

Замечательные точки в треугольнике

Точки, где простые линии раскрывают свойства треугольника.

Что объединяет замечательные точки

Все эти точки рождаются из одинаково простых построений: медиан, биссектрис, серединных перпендикуляров и высот. Именно они позволяют находить центры и окружности без лишних вычислений.



Какие линии внутри треугольника важны

Медианы

Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны. Она делит треугольник на две равные по площади части и часто помогает находить точку равновесия фигуры.

Перпендикуляры

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны и перпендикулярен ей. Он указывает все точки, равноудалённые от концов отрезка, а значит помогает строить описанную окружность.

Биссектрисы

Биссектриса делит угол на две равные части. Из-за этого она связана с точками, которые одинаково удалены от обеих сторон угла, и ведёт к инцентру.

Высоты

Высота выходит из вершины и образует прямой угол со стороной или её продолжением. Пересечение высот даёт ортоцентр, который особенно удобно искать по рисунку.



Точки как пересечения трёх линий

Каждый центр возникает как общая точка трёх одинаковых линий.



Центроид: точка равновесия

1 Определение

Центроид — это точка пересечения всех медиан треугольника. Его часто называют точкой равновесия, потому что он показывает, где фигуру можно мысленно уравновесить.

2 Главное свойство

На каждой медиане центроид делит отрезок так, что расстояние от вершины до него вдвое больше, чем от него до середины стороны. Это отношение 2:1 устойчиво для любого треугольника.

3 Практическая польза

Благодаря этому центроид удобно использовать в задачах, где нужно быстро сравнить отрезки, найти неизвестную часть медианы или проверить правильность построения на чертеже.

Построение центроида

● Две медианы

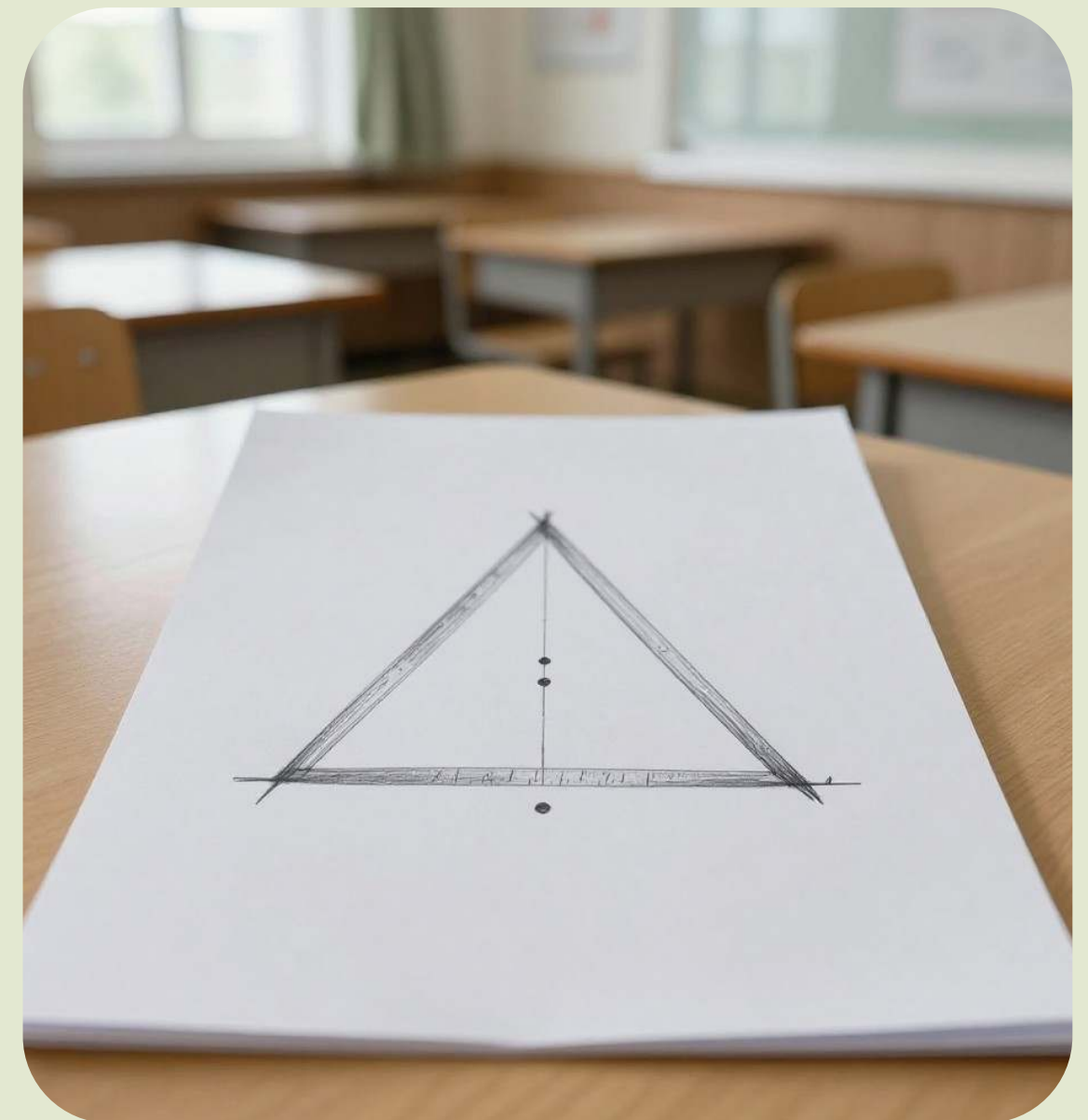
Сначала находят середину одной стороны и проводят медиану из противоположной вершины. Затем делают то же самое для второй стороны: пересечение двух медиан уже даёт центроид.

