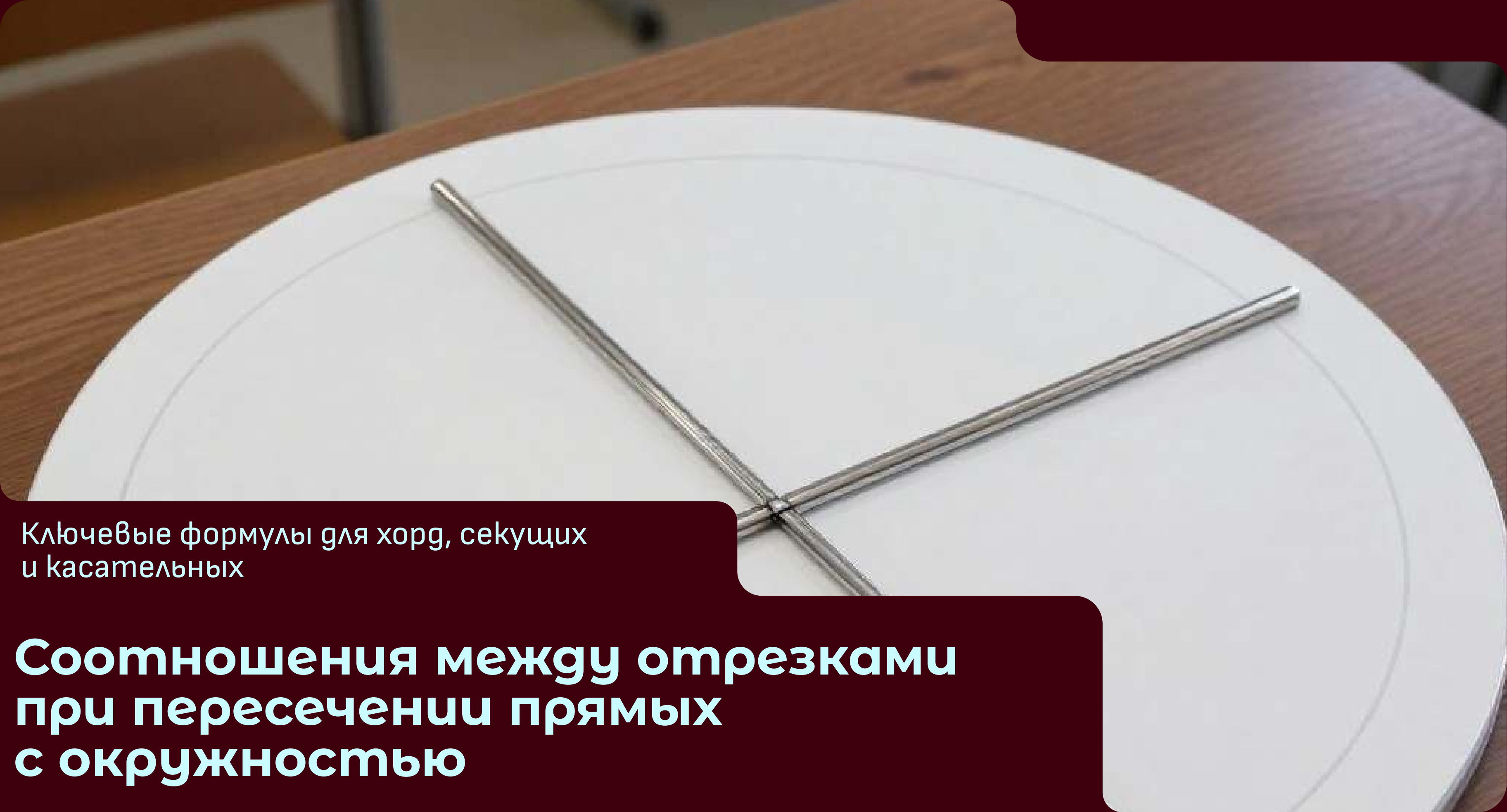


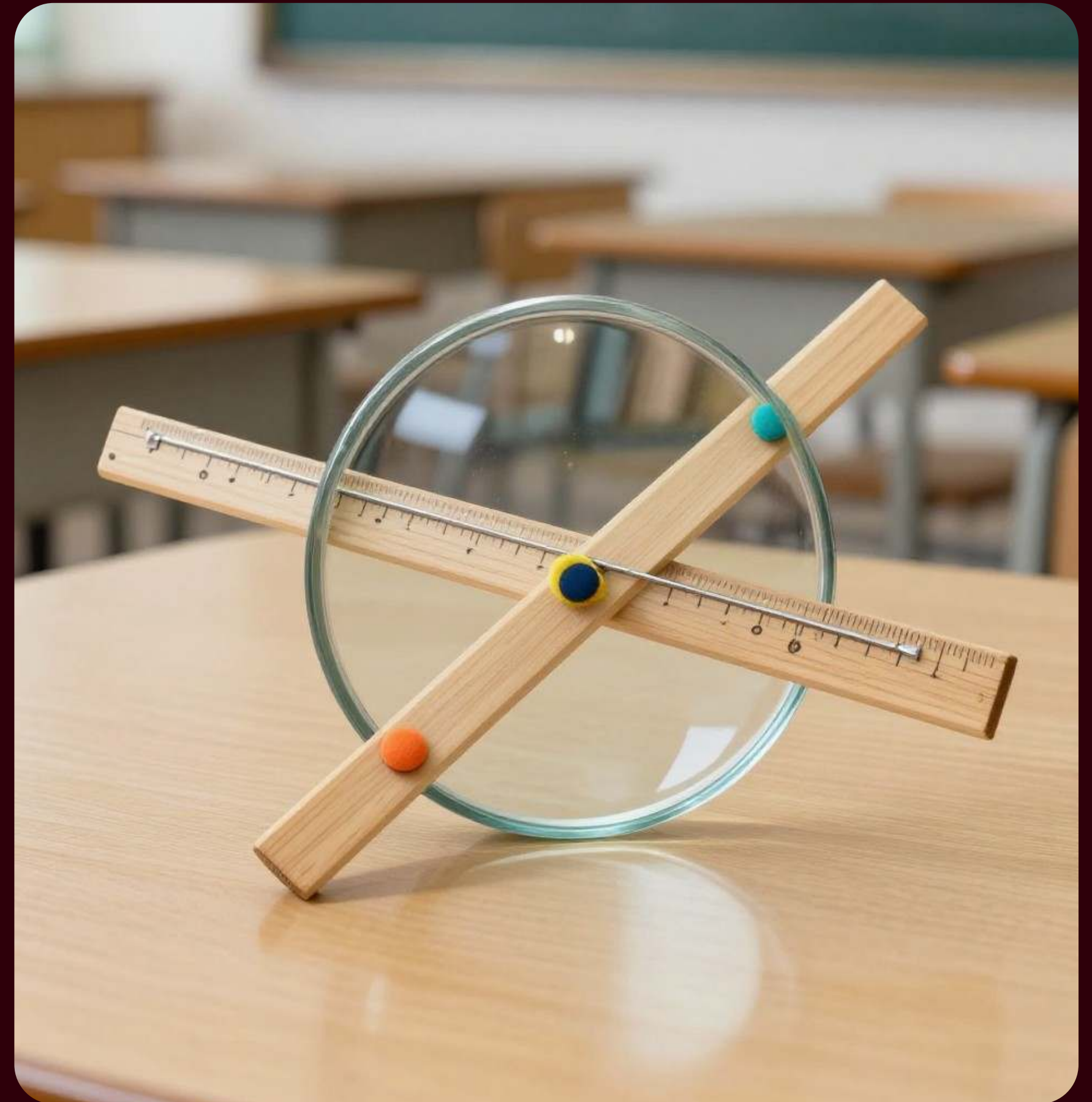


Ключевые формулы для хорд, секущих
и касательных

**Соотношения между отрезками
при пересечении прямых
с окружностью**

Зачем изучать эти соотношения

Эти правила помогают быстро находить длины на чертежах, доказывать равенства и связывать окружность с подобием треугольников и теоремой Пифагора.



Основные элементы окружности и прямой



01 Окружность и радиус

Окружность задаётся центром и радиусом. Любая точка окружности находится на одинаковом расстоянии от центра, а радиус соединяет центр с этой точкой.

02 Хорда и диаметр

Хорда соединяет две точки окружности. Если такая хорда проходит через центр, она называется диаметром и равна двум радиусам окружности.

03 Секущая

Секущая пересекает окружность в двух точках и делит её на два участка. Именно для таких линий часто применяют произведения отрезков.

04 Касательная

Касательная имеет с окружностью только одну общую точку. Она касается окружности в этой точке и образует особые соотношения с радиусом.

