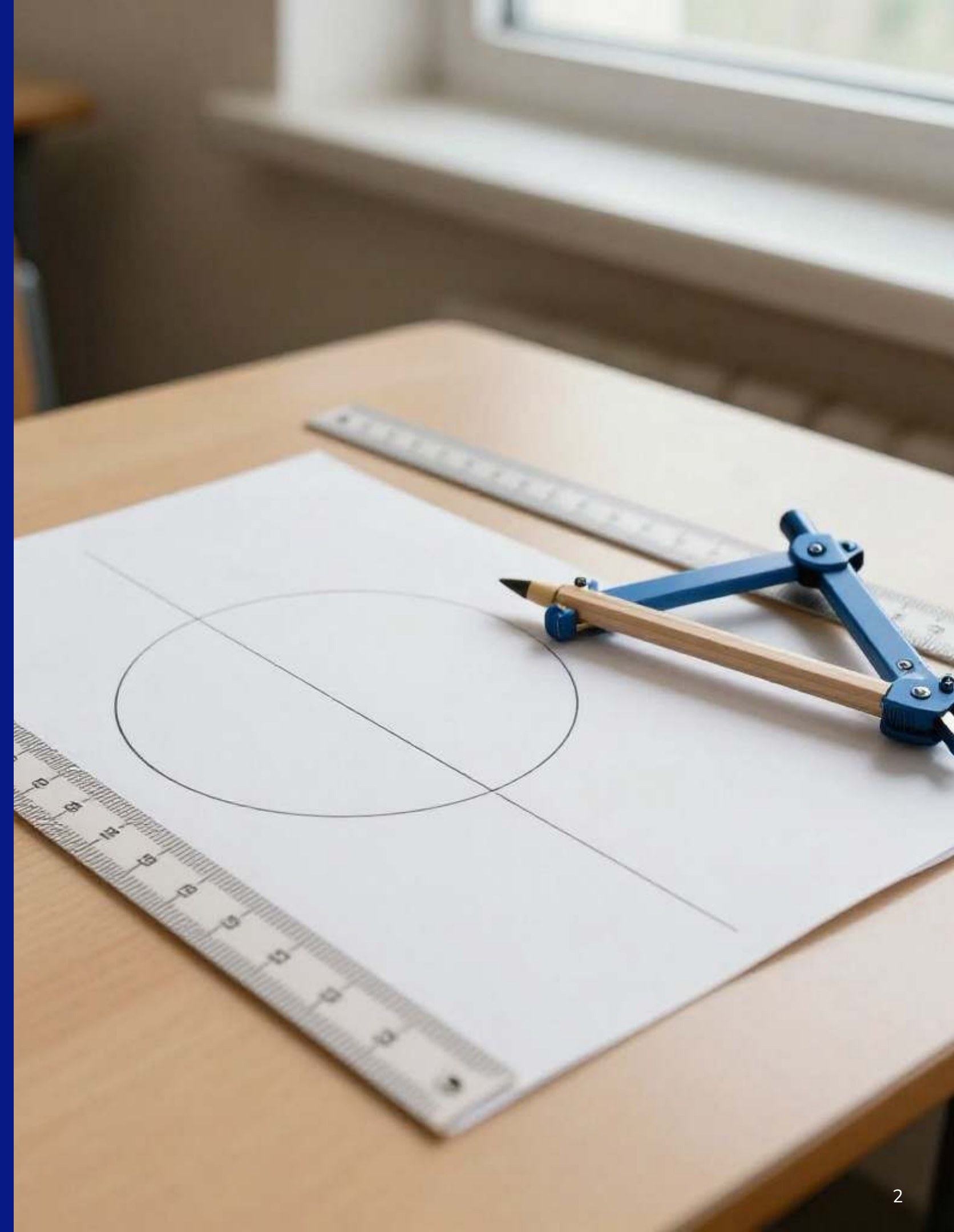
Взаимное расположение и пропорции в геометрии



Окружность и треугольник подчиняются одним точным правилам.

Одна логика для двух тем

Обе темы учат читать чертёж: сначала увидеть расстояния, потом заметить перпендикуляры и подобные треугольники.



План изучения темы

1. Обозначения

Сначала повторим обозначения окружности: центр, радиус, диаметр и точки на окружности помогают точно записывать условия и не путаться в чертеже.

2. Положение прямой

Затем разберём, как прямая может располагаться относительно окружности: пересекать её, касаться или не иметь общих точек.

3. Касательная и секущая

После этого выделим касательную и секущую, чтобы уверенно узнавать их по рисунку и по свойствам.

4. Расстояние d

Далее научимся находить расстояние от центра до прямой с помощью перпендикуляра и сравнивать его с радиусом.

5. Подобие треугольников

В конце применим подобие в прямоугольном треугольнике и используем пропорции для вычисления отрезков и высоты.

Прямая и окружность: три случая

Две общие точки

Если прямая проходит через окружность в двух точках, она делит её на две части и называется секущей. Такое расположение видно сразу по чертежу.

Одна общая точка

Если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, она касается окружности. В этой точке появляется особое перпендикулярное свойство.

