

График кубической функции: основные свойства и примеры

Поймём, как выглядит S-образный график
и что говорят его коэффициенты.





Зачем изучать кубическую функцию в 7 классе

Кубическая функция помогает увидеть, что графики бывают не только прямыми или «чашами». На простых примерах удобно сравнивать форму кривой, роль коэффициентов и точки пересечения с осями координат.

Общий вид кубической функции и значение коэффициентов

1

Запись функции

Кубическая функция записывается как $y=ax^3+bx^2+cx+d$, где a , b , c и d — числа. Такая запись показывает, какие части формируют график и как они связаны между собой.

2

Роль коэффициента a

Коэффициент a задаёт основное направление кривой и её крутизну. Именно он сильнее всего влияет на общий вид графика и помогает понять, будет ли ветвь подниматься или опускаться.

3

Значение коэффициента d

Число d определяет, где график пересекает ось Oy . Если подставить $x=0$, получится $y=d$, значит, эта точка сразу видна без построения всей кривой.

4

Влияние b и c

Коэффициенты b и c меняют положение и изгиб графика. Из-за них кривая отличается от простого графика $y=x^3$ и может смещаться, оставаясь кубической по форме.

Базовый пример: график функции $y=x^3$

Точки на графике

График $y=x^3$ проходит через точки $(-2; -8)$, $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 8)$. По ним удобно увидеть, как быстро растут значения при удалении от нуля.

Симметрия

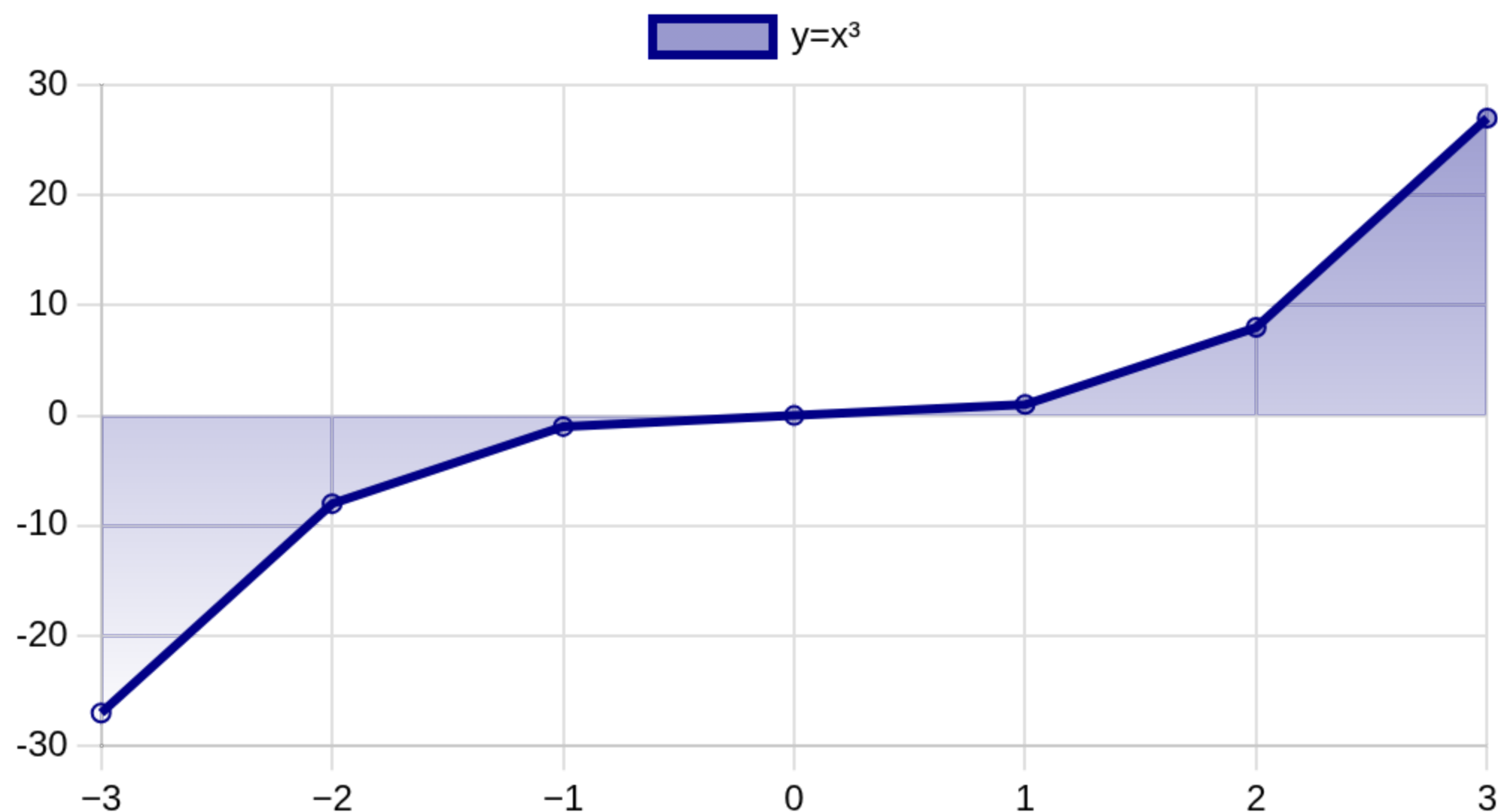
Если точка $(x; y)$ принадлежит графику, то точка $(-x; -y)$ тоже ему принадлежит. Поэтому кривая выглядит одинаково по обе стороны от начала координат.

