

Несовместные и независимые события

Как связаны случайные события и как считать их вероятности?

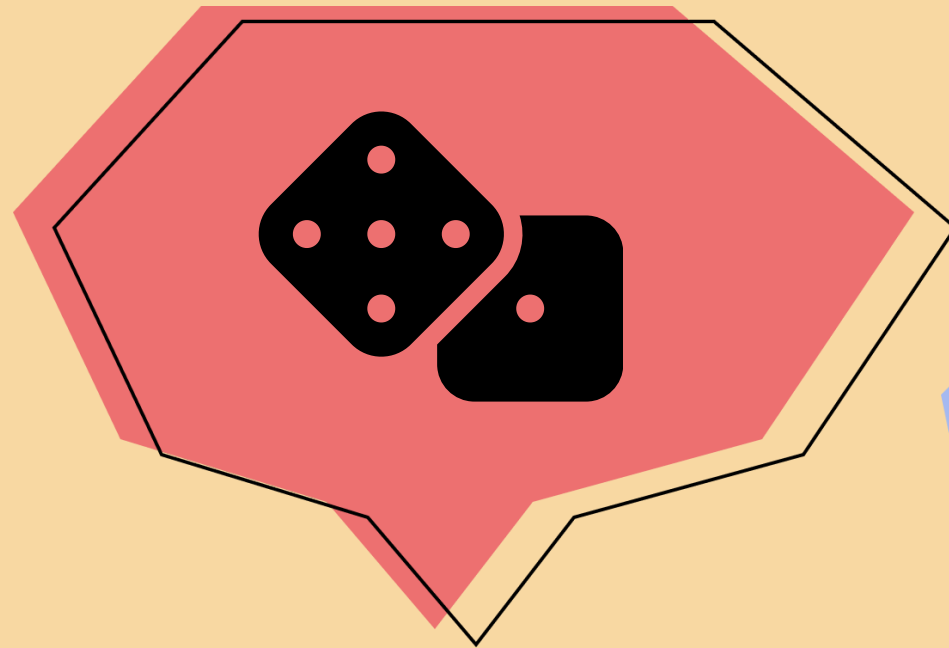


Почему это важно в вероятности

В задачах по вероятности нужно быстро понять, могут ли события случиться вместе и влияет ли одно на другое. От этого зависит выбор формулы и правильный ответ.

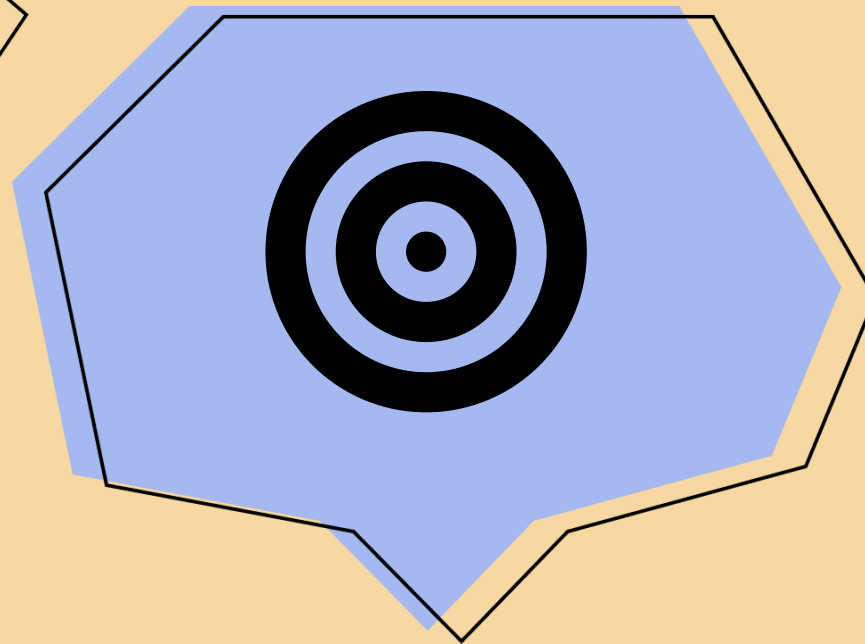
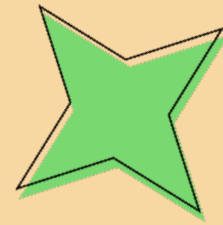