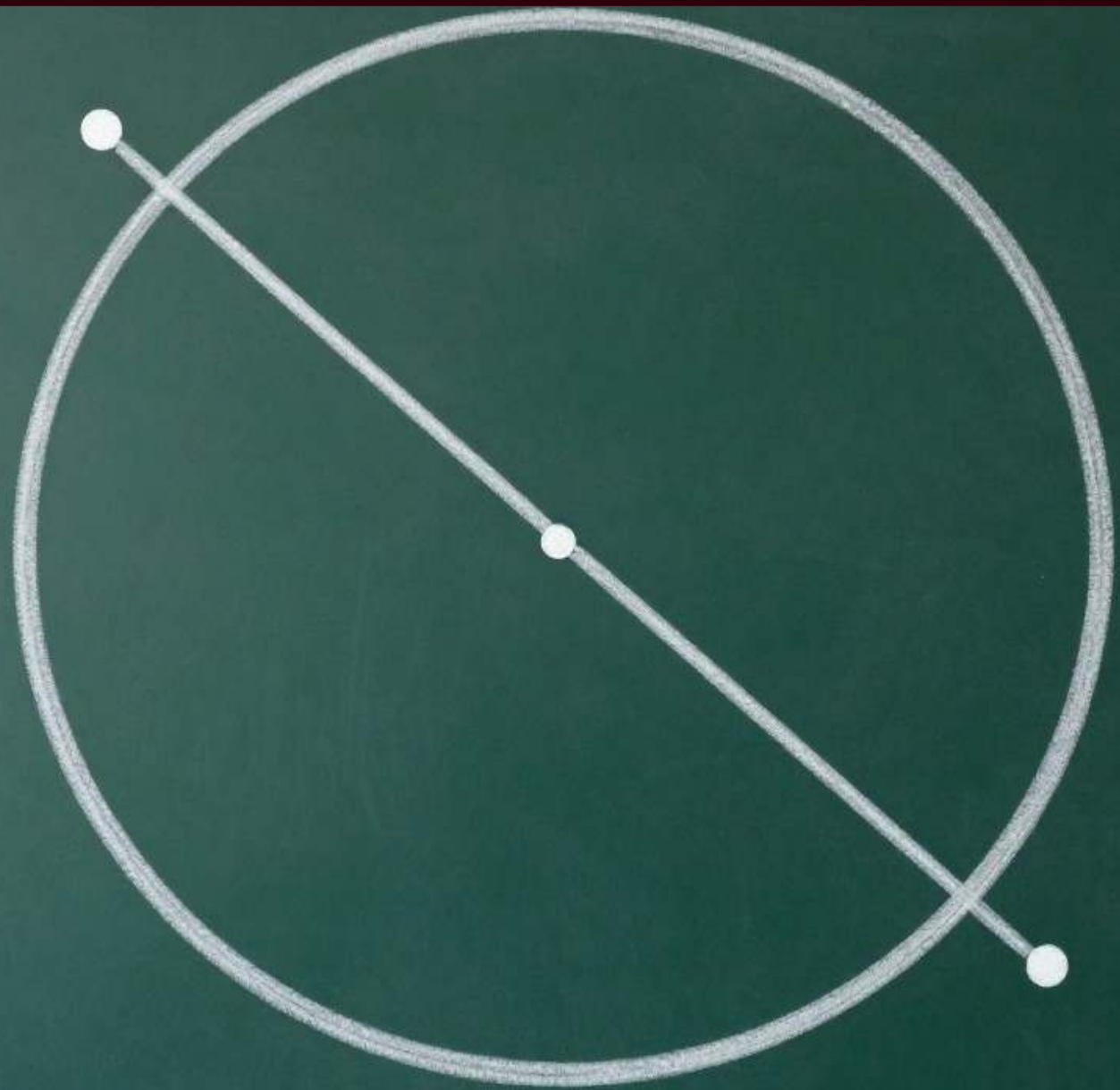
Какие случаи встречаются в задачах

Ситуация	Соотношение	Результат
Две хорды	Произведение	Неизвестная часть
Две секущие	Произведение	Искомый отрезок
Касательная и секущая	Квадрат касательной	Длина касательной
Две касательные	Равенство	Одинаковые отрезки

В таблице показано, как расположение прямой относительно окружности определяет нужную формулу и тип ответа.

Если точка находится внутри, чаще работают произведения; если вне окружности — секущие и касательные; для двух касательных используется равенство длин.