Форма кривой

График имеет плавную S-образную форму. Он не состоит из прямых отрезков и не похож на параболу, поэтому важно узнавать его по характерному изгибу.



Таблица значений функции $y=x^3$



Чем дальше точка от нуля, тем быстрее увеличивается модуль значения. Это помогает понять, почему график становится всё круче по мере удаления от центра.

Значения меняют знак при переходе через ноль, а сама зависимость явно нелинейна.

Таблица значений, вычисленная для функции $y=x^3$

Симметрия кубической функции



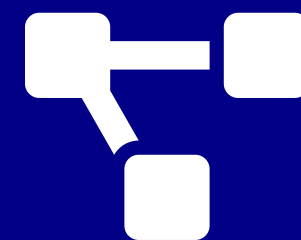
Противоположные значения

Для числа x и для числа $-x$ значения функции имеют противоположные знаки. Это главный признак нечётной функции и удобная подсказка при построении графика по точкам.



Центральная симметрия

Если отметить одну точку на графике, то вторая появится на таком же расстоянии по другую сторону от начала координат. Благодаря этому кривая легко достраивается целиком.

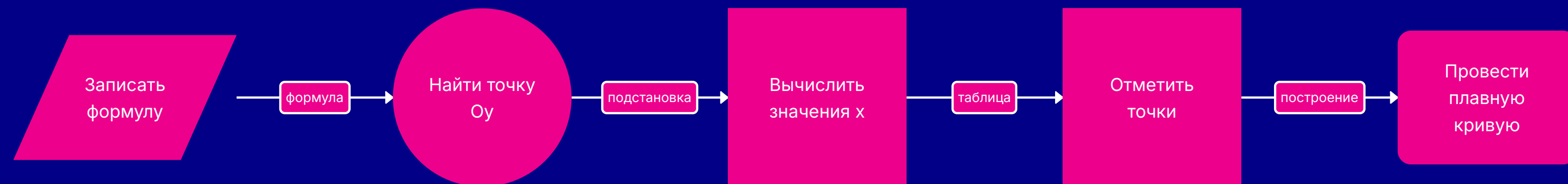


Построение по половине

Достаточно вычислить несколько точек с одной стороны от нуля, а затем зеркально перенести их. Так построение получается быстрее и аккуратнее даже без большого числа вычислений.

Построение графика кубической функции по точкам

Последовательность шагов при работе с формулой и таблицей значений



2

возможны два противоположных направления
графика в зависимости от знака коэффициента

Коэффициент a определяет, куда «смотрит»
кубическая кривая: вверх вправо или вниз вправо.
Его модуль также меняет крутизну графика.

Свойства графика функции $y=ax^3$ при $a \neq 0$

Сдвиги графика вверх, вниз и в стороны

Сдвиг по оси Oy

Коэффициент d отвечает за вертикальное смещение графика. Если d больше нуля, кривая поднимается вверх, а если меньше нуля — опускается вниз.