Основные понятия случайного опыта



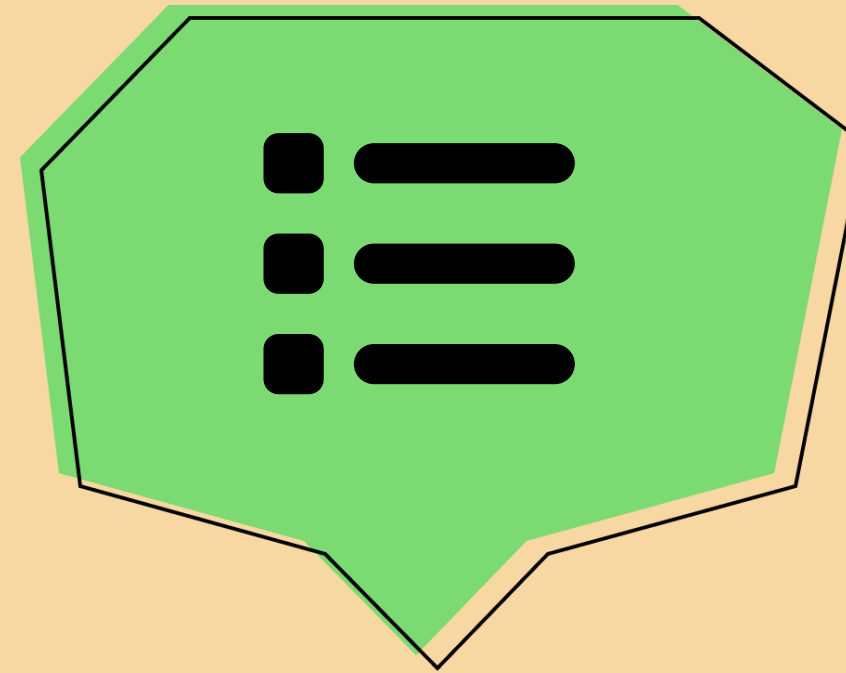
Случайный опыт

Это действие, результат которого заранее точно не известен. Мы можем описать все возможные исходы, но не можем предсказать, какой именно выпадет в конкретной попытке.



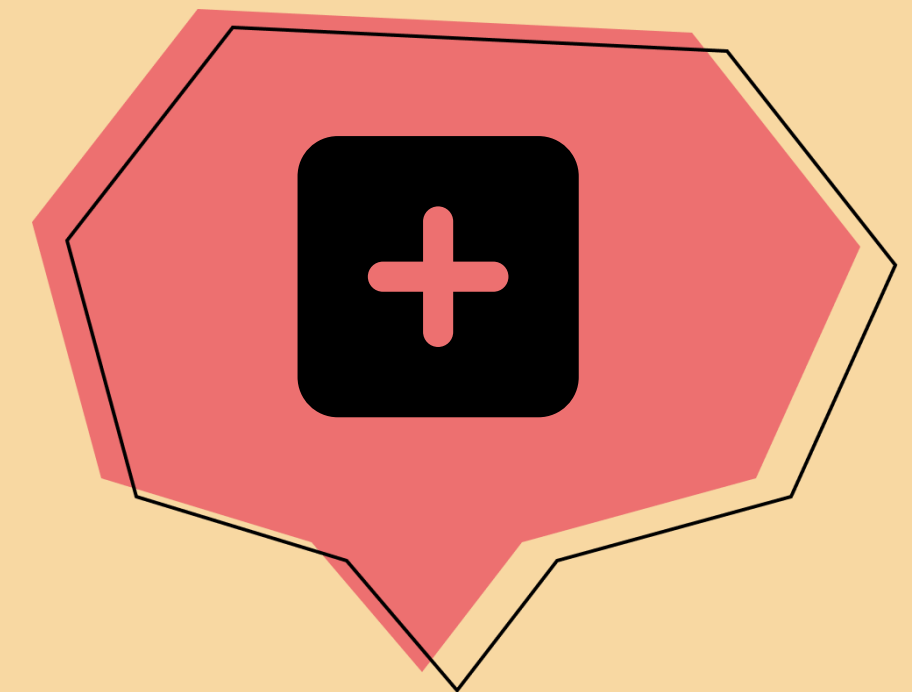
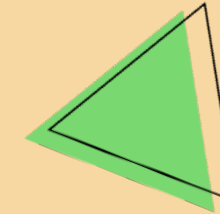
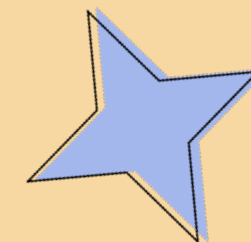
Исход

Это один конкретный результат опыта. Например, на кубике выпало 4, а при броске монеты — орёл. Каждый исход относится к одному возможному случаю.



Событие

Это один исход или несколько исходов, объединённых общим признаком. Например, событие «выпало чётное число» включает 2, 4 и 6 на кубике.



Пространство исходов

Это полный набор всех возможных результатов опыта. Оно помогает увидеть, какие события можно рассматривать и какие исходы входят в каждое из них.

Несовместные события: определение и пример

Что это значит

Несовместные события не могут произойти одновременно в одном опыте. Если наступает одно из них, второе исключается, поэтому общих исходов у них нет.

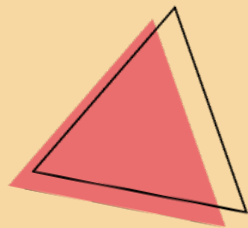
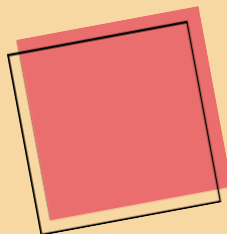
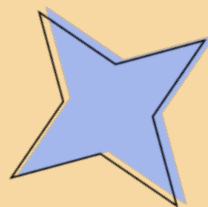
Формула пересечения

Для несовместных событий пересечение пусто, а значит $P(A \cap B) = 0$. Это важный признак: если общих исходов нет, вероятность совместного наступления равна нулю.

Пример с кубиком

При одном броске кубика событие А — «выпало чётное число», событие В — «выпало нечётное число». Одно число не может быть сразу чётным и нечётным.