Без пересечения

Если прямая не встречает окружность, общих точек нет. Тогда расстояние от центра до прямой больше радиуса окружности.



Критерий по расстоянию d и радиусу r

1. d меньше r

Когда расстояние от центра до прямой меньше радиуса, линия проходит через окружность и даёт две точки пересечения.

2. d равно r

Если расстояние равно радиусу, прямая лишь касается окружности в одной точке и не входит внутрь круга.

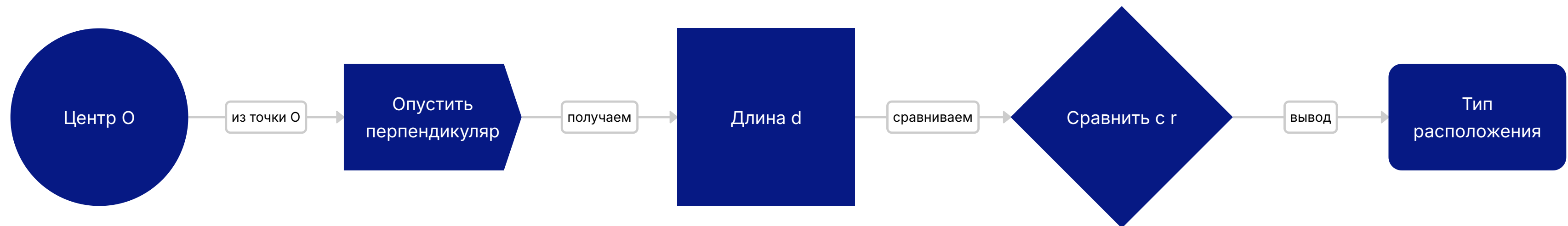
3. d больше r

Когда расстояние больше радиуса, прямая лежит вне окружности и не имеет с ней общих точек.



Как найти d на чертеже

Построение начинается с кратчайшего расстояния от центра до прямой.





Свойство касательной

Признак касания

Касательная имеет с окружностью ровно одну общую точку. Радиус, проведённый в эту точку, всегда перпендикулярен касательной и помогает проверить правильность построения.

Как использовать свойство

Зная перпендикулярность радиуса и касательной, можно строить касательную по заданному радиусу и точке окружности, а также быстро распознавать её на рисунке.

Секущая и хорда

1. Что такое секущая

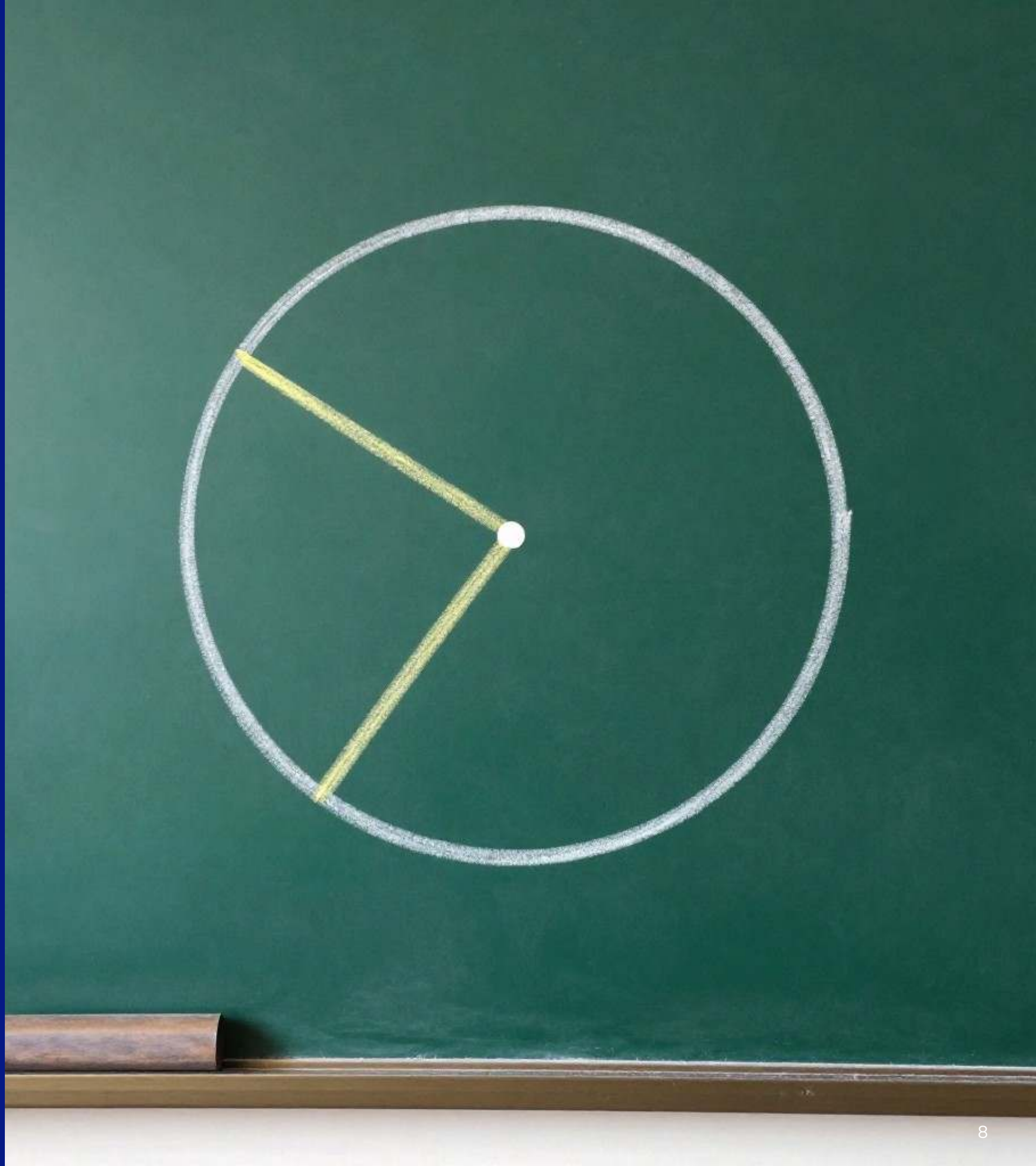
Секущая пересекает окружность в двух точках и проходит через её внутреннюю часть. По этим двум точкам удобно выделять хорду.