● Удобный алгоритм

Чтобы построить точнее, сначала отмечают середины сторон, а потом соединяют их с противоположными вершинами. Такой порядок удобен и хорошо читается на геометрическом рисунке.

● Проверка построения

Третья медиана нужна как проверка. Она обязательно проходит через ту же точку, поэтому построение становится надёжным и помогает избежать ошибки при черчении.



Инцентр и вписанная окружность

01

Где находится инцентр

Инцентр — это точка пересечения биссектрис треугольника. Он всегда находится внутри фигуры и служит центром окружности, касающейся всех трёх сторон.

02

Равные расстояния

От инцентра до каждой стороны можно провести одинаковый перпендикулярный отрезок. Именно это равенство расстояний делает возможной вписанную окружность с одним и тем же радиусом.

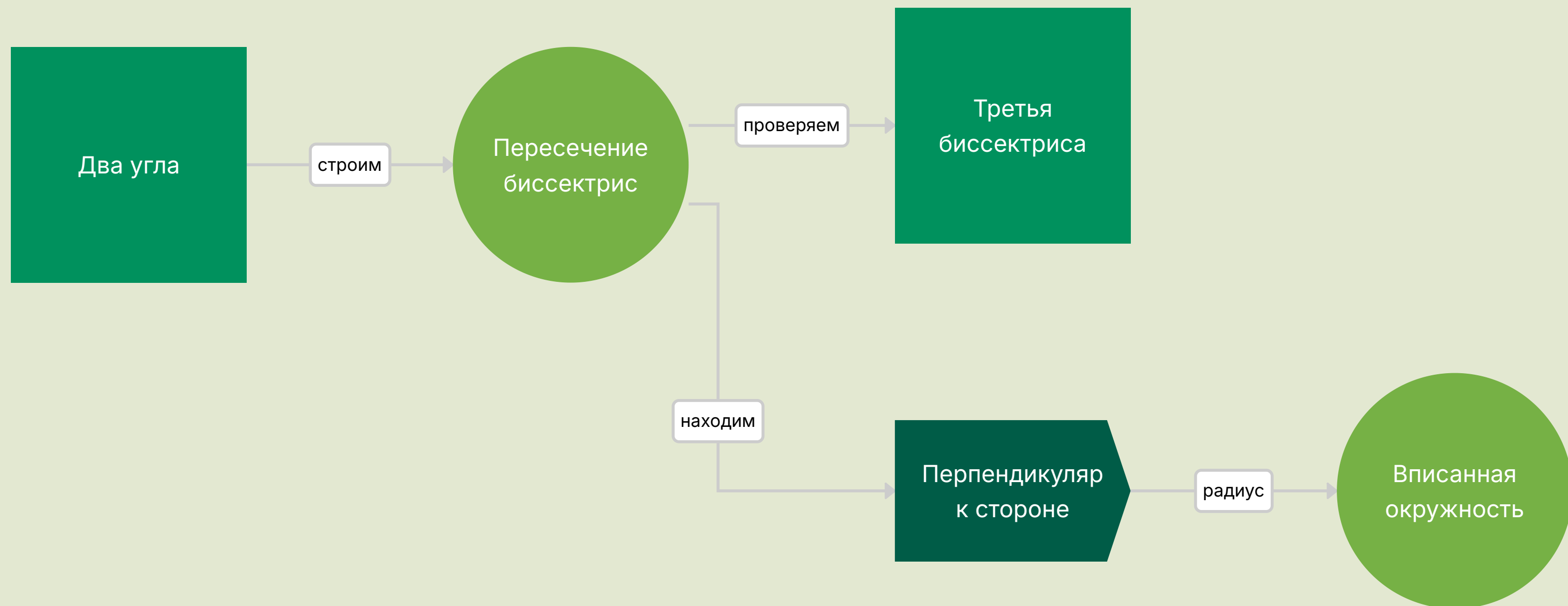
03

Особый случай

Если треугольник прямоугольный, инцентр всё равно лежит внутри него. При этом его положение удобно искать по биссектрисам острых углов.