Примеры несовместных событий

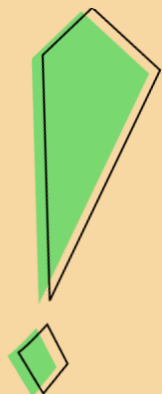
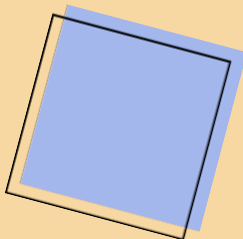
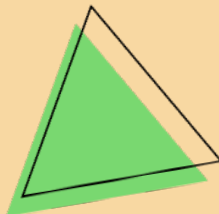


Опыт	A и B	Совместны?
Кубик	2 и 5	Нет
Монета	орёл и решка	Нет
Карты	красная и чёрная	Нет
Шар	синий и зелёный	Нет

Во всех строках показано, что события не имеют общих исходов.

Если два события исключают друг друга, они несовместны и не могут наступить одновременно.

Учебные примеры по теме случайных событий



Как распознать несовместность

1. Проверьте условие

Сначала определите, можно ли события получить в одном и том же опыте одновременно. Если одно событие сразу исключает другое, они несовместны.

2. Найдите общие исходы

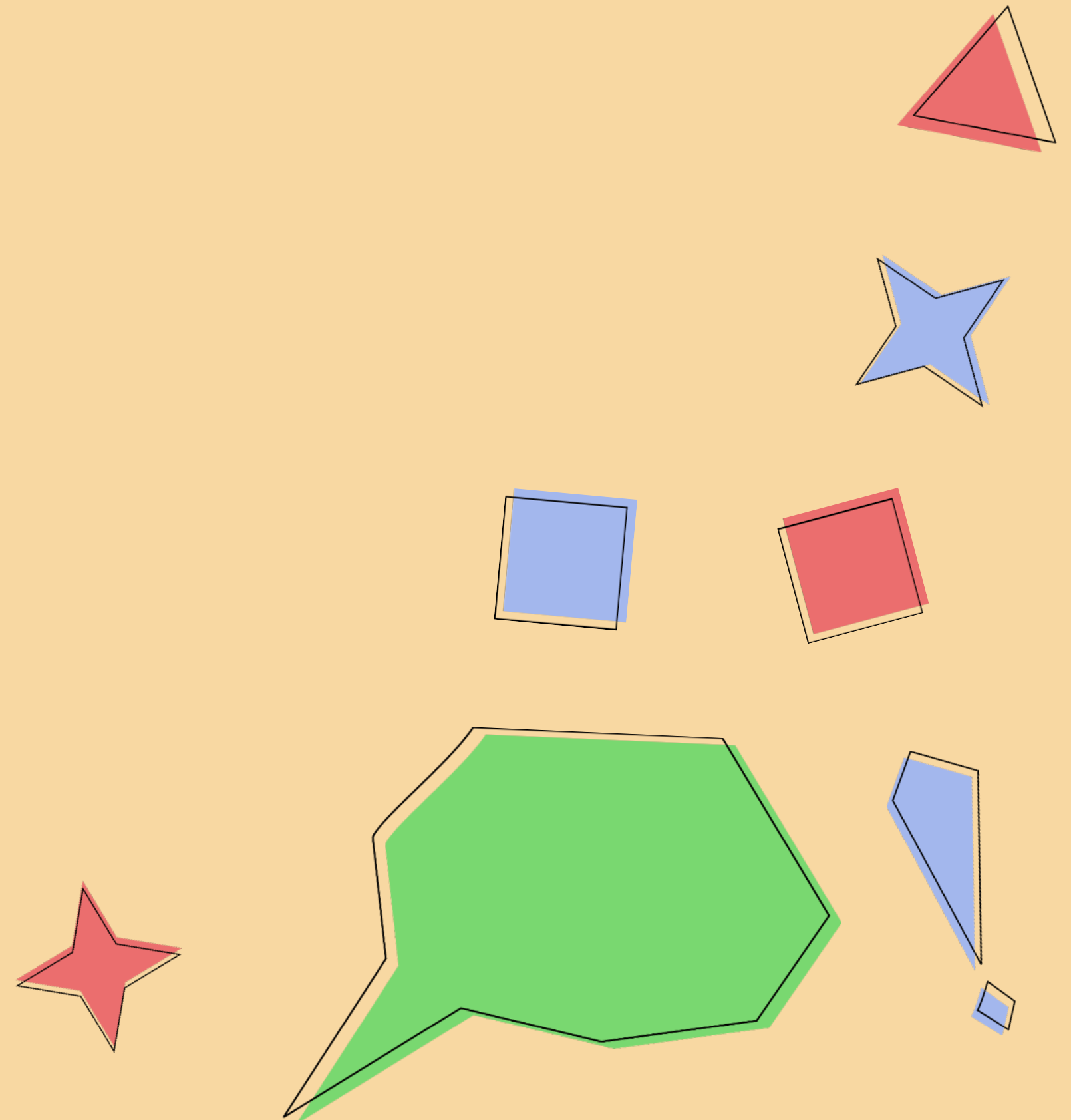
У несовместных событий общих исходов нет, поэтому их пересечение пусто. Это удобно проверять через описание результата каждого события.

3. Примените сложение

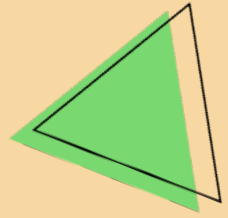
Для несовместных событий вероятность объединения считается сложением: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Общие исходы не повторяются, потому что их просто нет.

4. Мини-пример

При одном броске кубика вероятность получить 1 или 2 равна $1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$. Здесь события не пересекаются, поэтому складываются напрямую.