Изменение положения перегиба

Коэффициенты b и c могут менять место, где график изгибается. Из-за этого кривая уже не совпадает со стандартным видом $y=x^3$, хотя остаётся кубической.

Сравнение с образцом

Чтобы понять, как сместился график, удобно сначала представить базовую кривую $y=x^3$. Тогда легче заметить, что изменилось: высота, наклон или положение изгиба.

Сравнение нескольких кубических функций

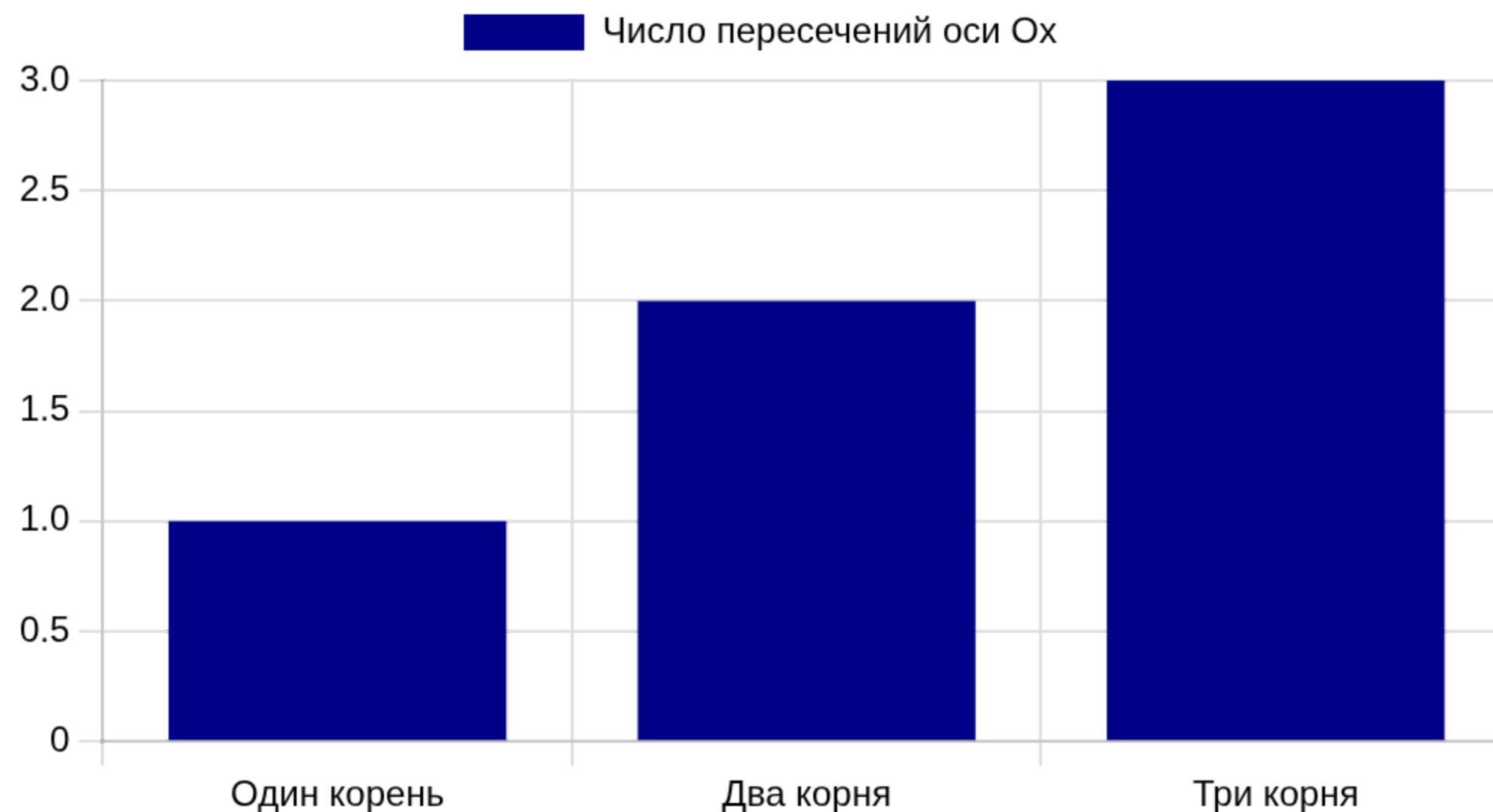
Функция	Oy	Направление	Корни
$y=x^3$	(0; 0)	вверх	1
$y=x^3-2$	(0; -2)	вверх	1
$y=-x^3$	(0; 0)	вниз	1
$y=2x^3-x$	(0; 0)	вверх	неск.