Построение инцентра и окружности

Построение начинается с двух биссектрис и завершается окружностью.



Как тип треугольника меняет центры

1 Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике все основные центры совпадают в одной точке. Симметрия настолько сильная, что медианы, биссектрисы, перпендикуляры и высоты становятся одними и теми же линиями.

2 Равнобедренный треугольник

В равнобедренном треугольнике важна ось симметрии. На ней лежат центроид, инцентр, центр описанной окружности и ортоцентр, поэтому многие задачи решаются быстрее, чем в общем случае.

3 Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике особенно заметен центр описанной окружности: он находится в середине гипотенузы. Это удобно запомнить, потому что гипотенуза играет главную роль в построении.

Серединные перпендикуляры и центр O



Что он показывает

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны под прямым углом. Он не обязан пересекать саму сторону в особой точке, но всегда задаёт все точки, равноудалённые от её концов.



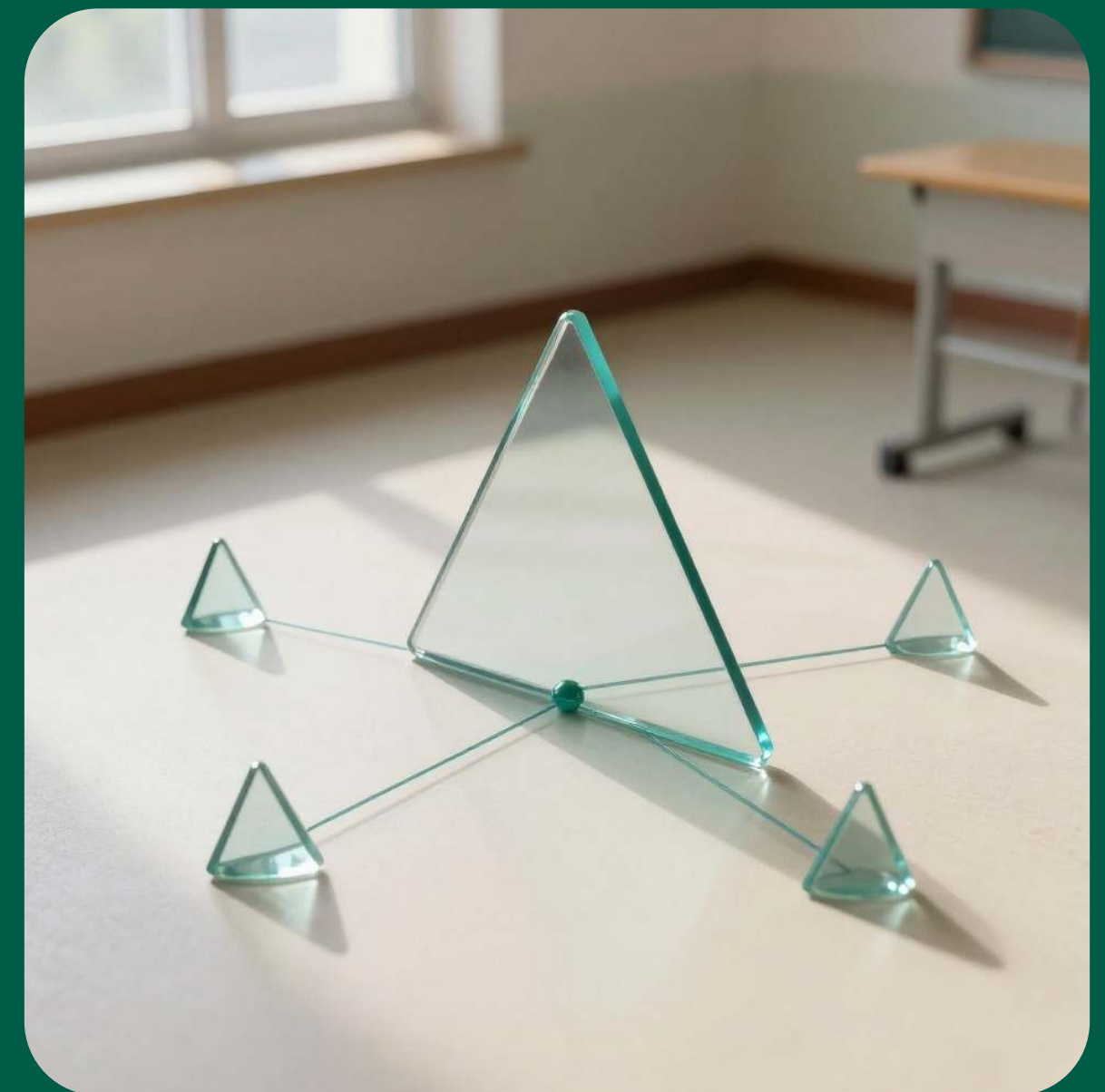
Как использовать

Если построить O и взять расстояние до любой вершины, получится радиус описанной окружности. Третья сторона подтверждает построение: её серединный перпендикуляр тоже проходит через ту же точку.