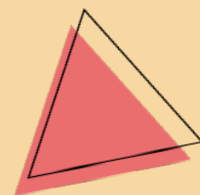
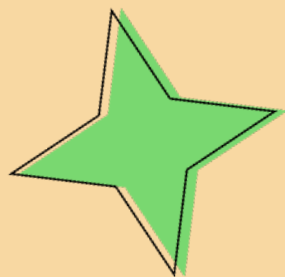


Сложение вероятностей для кубика

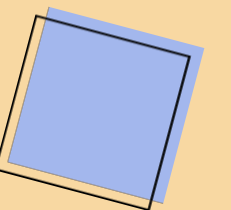


На диаграмме показаны отдельные исходы и объединения без пересечения.

Вероятности несовместных событий складываются: чем больше допустимых исходов, тем выше вероятность.



Вероятности исходов игрального кубика: $1/6$ для каждой грани



Независимые события: что это такое

Нет влияния

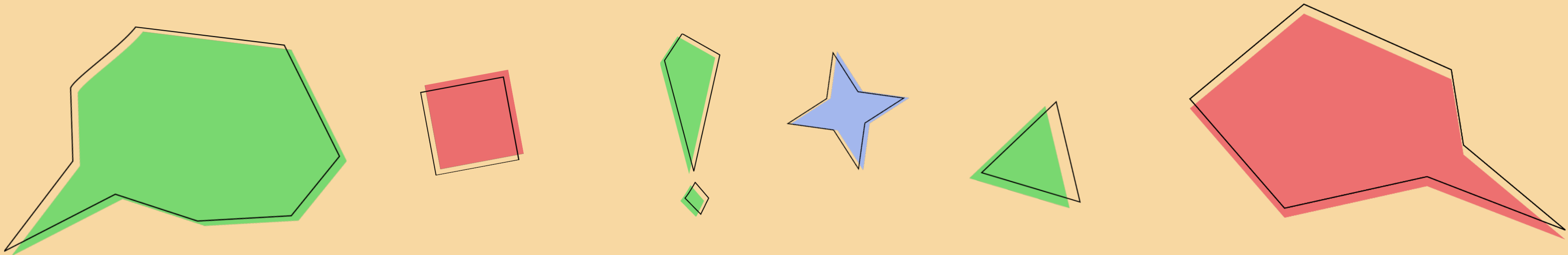
Независимые события устроены так, что появление одного не меняет вероятность другого. После первого опыта второй остаётся таким же по условиям и шансам.

Формула произведения

Для независимых событий используется формула $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Она показывает вероятность того, что оба события произойдут вместе.

Простой пример

Если монету и кубик бросают отдельно и честно, результат монеты не влияет на число на кубике. Поэтому эти события считаются независимыми.



Независимость в знакомых опытах



Два броска монеты

В первом броске может выпасть орёл, во втором — решка, и эти результаты не связаны между собой. Каждый бросок монеты начинается как новый случайный опыт, поэтому результат первого не меняет шансы второго.



Монета и кубик

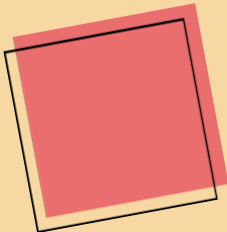
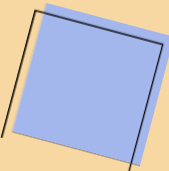
Если сначала подбросить монету, а затем бросить кубик, исход монеты не влияет на число на кубике. У каждого опыта свой набор возможных результатов, и вероятность каждого из них сохраняется.



Кубик и карта

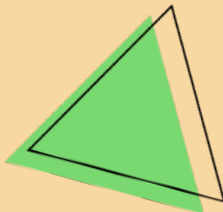
Бросок кубика и выбор карты из колоды — разные действия, поэтому результат одного не меняет исход другого. Именно в таких ситуациях удобно проверять независимость по смыслу задачи и по формуле.

Несовместные и независимые события: сравнение

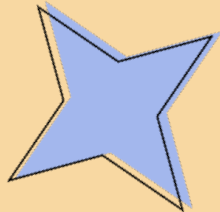


Признак	Несовместные	Независимые
Вместе?	Нет	Да
Формула	$P(A \cap B) = 0$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Влияние	Исключают	Не влияют
Пример	орёл и решка	монета и кубик

Основные определения темы «Несовместные и независимые события»