Свойство двух касательных из одной точки



Главное равенство

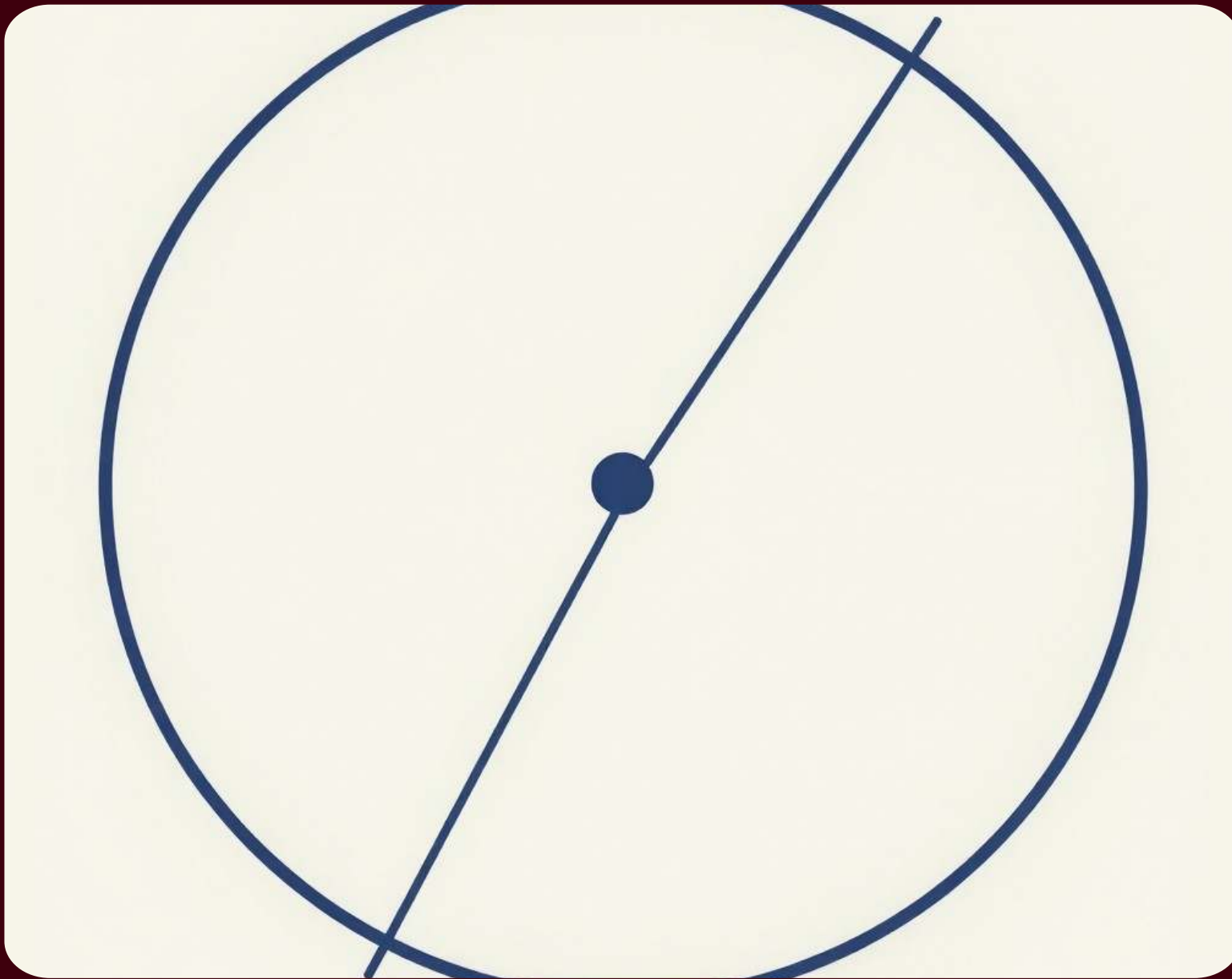
Если из одной внешней точки к окружности проведены две касательные, их отрезки до точек касания равны. Поэтому обычно записывают $PA = PB$.

Для вычислений

Это свойство позволяет быстро находить неизвестную длину, когда известен один из касательных отрезков. Формула не требует дополнительных построений.

Для доказательств

Равные касательные часто помогают показать симметрию рисунка и доказать равенство треугольников, связанных с окружностью и точкой вне её.



**Радиус,
проведённый
в точку касания**

- **Прямой угол**

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной. Значит, угол между ними равен 90° , и на чертеже это важно заметить сразу.