Почему это центр

Пересечение двух серединных перпендикуляров даёт точку O . От неё до трёх вершин треугольника расстояния одинаковы, поэтому через эти вершины можно провести одну общую окружность.



Описанная окружность: ключевое свойство

01

Одинаковые расстояния

Это точка, из которой до всех трёх вершин треугольника расстояния одинаковы. Поэтому она становится естественным центром окружности, проходящей через вершины фигуры.

02

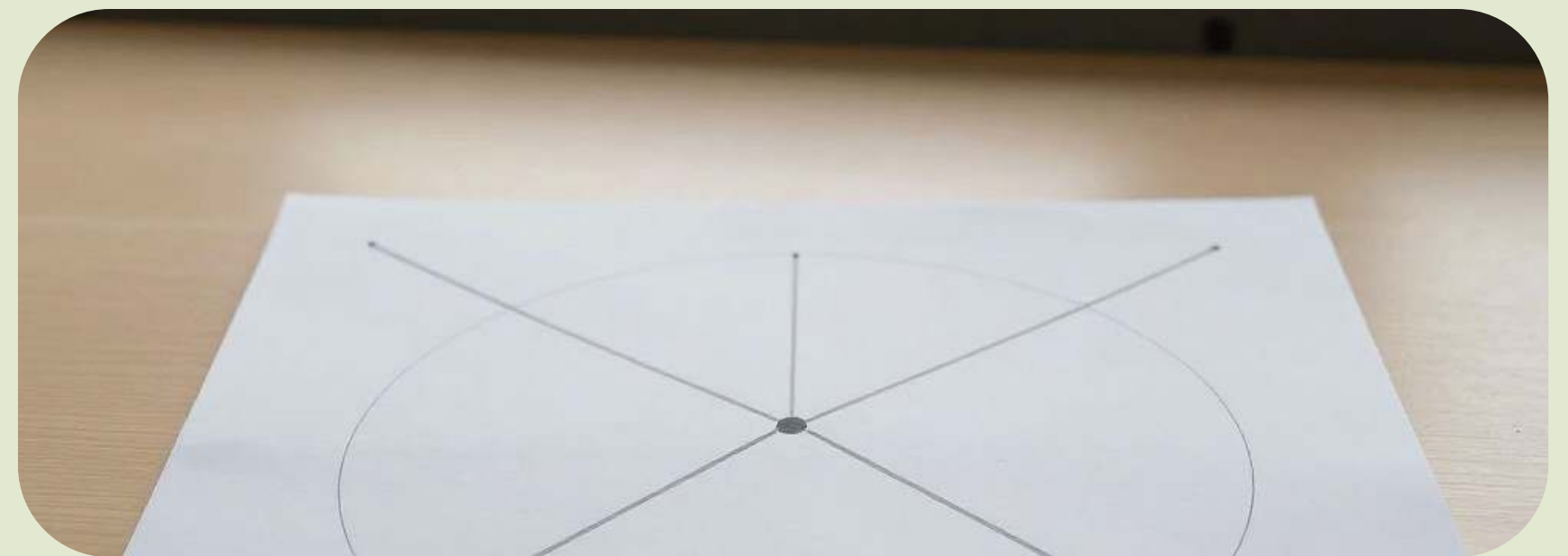
Как находят центр

Чтобы найти эту точку, достаточно провести два серединных перпендикуляра к сторонам. Их пересечение и будет центром описанной окружности, обычно обозначаемым буквой O .

03

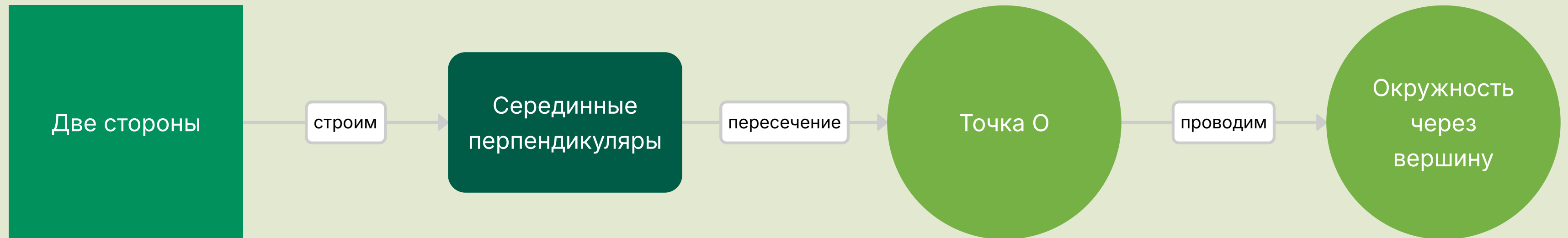
Связь с окружностью

Зная центр O , можно построить окружность через одну вершину треугольника. Если построение выполнено верно, она обязательно пройдёт и через две остальные вершины.