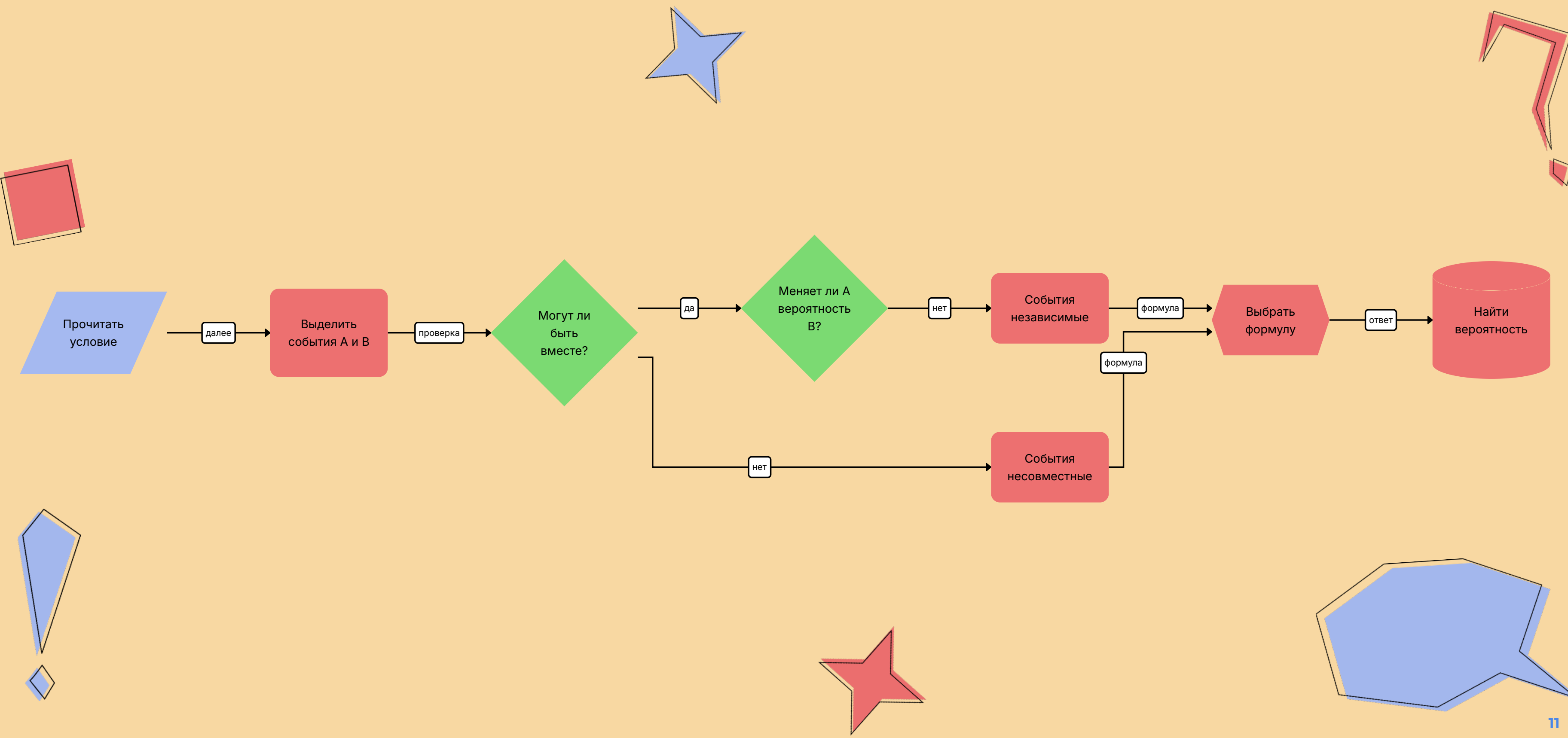
Сравнение помогает не путать два разных типа задач и выбирать верную формулу.



Если события могут случиться вместе и не влияют друг на друга, это независимость; если не могут — несовместность.

Как определить тип связи между событиями

Пошаговая схема для выбора нужной формулы по условию задачи



Формулы, которые используются в задачах



Сложение для «или»

Если события несовместны, их общих исходов нет, поэтому вероятность объединения находится сложением: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Эта формула подходит, когда нужно учесть один из двух вариантов.



Умножение для «и»

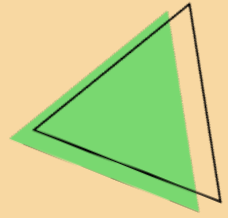
Если события независимы, вероятность их совместного наступления равна произведению: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Она используется, когда нужно одновременно выполнить два условия в одном ответе.



Сначала смысл, потом формула

Перед вычислением важно понять, о чём спрашивает задача: о выборе одного из исходов или о совместном результате. От этого зависит, складывать вероятности или умножать их.

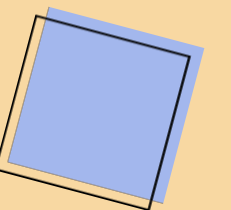
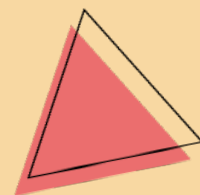
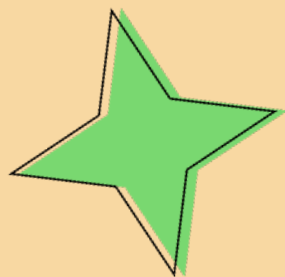
Пример с монетой и кубиком



Отдельные вероятности для монеты и кубика одинаковы, но совместный исход получается реже. Это удобно показывать на одном графике.

Совместное событие имеет вероятность $\frac{1}{4}$, потому что для независимых действий вероятности перемножаются.

Учебный пример по теме «несовместные и независимые события»