Сравним, как меняются пересечение с Oy, направление графика и число корней у разных формул.

Знак и коэффициенты меняют положение графика, но пересечение с Oх не всегда одно: число корней зависит от формы кривой.

Сравнение по формулам функций

Сколько корней может иметь кубическая функция



На графике видно, что число действительных корней связано с тем, сколько раз кривая пересекает ось Ох.

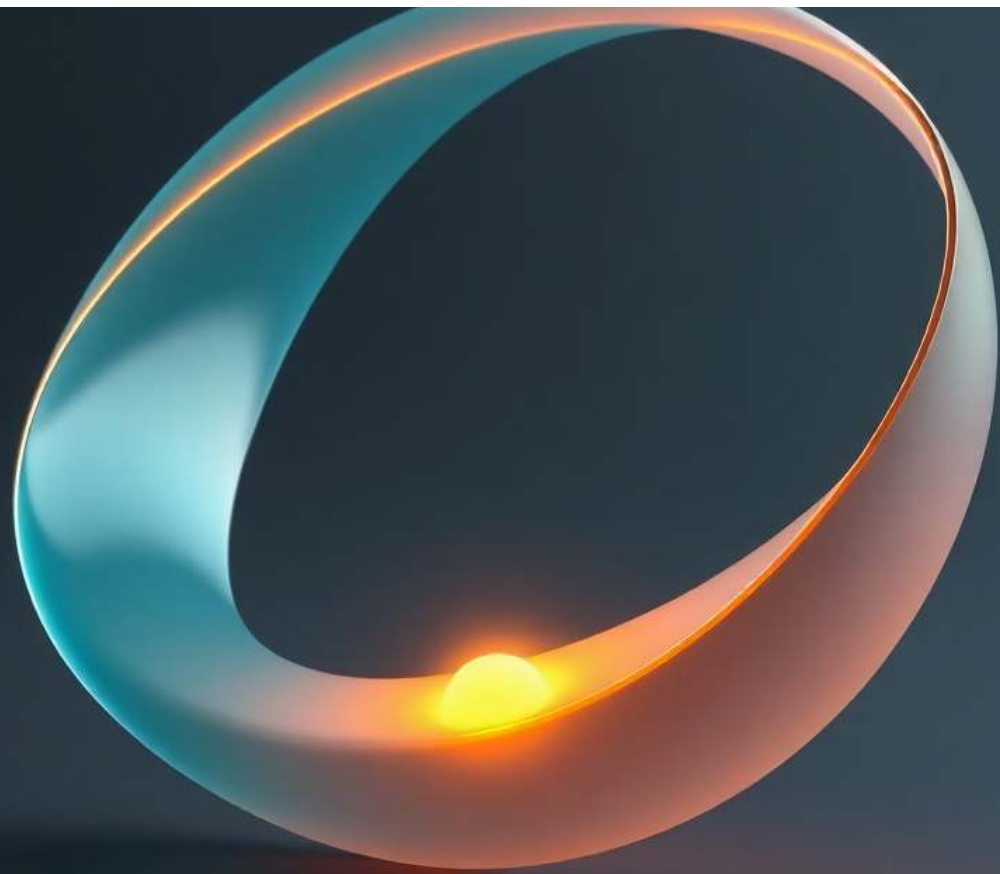
Кубическая функция может иметь 1, 2 или 3 действительных корня; ответ зависит от формы графика и его положения относительно оси Ох.

Учебные примеры кубических функций; данные иллюстративные.