Построение описанной окружности

Последовательность построения по двум сторонам треугольника



Ортоцентр и высоты

● Что такое высота

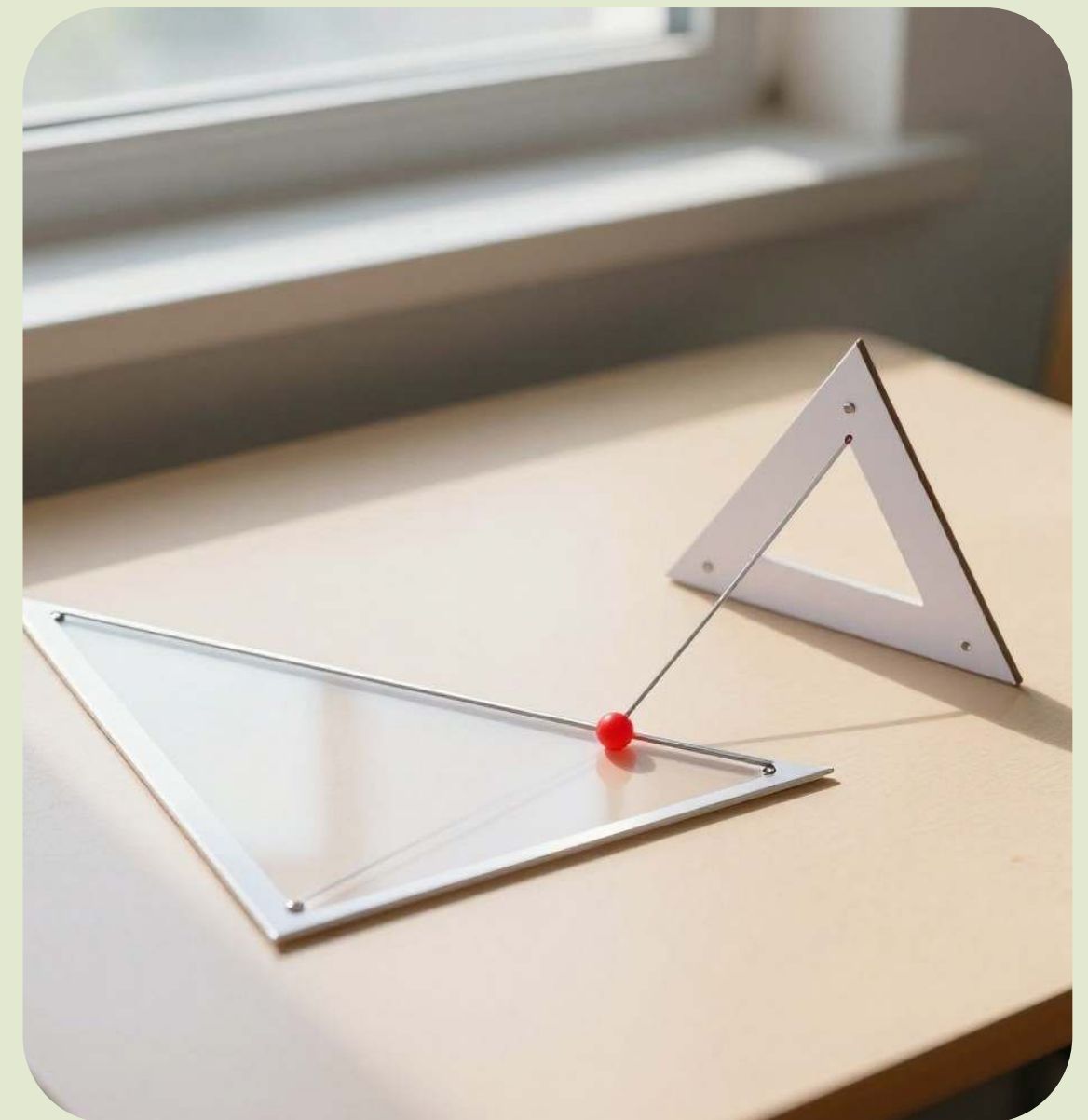
Высоты нужны там, где важно получить прямой угол. Каждая высота выходит из вершины и опускается на противоположную сторону или её продолжение, поэтому она всегда перпендикулярна основанию.