Типичные ошибки при решении задач

Путают разные типы событий

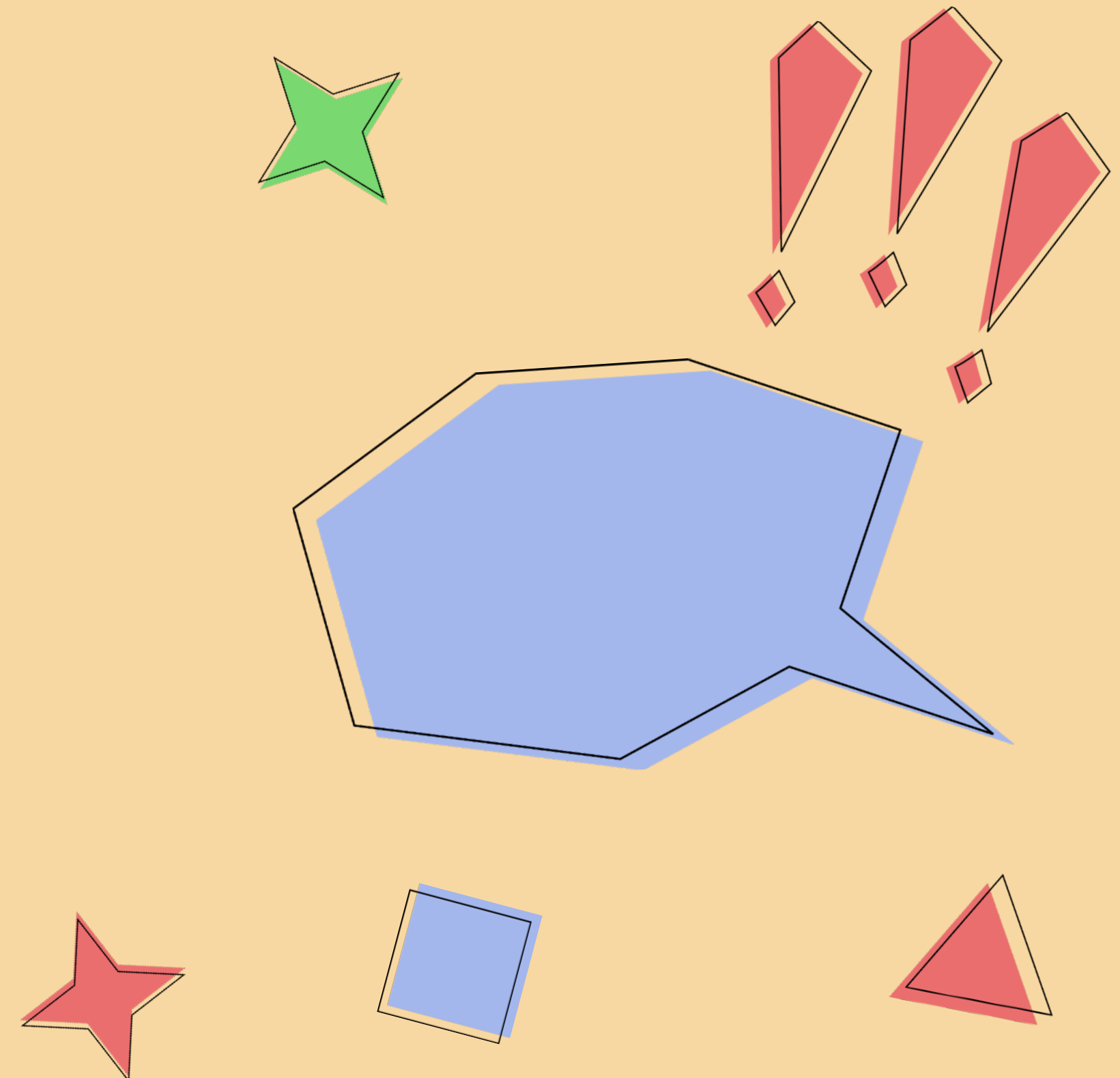
Если события не могут произойти одновременно, их нельзя считать независимыми по привычке. В таком случае общих исходов нет, а вероятность пересечения равна нулю.

Выбирают не ту операцию

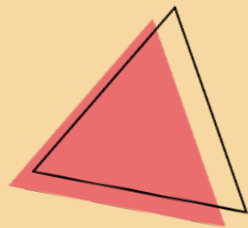
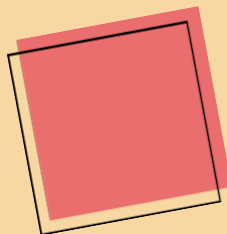
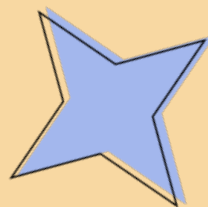
В задачах на два опыта часто по ошибке складывают вероятности там, где нужно умножать. Особенно это заметно, когда условие требует одновременного наступления двух событий.

Не замечают ключевые слова

Слова «или» и «и» помогают понять, что искать: объединение или пересечение. Если их игнорировать, легко получить ответ, который не соответствует смыслу задачи.



Типовые задачи и ответы

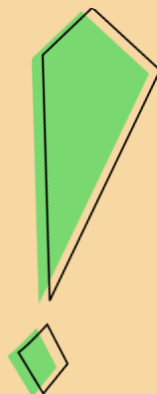
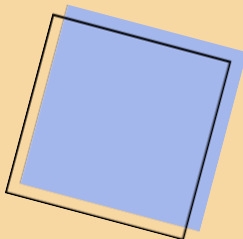
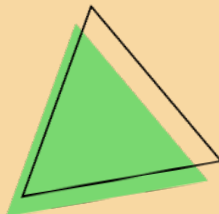


Ситуация	Ответ
2 орла	независимые, $\frac{1}{4}$
1 или 6 на кубике	несовместные, $\frac{2}{6}$
Красная и чёрная карта	несовместные, 0
Орёл и 3	независимые, $\frac{1}{12}$
2 и 5 в двух бросках	независимые, $\frac{1}{36}$

Краткая проверка: определяем тип связи между событиями и сразу получаем верный ответ по формуле.

В задачах на один опыт чаще встречаются несовместные события, а в разных опытах — независимые. Тип связи сразу подсказывает нужную формулу.