Точка перегиба и изменение изгиба графика

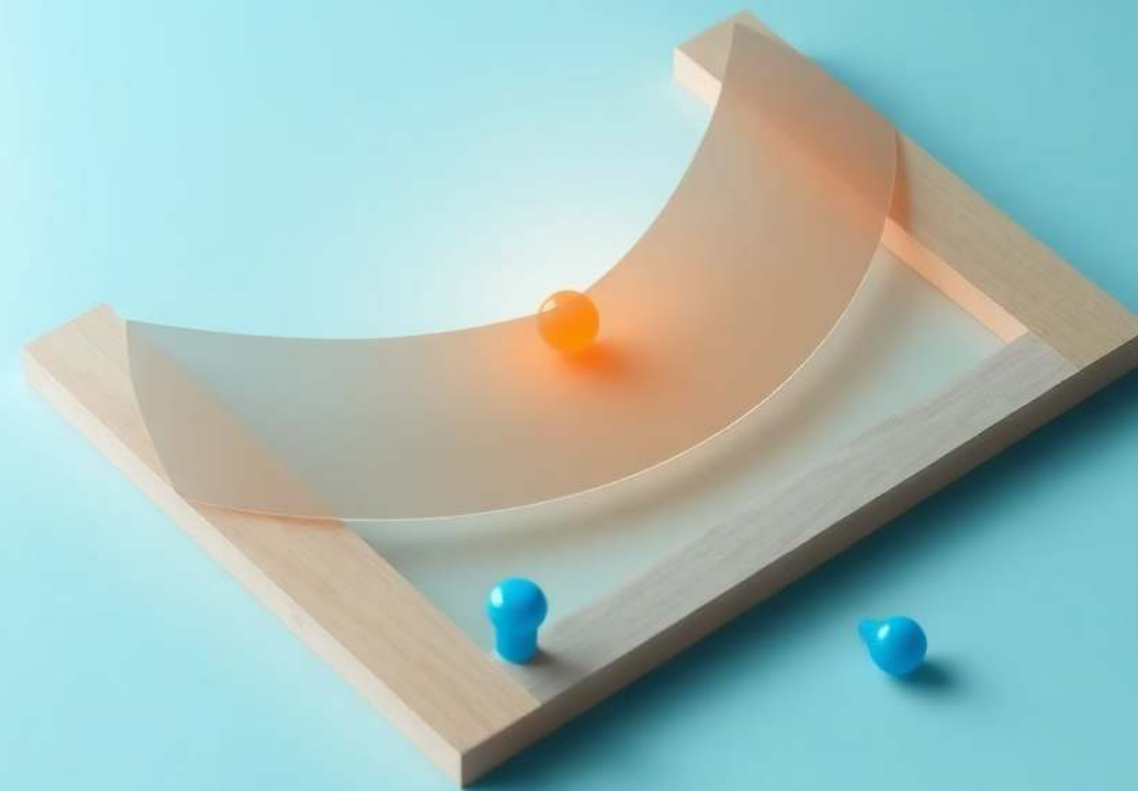
Место, где кривая «переключается»

У кубического графика есть особая точка, в которой он меняет направление изгиба. До неё линия может изгибаться одним способом, а после неё — другим. Именно поэтому S-образная кривая выглядит живой и не похожа на обычную параболу.



Почему это важно при построении

Для функции $y=x^3$ точка перегиба находится в начале координат, и это удобно запомнить. Если отметить её на рисунке, легче понять общий вид графика и правильно провести плавную линию через остальные точки без резких изломов.



Пересечение графика с осями координат

1

Ось Oy

Чтобы найти пересечение с осью Oy, подставляют $x=0$. Тогда значение функции равно d , и точка пересечения имеет вид $(0; d)$.

2

Ось Ox

Пересечения с осью Ox получают из уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Решения этого уравнения показывают, где график касается или пересекает ось.

3

Сколько может быть корней

У кубической функции бывает одно, два или три пересечения с осью Ox. Поэтому число действительных корней может меняться в зависимости от коэффициентов и формы графика.

4

Что делать на практике

Сначала находят точки пересечения с осями, а затем проверяют их по уравнению. Такой способ помогает быстро читать график и не пропустить ни одного корня.