● Прямоугольный случай

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами. Поэтому ортоцентр сразу находится в вершине прямого угла, что заметно упрощает построение.

● Где они пересекаются

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется ортоцентром и особенно заметна в задачах, где фигурируют перпендикуляры и прямые углы.



Построение ортоцентра

1

Первая и вторая высоты

Сначала выбирают две вершины треугольника и проводят из них высоты к противоположным сторонам или их продолжениям. Уже на этом шаге видно направление будущего пересечения.

2

Находим пересечение

Точка пересечения двух высот задаёт ортоцентр. Если построение выполнено аккуратно, третья высота тоже проходит через эту же точку, подтверждая результат.

3

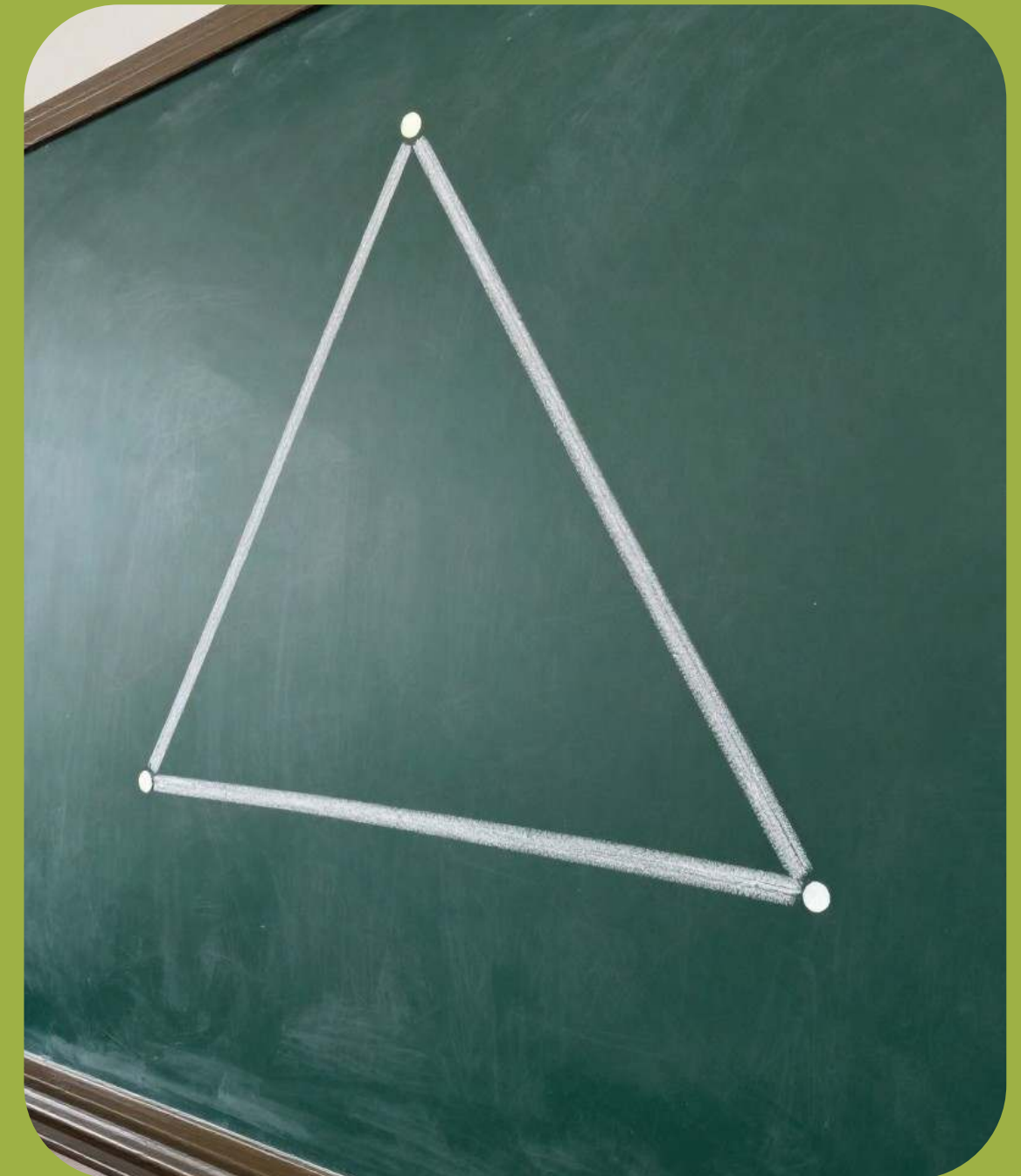
Учитываем продолжения сторон

В тупоугольном треугольнике одна или две высоты могут падать не на саму сторону, а на её продолжение. Это нормальная ситуация и не мешает построению.