Учебные примеры по теме



Школьная лотерея и два разных случая

Один билет — один результат

Ученик достаёт из коробки один билет и сразу видит, выигрышный он или нет. Эти два результата относятся к одному выбору, поэтому вместе они не возникают. Такой пример удобно использовать для понимания несовместных событий.



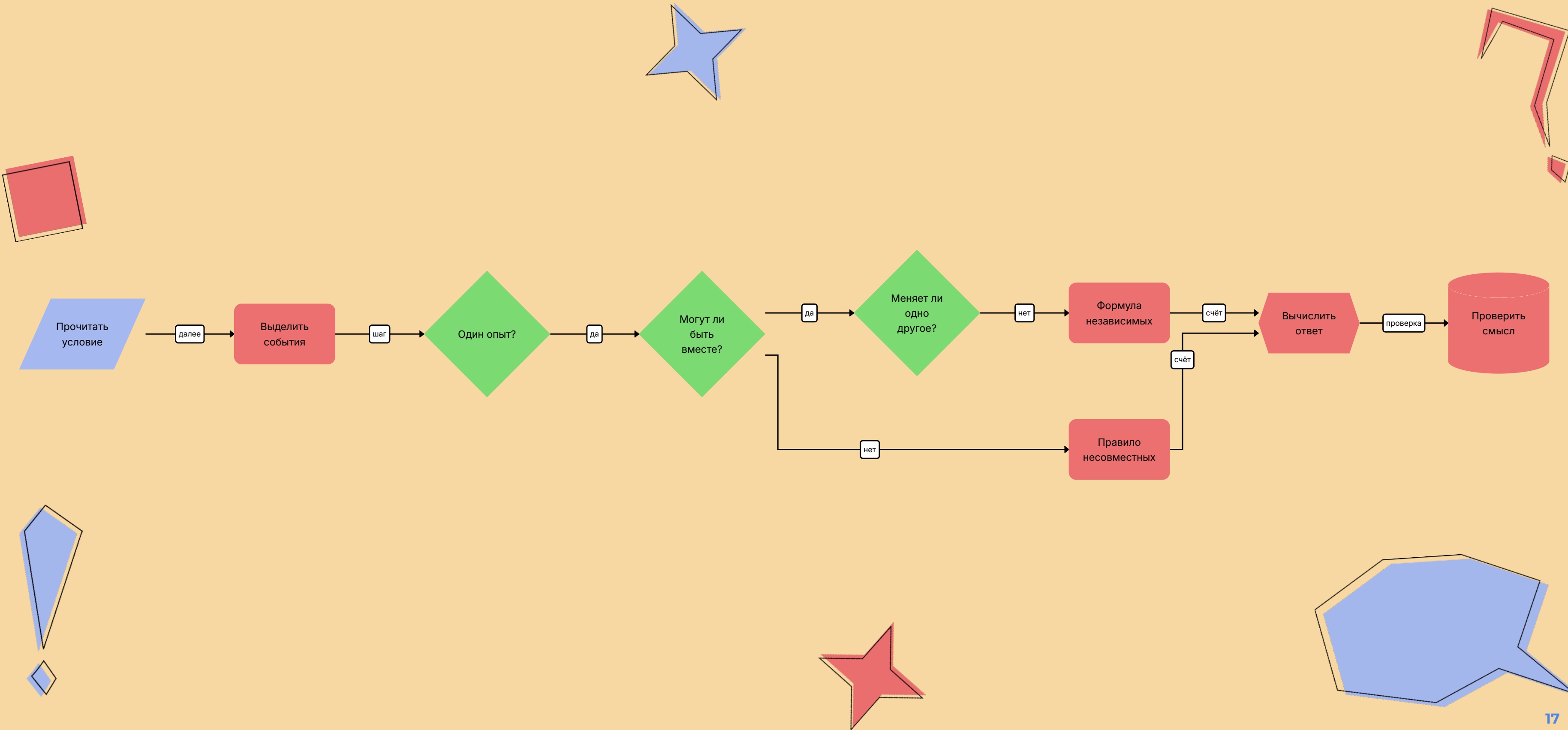
Два действия без влияния друг на друга

Сначала отдельно тянут жетон определённого цвета, а затем отдельно бросают монету. Если условия опыта одинаковы, результат жетона не меняет вероятность орла или решки. Здесь хорошо видно, что события независимы.

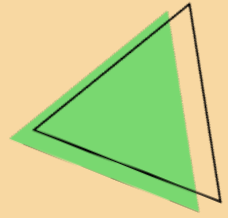


Алгоритм решения задач на несовместные и независимые события

Последовательность действий помогает не перепутать объединение и пересечение вероятностей



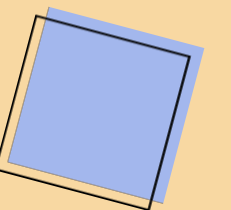
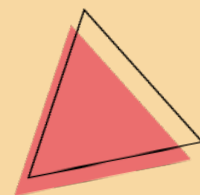
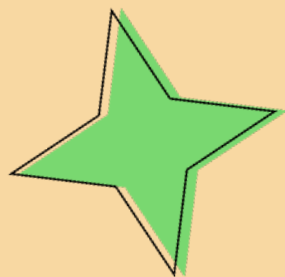
Разница между сложением и умножением вероятностей



Одинаковые исходные вероятности дают разные результаты в зависимости от того, ищем ли мы «или» или «и».