Точки для построения графика $y=0,5x^3$

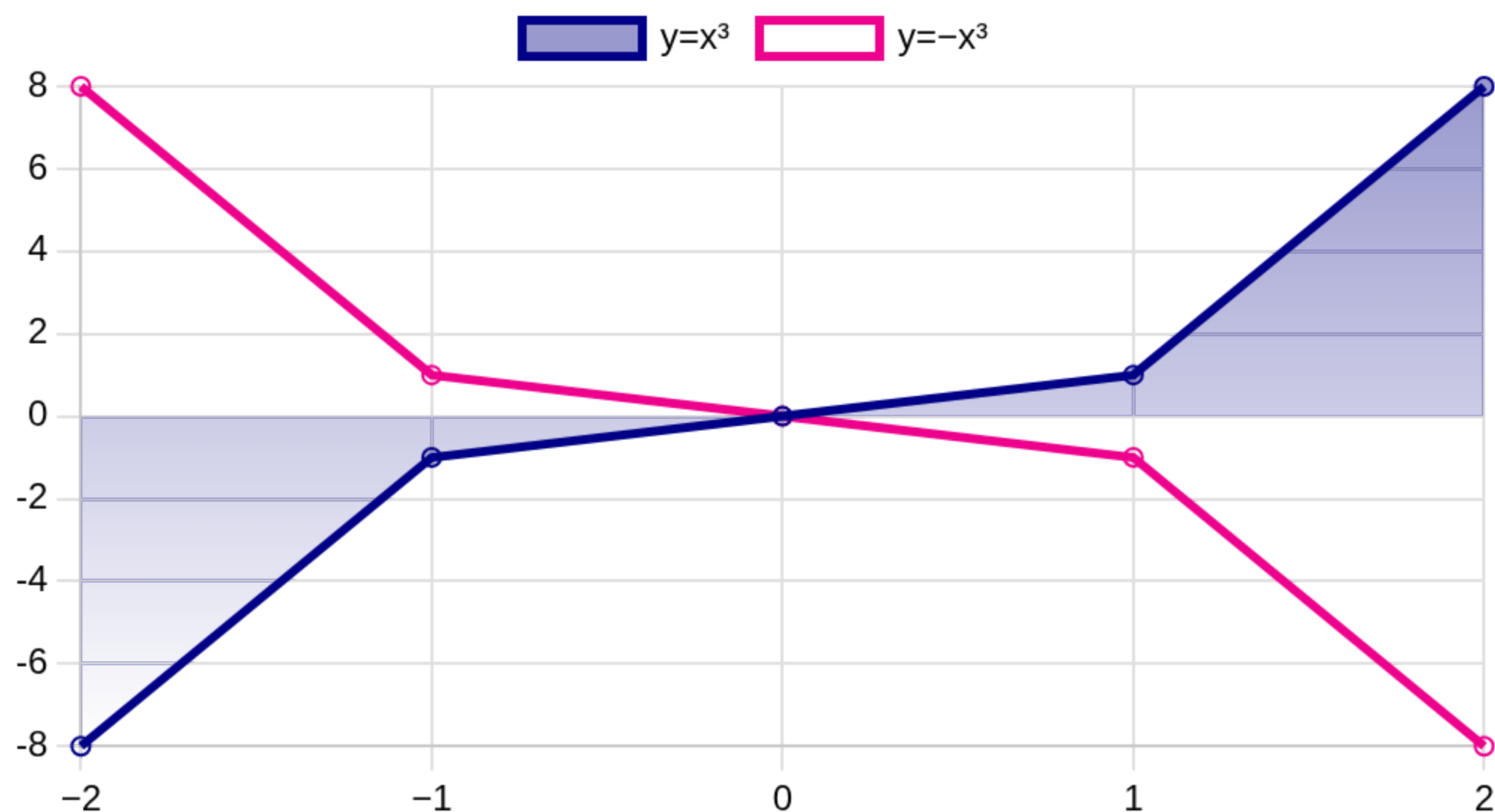
x	y
-3	-13,5
-2	-4
-1	-0,5
0	0
1	0,5
2	4
3	13,5

Значения функции растут медленнее, чем у $y=x^3$, поэтому график получается более пологим.

Меньший модуль коэффициента а делает кубическую кривую шире и менее крутой; это хорошо видно по медленному росту значений.

Вычисления по формуле $y=0,5x^3$

Сравнение графиков $y=x^3$ и $y=-x^3$



Обе кривые проходят через начало координат, но одна растёт, а другая убывает. Это хорошо показывает роль знака коэффициента a .