4

Проверяем ответ

После нахождения ортоцентра полезно проверить его положение на рисунке. В разных треугольниках он может лежать внутри, на вершине или вне фигуры.



Мини-справочник: что такое высота

Линия	Свойство	Даёт центр
Высота	Перпендикуляр	Ортоцентр
Медиана	К середине	Центроид
Биссектриса	Делит угол	Инцентр

По свойству линии можно быстро понять, какую замечательную точку нужно искать в задаче.

Короткая памятка помогает не путать основные линии треугольника. У каждой из них своя задача: деление стороны, деление угла или построение перпендикуляра.

Основные определения из темы «Замечательные точки в треугольнике»

Линия Эйлера

01

Три связанные точки

Центроид, центр описанной окружности и ортоцентр часто рассматривают вместе, потому что они связаны одной прямой. Эта прямая помогает увидеть внутреннюю логику треугольника.

02

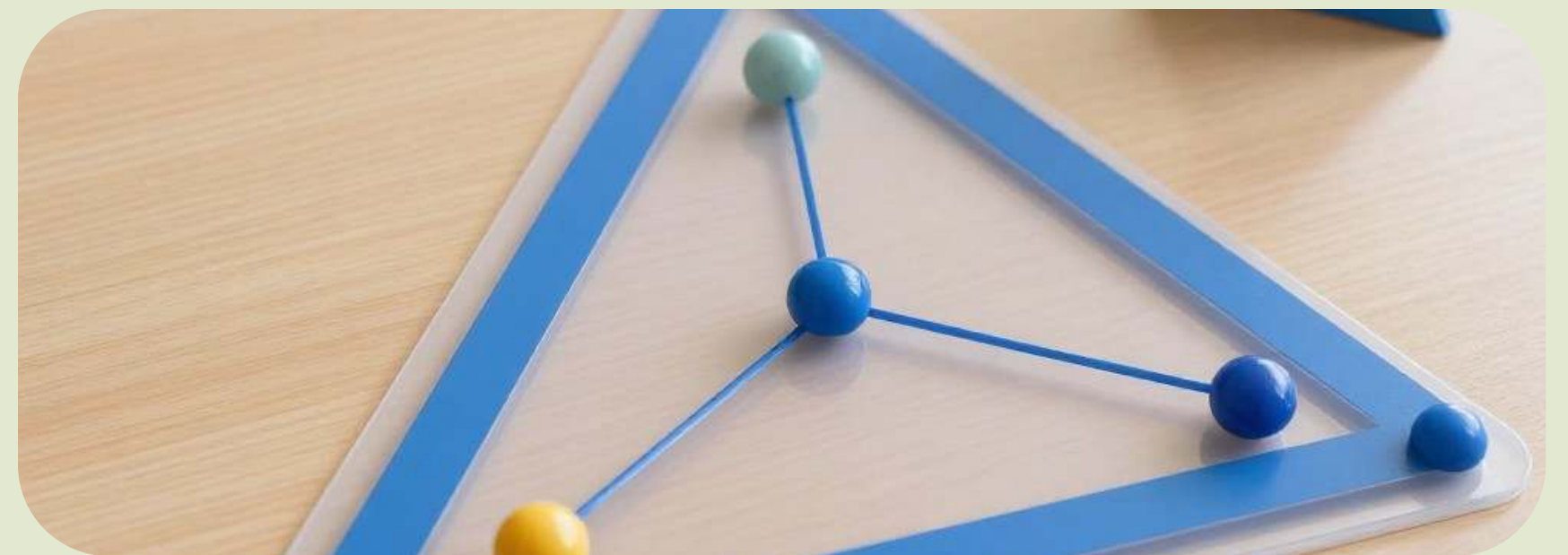
Зачем она нужна

Линия Эйлера особенно полезна на чертеже: если две из трёх точек уже найдены, третью часто легче проверить по их взаимному расположению.

03

Исключение

В равностороннем треугольнике линия Эйлера теряет привычный вид, потому что все три точки совпадают в одной точке. Тогда отдельная прямая просто не выделяется.



Особые случаи треугольников



Равносторонний треугольник

В равностороннем треугольнике симметрия максимальна: центроид, инцентр, центр описанной окружности и ортоцентр совпадают. Одна точка сразу выполняет несколько ролей.



Прямоугольный треугольник

В прямоугольном треугольнике особенно важна гипотенуза. Её середина даёт центр описанной окружности, а вершина прямого угла сразу подсказывает ортоцентр.



Равнобедренный треугольник

В равнобедренном треугольнике ось симметрии помогает строить центры быстрее. Часто достаточно найти середину основания или провести одну ключевую линию.