2. Что такое хорда

Хорда — это отрезок с концами на окружности. Она может лежать внутри круга и быть частью секущей.

3. Внутренний отрезок

Хордовая часть секущей — именно тот отрезок секущей, который находится внутри окружности между двумя точками пересечения.



3 случая

достаточно, чтобы
определить взаимное
расположение
без дополнительных
построений.

Сравнение расстояния с радиусом сразу показывает, сколько общих точек будет у прямой и окружности.

Правило сравнения d и r в геометрии окружности

Проверь себя: тип прямой

Касательная

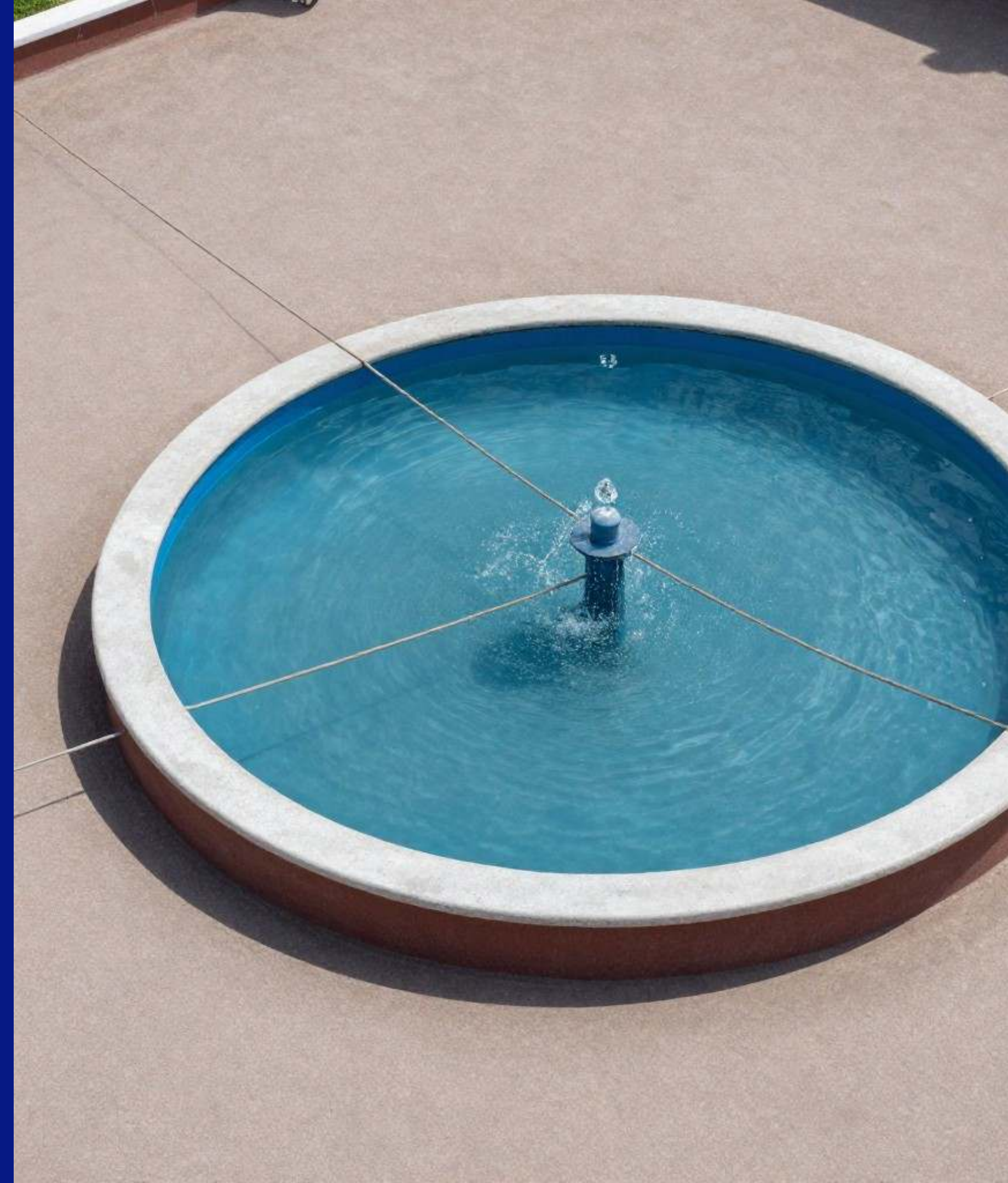
Если радиус, проведённый к линии, образует прямой угол в единственной точке, прямая касается окружности.