Для несовместных событий вероятность объединения больше каждой отдельной вероятности, а для независимых пересечение получается по умножению.

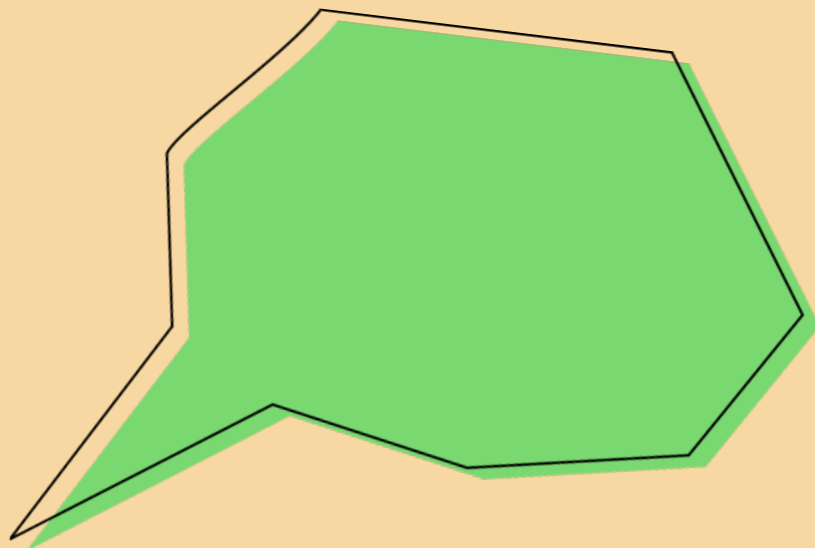
Учебный пример: $P(A)=1/3$, $P(B)=1/2$



Что означает пересечение событий

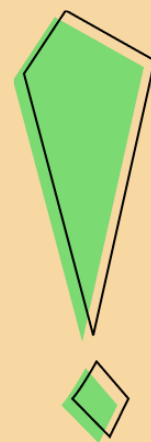
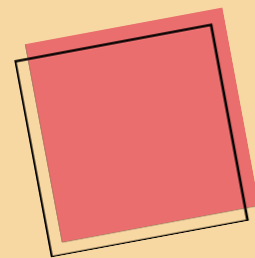
Общие исходы

Пересечение $A \cap B$ — это все результаты, которые одновременно подходят под оба события. Если хотя бы один исход не подходит, он не входит в пересечение.



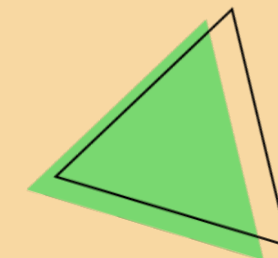
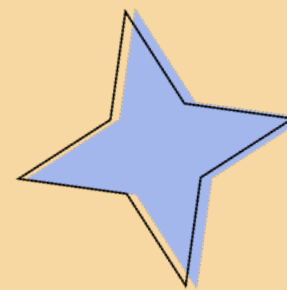
Когда пересечение пусто

У несовместных событий общих исходов нет совсем. Поэтому пересечение пусто, а вероятность такого пересечения равна нулю.



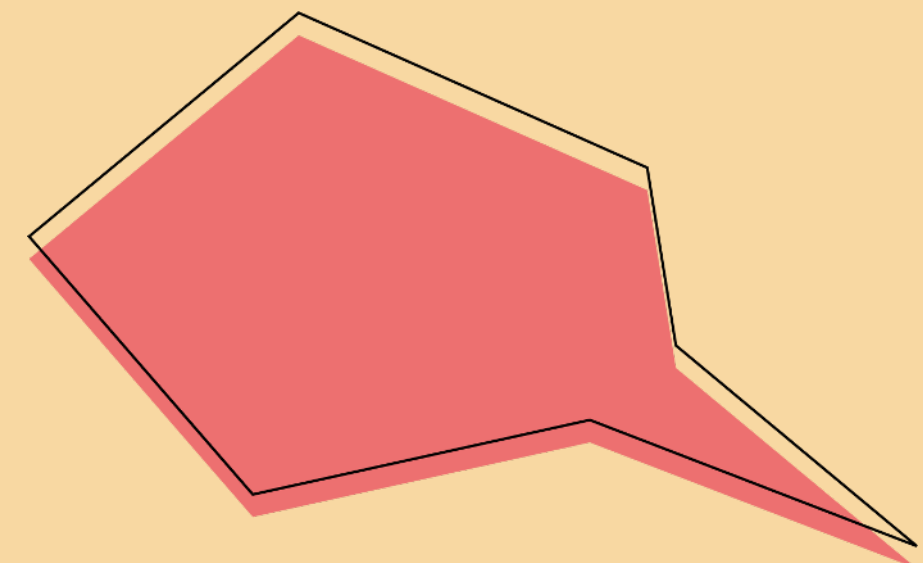
Когда пересечение возможно

У независимых событий общие исходы есть, и они могут быть редкими. Именно поэтому вероятность пересечения часто меньше вероятности каждого события по отдельности.



Зачем это нужно

Понимание пересечения помогает в задачах, где требуется результат, удовлетворяющий сразу двум условиям. Без этого легко перепутать объединение с пересечением.





Главное, что нужно запомнить

**Несовместные события не происходят вместе,
поэтому их вероятности складывают. Независимые
события могут совпадать, но не влияют друг
на друга, и их вероятности перемножают.**