Обычный случай

Если треугольник не имеет симметрии, приходится опираться на определения линий. Тогда внимательное чтение условия становится главным инструментом решения.



Как выбрать нужную точку по условию

Выбор точки по ключевым словам в условии задачи



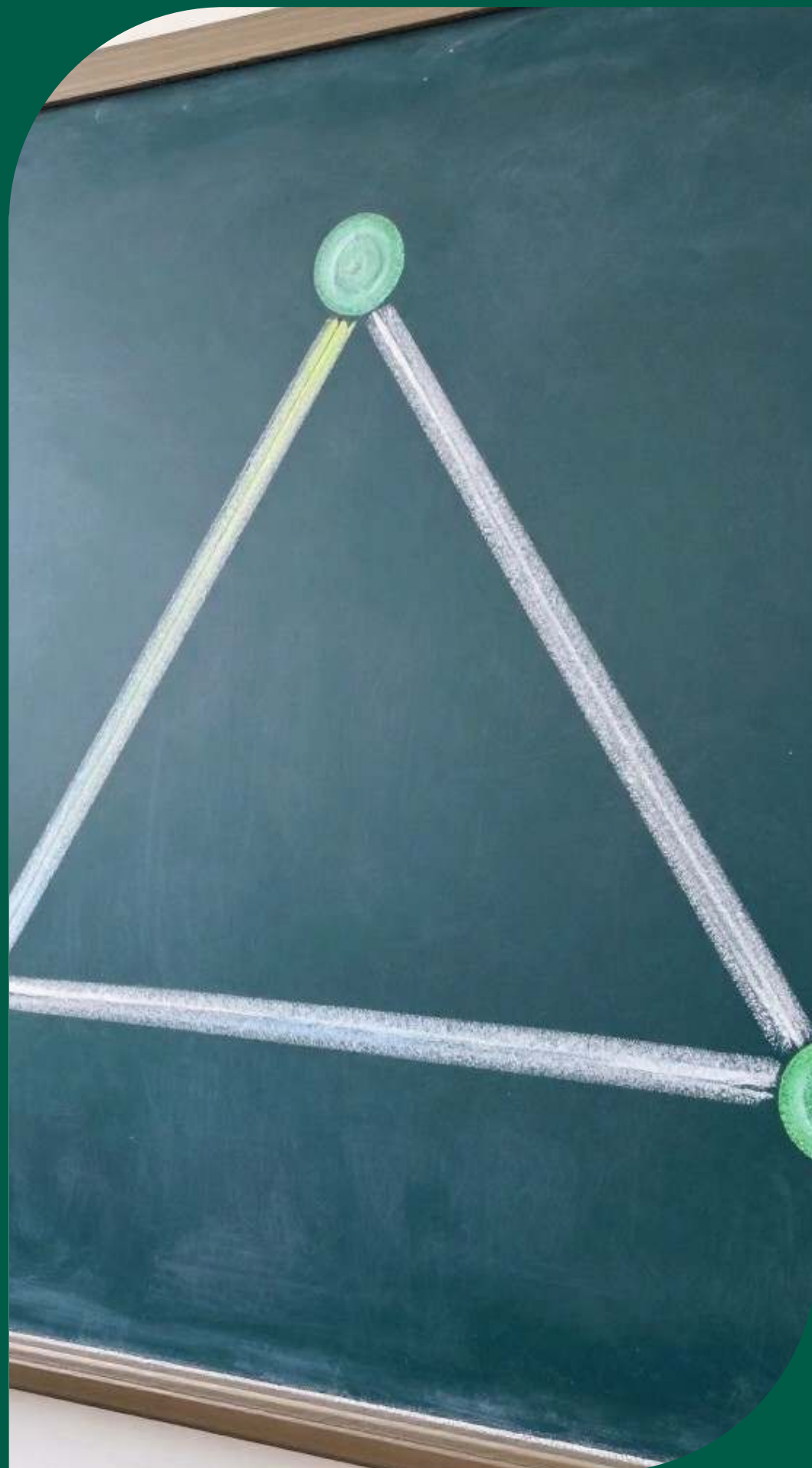
Тренировка: четыре типа задач

Ниже показаны типовые задания, где нужно распознать нужную точку по описанию построения. Такие упражнения помогают запомнить признаки каждой линии.

Типовые признаки замечательных точек треугольника

Задание	Ищем
Три медианы	Центроид
Три биссектрисы	Инцентр
Серединные перпендикуляры	Центр О
Две высоты	Ортоцентр

Если помнить, какие линии пересекаются в одной точке, можно быстро определять центр без вычислений.



Главное, что стоит запомнить

Замечательные точки показывают, как из простых линий рождаются важные свойства треугольника. Если помнить, какая линия за что отвечает, рисунок становится понятным, а задачи решаются быстрее и увереннее.