Секущая

Если прямая проходит через окружность в двух точках, она является секущей и пересекает её.

Внешняя прямая

Если линия расположена слишком далеко от центра, общих точек с окружностью нет.



Проверь себя: чтение рисунка

1. Найди расстояние

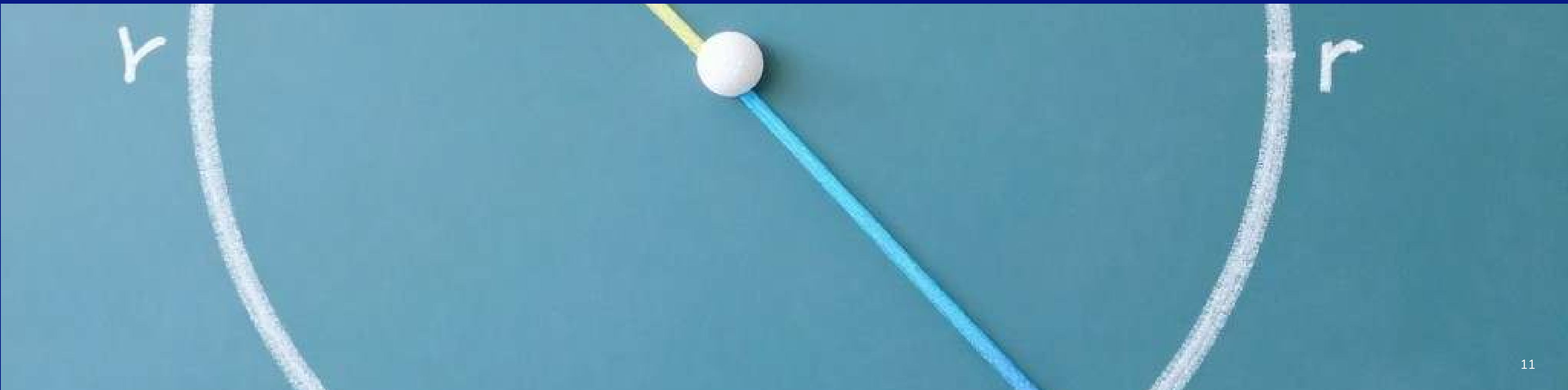
Сначала найдите перпендикуляр от центра O к прямой l . Его длина показывает расстояние до прямой и сразу подсказывает, сколько общих точек будет у прямой и окружности.

2. Сравни с радиусом

Сравните полученную длину с радиусом r . Если перпендикуляр короче радиуса, прямая проходит через окружность; если равен ему, получается касание; если длиннее, точек пересечения нет.

3. Сформулируй вывод

Записывайте ответ по схеме: две точки, одна точка или ни одной. Так легче не перепутать тип прямой и быстро проверить рассуждение по рисунку.