Графики имеют одинаковую форму, но противоположное направление: положительный коэффициент a меняет ход кривой снизу вверх, отрицательный — сверху вниз.

Учебные значения функции для $x=-2, -1, 0, 1, 2$

Типичные ошибки при работе с кубической функцией



Путают с параболой

Кубический график часто принимают за параболу, хотя его форма S-образная и имеет точку перегиба. Важно смотреть не только на плавность линии, но и на её общий ход.



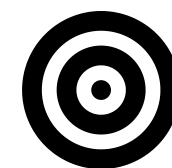
Не учитывают знак a

Знак коэффициента a меняет направление графика. Если его не заметить, можно ошибиться в чтении кривой и неправильно определить, куда она направлена на плоскости.



Забывают про d

Коэффициент d показывает, где график пересекает ось Oy . Если его пропустить, легко неверно указать точку на вертикальной оси и потерять важную опору для построения.

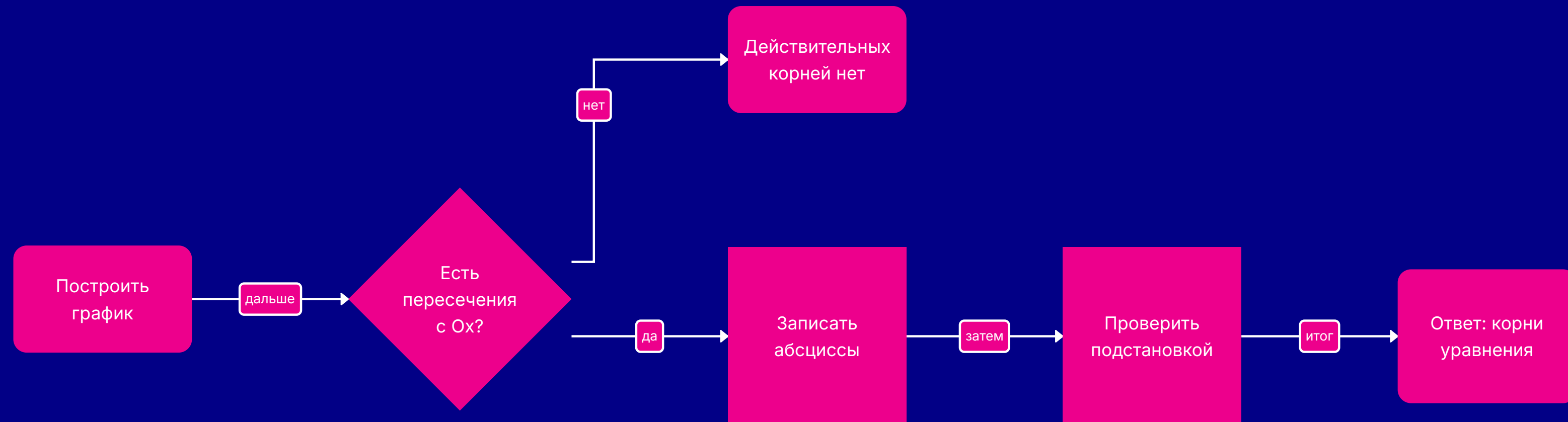


Ждут всегда три корня

У кубической функции не обязательно три действительных корня. Иногда пересечение с осью Ox только одно, и это зависит от расположения графика и его коэффициентов.

Как находить корни уравнения по графику

Последовательность действий при чтении графика кубической функции



Где встречаются кубические зависимости

Геометрия, где формула видна сразу

Самый простой пример — объём куба. Если ребро увеличивается, объём меняется по формуле $V=a^3$, поэтому зависимость получается кубической. На рисунке рядом можно показать сам куб и график, чтобы связать число с его наглядным образом.