Обозначения в прямоугольном треугольнике

1. Основные элементы

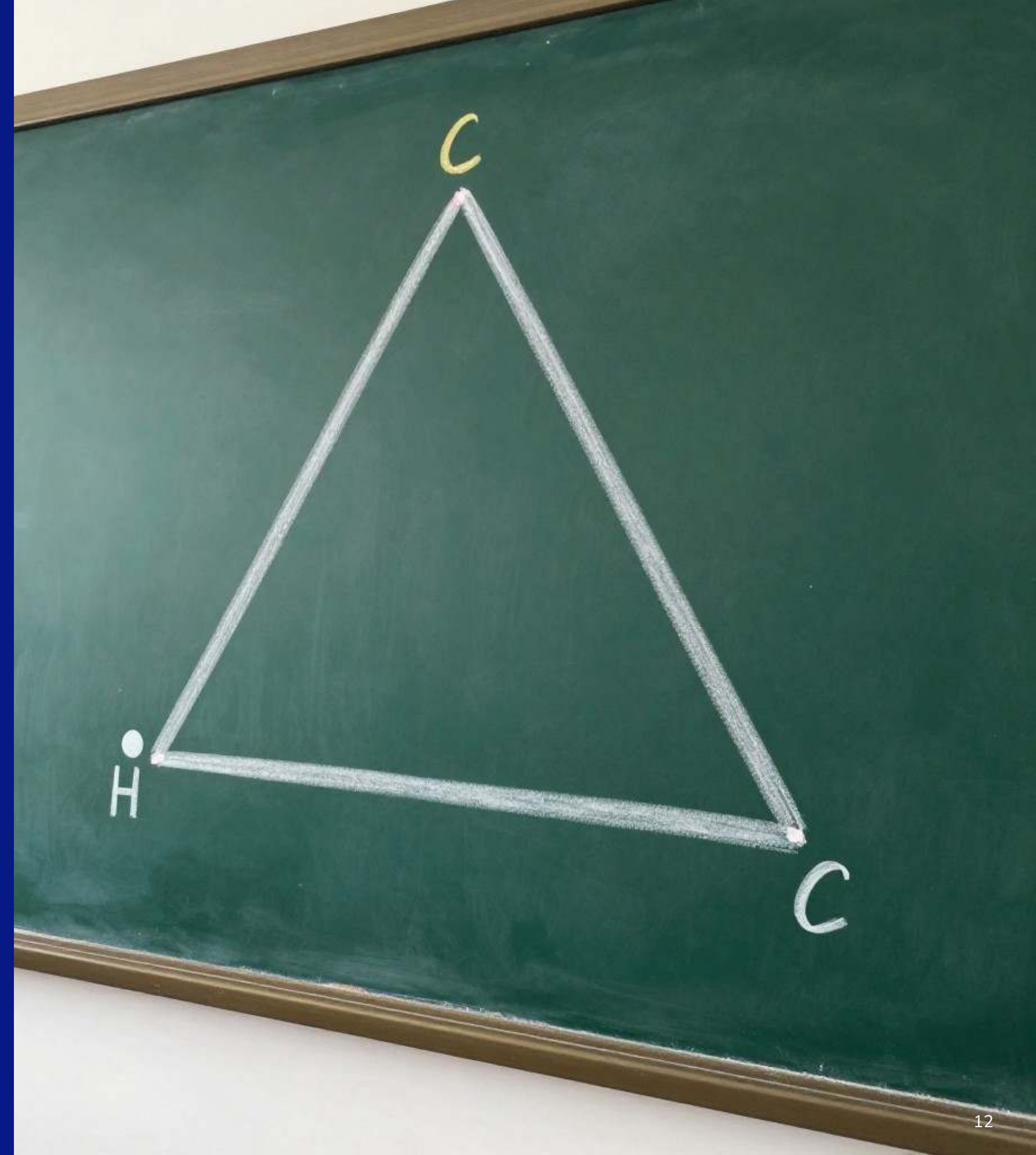
В прямоугольном треугольнике ABC прямой угол расположен при вершине C , а сторона AB является гипотенузой. Именно её удобно брать за основу для всех дальнейших построений и формул.

2. Высота и точка H

Из вершины C опускают высоту CH на гипотенузу AB . Точка H делит AB на два отрезка, AH и BH , которые потом входят в пропорции и вычисления.

3. Два новых треугольника

После проведения высоты появляются треугольники AH и BH . Они меньше исходного, но связаны с ним общими углами и одинаковой структурой, поэтому их удобно сравнивать.





Почему треугольники подобны

Совпадение углов

Треугольники ABC , ACH и BCN имеют по одному прямому углу. Кроме того, у них совпадают по одному острому углу, поэтому форма фигур сохраняется.

Подобие фигур

Из равенства углов следует подобие треугольников. Это значит, что соответствующие стороны относятся одинаково, и можно составлять пропорции без дополнительных построений.

Основа формул

Именно из подобия выводят все нужные формулы: для катетов, высоты и отрезков гипотенузы. Поэтому сначала важно заметить геометрическую связь, а потом переходить к вычислениям.

3

**варианта взаимного
расположения прямой
и окружности достаточно,
чтобы разобрать любую
схему.**

Три основных случая помогают быстро читать рисунок и сразу выбирать нужное правило без лишних вычислений.

Свойства взаимного расположения прямой и окружности и правило сравнения d с r .

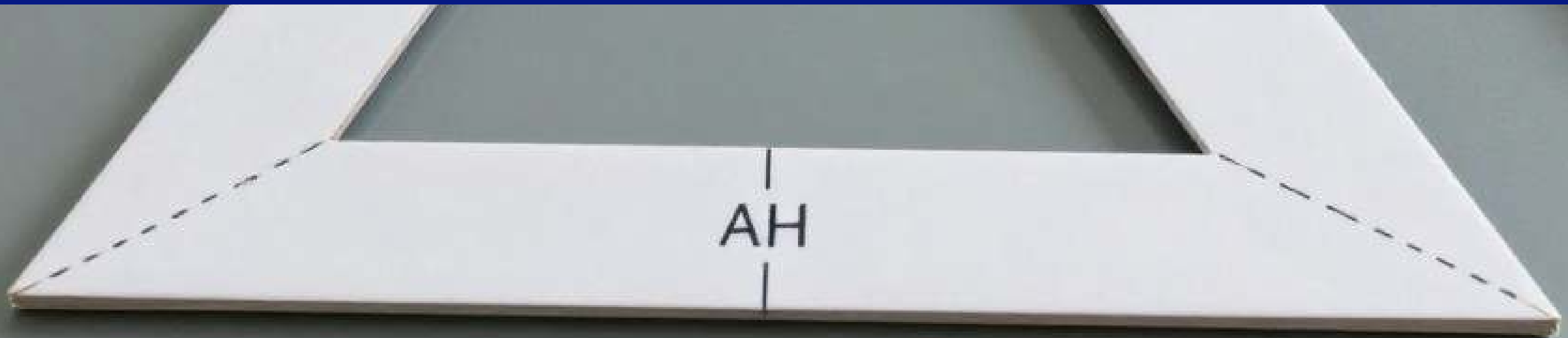
Высота как геометрическое среднее

1. Используем части гипотенузы

Если в прямоугольном треугольнике известны части гипотенузы $АН$ и $ВН$, их произведение связывается с высотой $СН$. Так можно находить $СН$ без длинных построений.