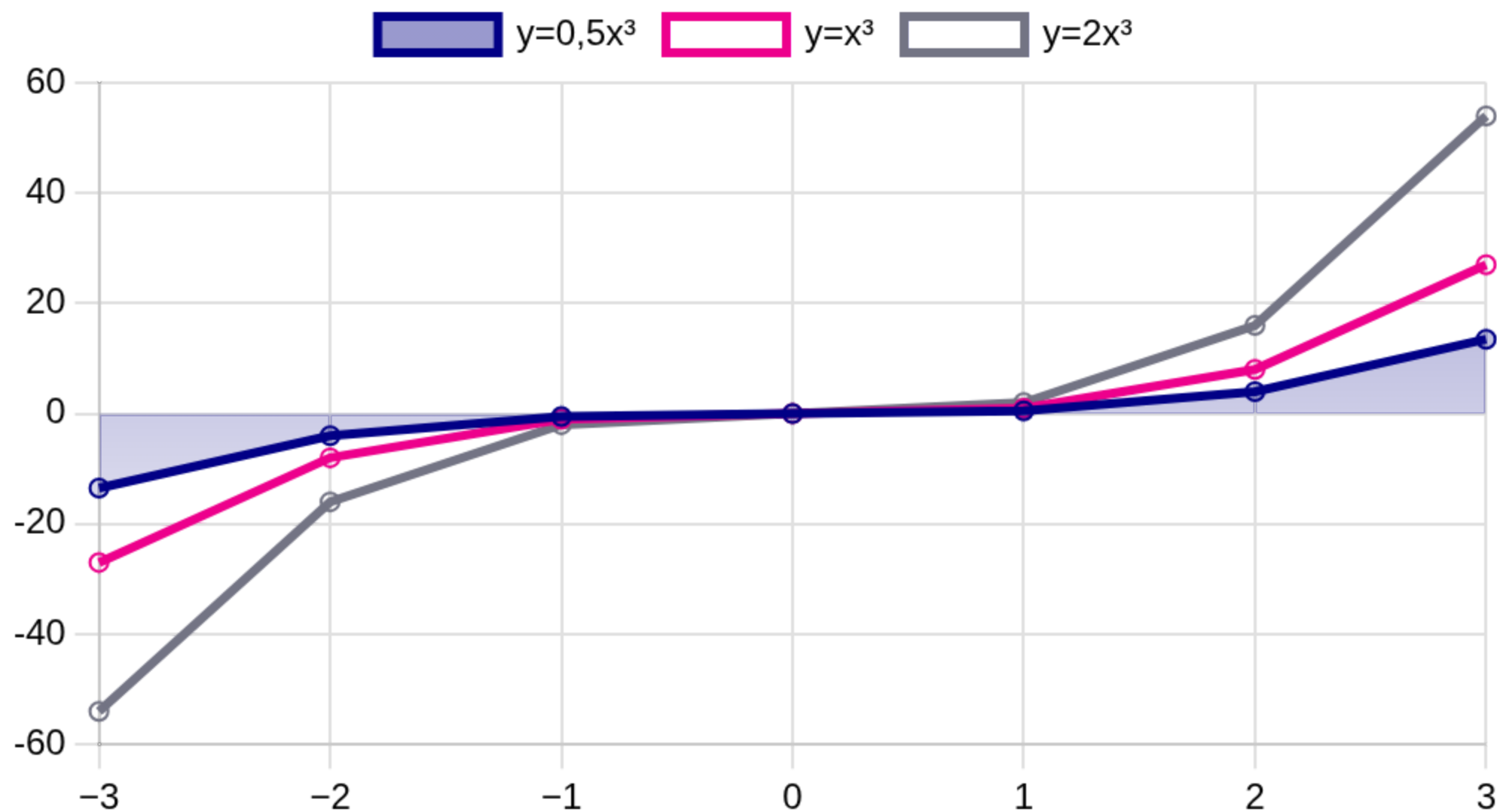


Когда рост идёт неравномерно

Кубические зависимости встречаются там, где величина сначала меняется медленно, а потом быстрее. Такие ситуации бывают в математике и физике. График помогает увидеть это изменение сразу, без длинных вычислений и сложных объяснений.



Как меняется график при разных значениях a



Все три графика проходят через начало координат, но расстояние между точками заметно меняется. Это помогает сравнить, как быстро растут значения функции.

Чем больше модуль a , тем график круче и уже; при меньшем модуле он становится шире и положе.

Вычисления по формулам $y=0,5x^3$, $y=x^3$, $y=2x^3$

Главные выводы о графике кубической функции

Кубический график легко узнать по S-образной форме и точке перегиба. Его вид задают коэффициенты, а пересечения с осью Ox помогают находить корни уравнений и сравнивать функции.