2. Находим высоту

Чтобы получить длину высоты, нужно извлечь квадратный корень из произведения $АН$ и $ВН$. Это удобно, когда оба отрезка уже отмечены на чертеже.



Связь катетов с гипотенузой

Катет и гипотенуза

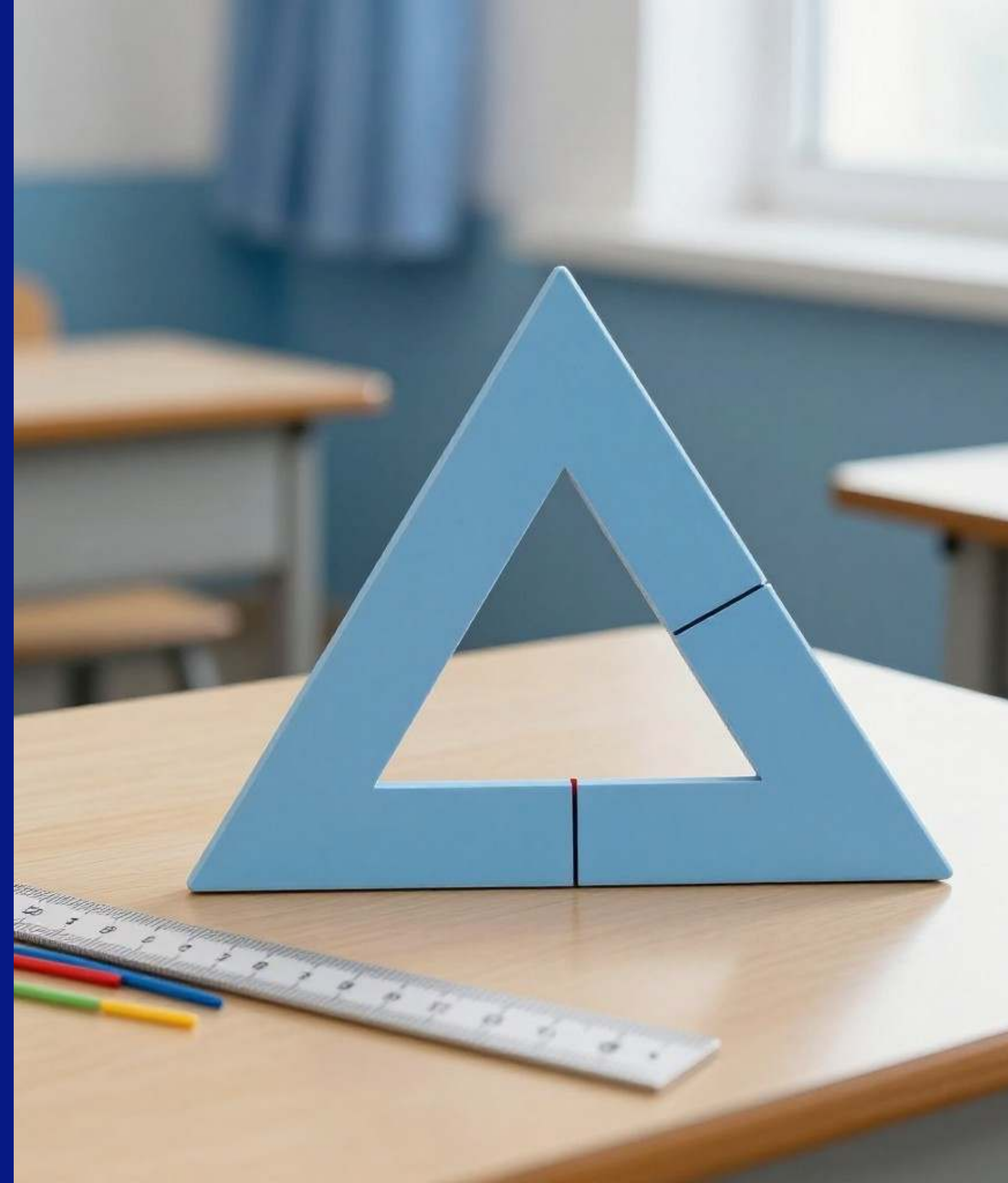
Формула $AC^2 = AH \cdot AB$ показывает, что катет связан с гипотенузой и ближайшим к нему отрезком. Аналогично для второго катета используется $BC^2 = BH \cdot AB$.

Когда применять

Эти равенства помогают быстро находить неизвестную сторону, если известны гипотенуза и один отрезок на ней. Они также удобны для проверки правильности ответа.

Проверка на практике

Если результат получается в виде квадрата числа, вычисления становятся особенно быстрыми. Так легко распознавать знакомые тройки сторон, например 3–4–5 или 15–20–25.



Пример 1: найти высоту

1. Находим АВ

Дано: $АН = 4$ см и $ВН = 9$ см. Сначала находим всю гипотенузу: $АВ = 4 + 9 = 13$ см. Это первый шаг ко всем остальным вычислениям.

2. Считаем высоту

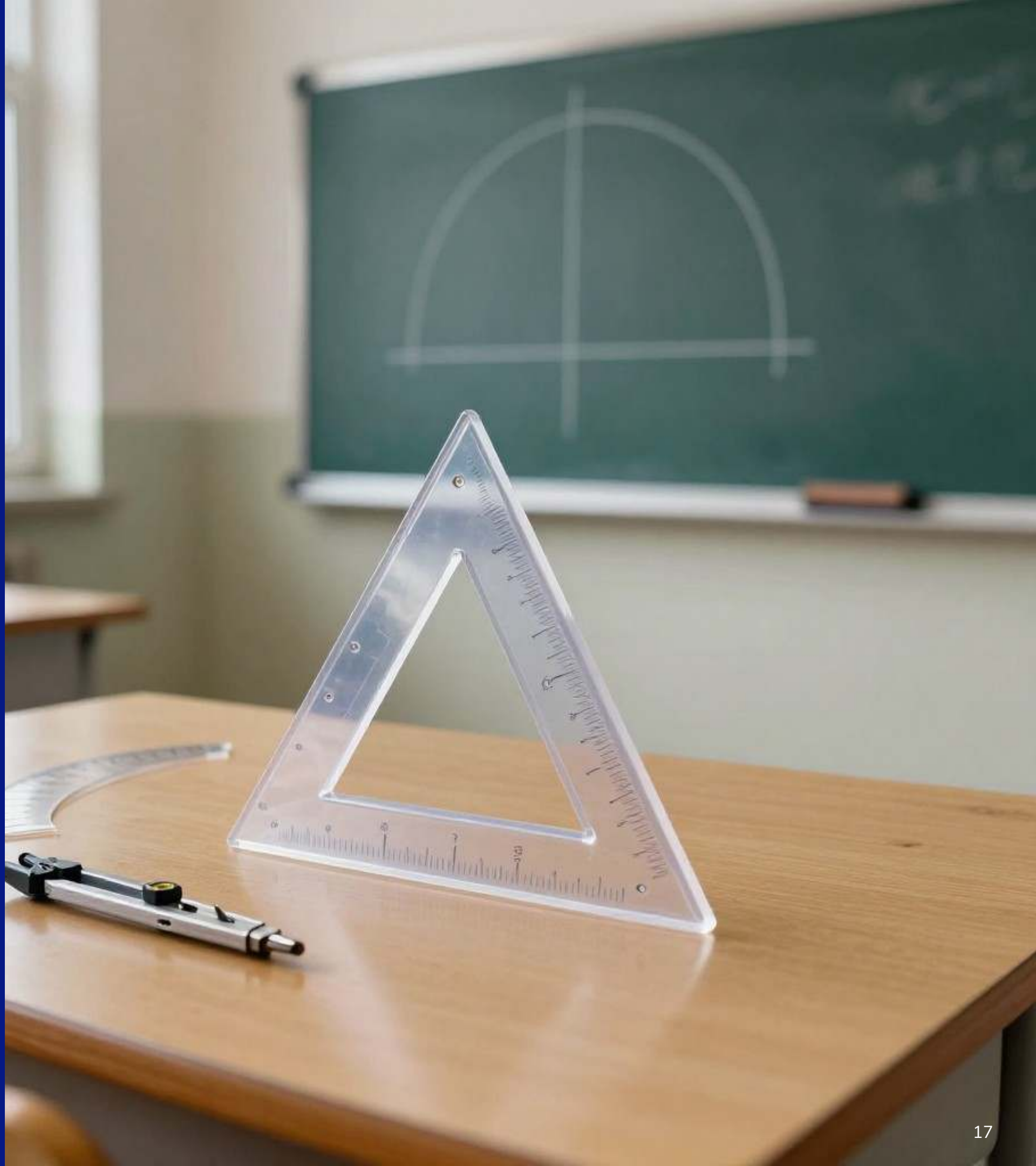
Теперь используем формулу $СН^2 = АН \cdot ВН$. Получаем $СН^2 = 4 \cdot 9 = 36$, значит $СН = 6$ см. Высота найдена через произведение отрезков гипотенузы.

3. Находим катеты

Для катетов применяем связи $АС^2 = 4 \cdot 13$ и $ВС^2 = 9 \cdot 13$. Отсюда $АС = \sqrt{52}$, а $ВС = \sqrt{117}$; точные значения можно оставить в корнях.

4. Делаем проверку

Проверяем логику решения: все найденные величины согласуются с исходными данными и формулами подобия. Такой порядок действий помогает не пропустить ни одного шага.





Пример 2: найти катеты

Находим ВН

Известно, что $AB = 25$ см и $АН = 9$ см. Сначала находим второй отрезок гипотенузы: $ВН = 25 - 9 = 16$ см.

Считаем АС

Для катета АС используем формулу $АС^2 = АН \cdot АВ$. Получаем $АС^2 = 9 \cdot 25 = 225$, значит $АС = 15$ см без лишних преобразований.

Считаем ВС

Теперь находим второй катет: $ВС^2 = ВН \cdot АВ = 16 \cdot 25 = 400$, следовательно, $ВС = 20$ см. Результат получается аккуратным и целым.

Проверяем ответ

Пары 15, 20 и 25 образуют известную прямоугольную тройку. Это удобный способ проверить, что вычисления выполнены верно и все формулы применены правильно.

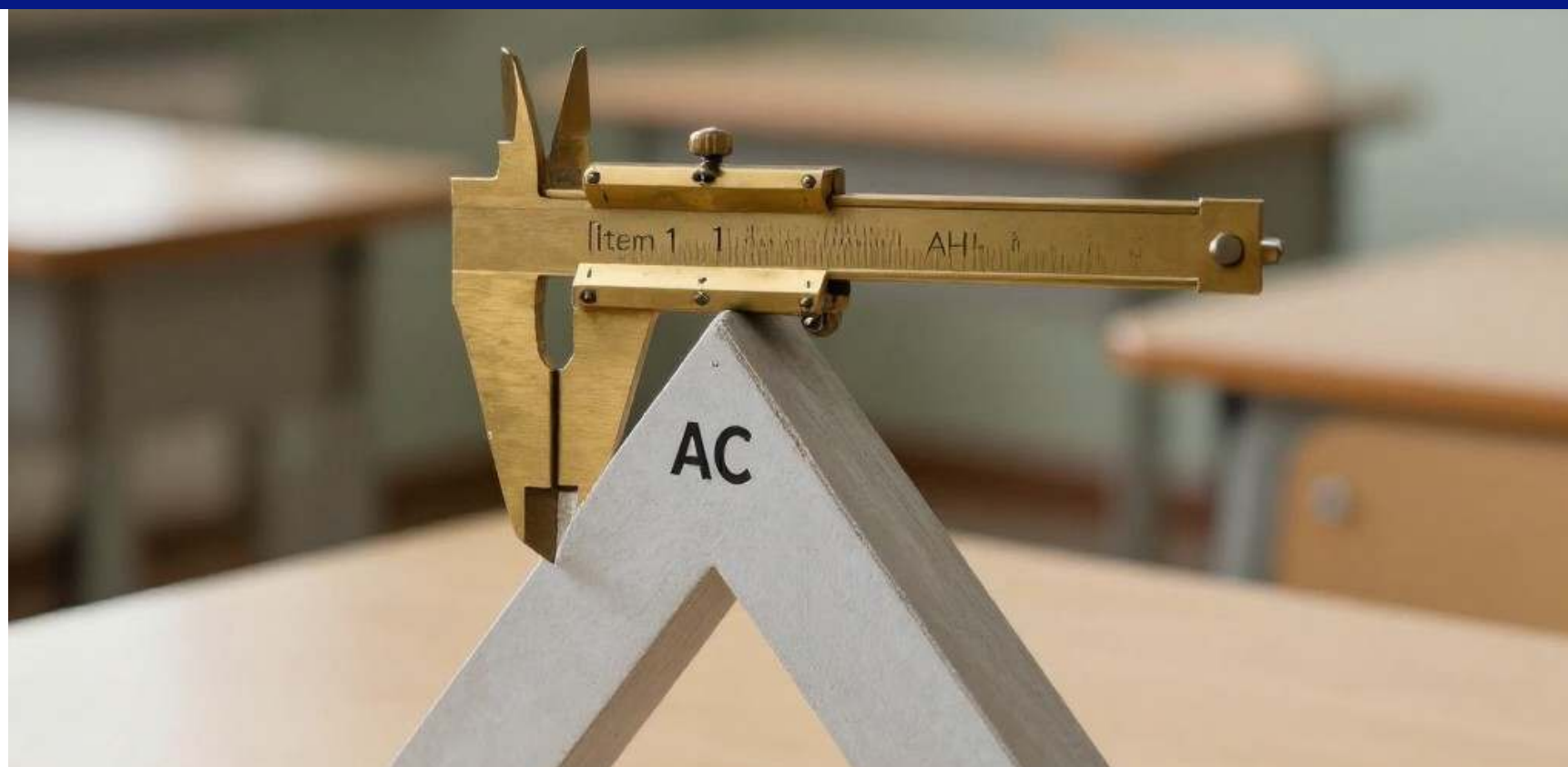
Пример 3: вычисления по формулам

Находим АН

Сначала по формуле $АН = AC^2 / АВ$ получаем $144 / 20 = 7,2$ см. Это показывает, какую часть гипотенузы занимает отрезок у катета АС.

Находим ВН

Дальше вычисляем второй отрезок: $ВН = 20 - 7,2 = 12,8$ см. Теперь оба участка гипотенузы известны, и можно перейти к проверке высоты.



Что нужно унести с урока

Сегодня мы связали два важных сюжета: взаимное расположение прямой и окружности и пропорции в прямоугольном треугольнике. Если помнить про расстояние, перпендикуляр и подобие, задачи решаются быстрее и увереннее.