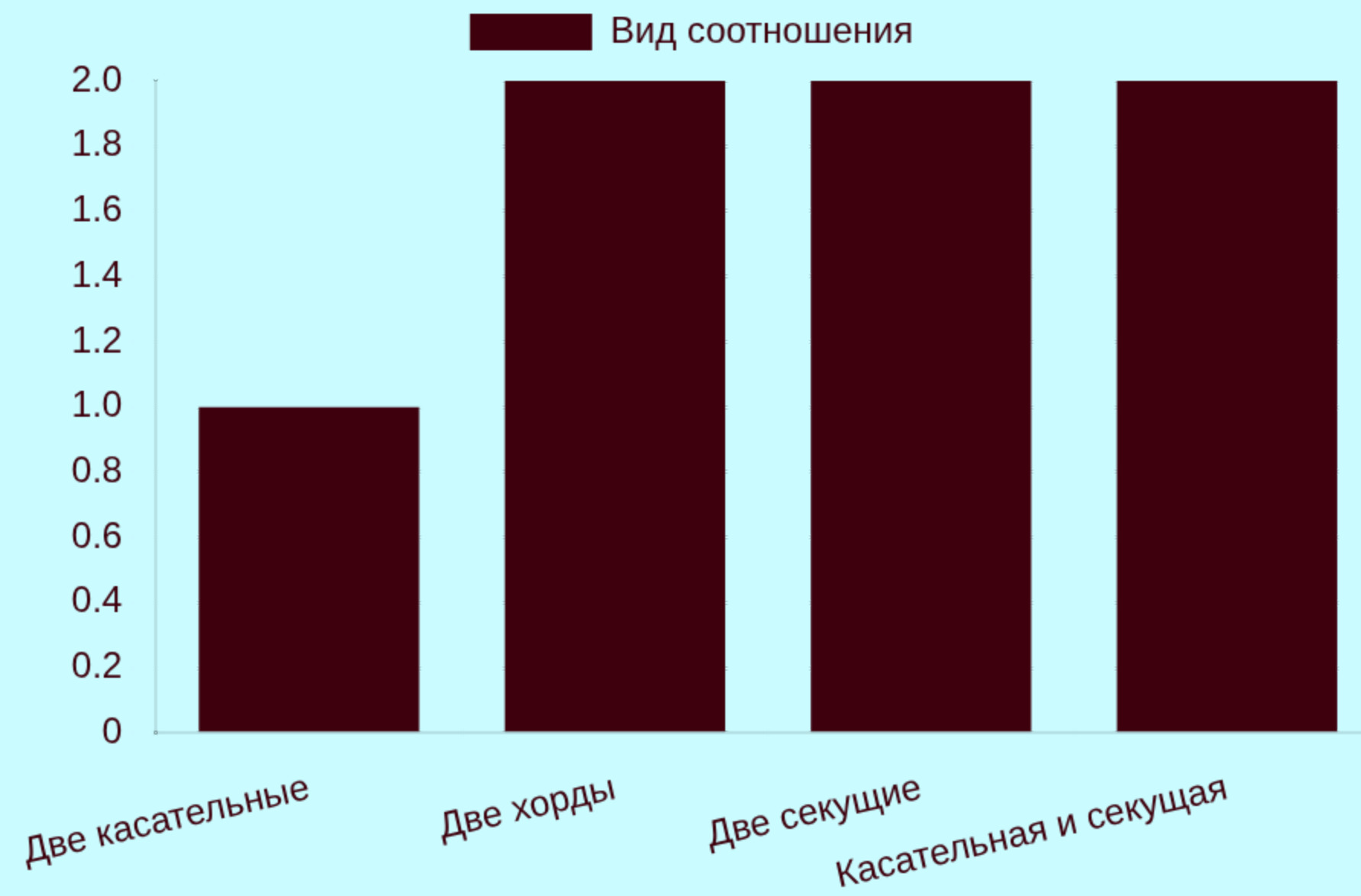
- **Признак прямоугольного треугольника**

Если в задаче есть радиус и касательная, можно искать прямоугольный треугольник. Тогда становится доступна теорема Пифагора и другие свойства прямого угла.

- **Как читать рисунок**

Обычно на схеме отмечают центр окружности, точку касания и маленький квадрат в месте пересечения. Это помогает не перепутать касательную с секущей.

Основные формулы темы в одном обзоре



На диаграмме видно, что тип формулы зависит от положения прямых: где-то сравнивают длины, а где-то — произведения отрезков.

У всех случаев одна идея: конфигурация на рисунке подсказывает, равенство длин использовать или равенство произведений.

Теорема о пересекающихся хордах

Ситуация на рисунке

01

Если хорды AB и CD пересекаются в точке M внутри окружности, эта точка делит каждую хорду на два отрезка. Именно их нужно перемножать.

Основная формула

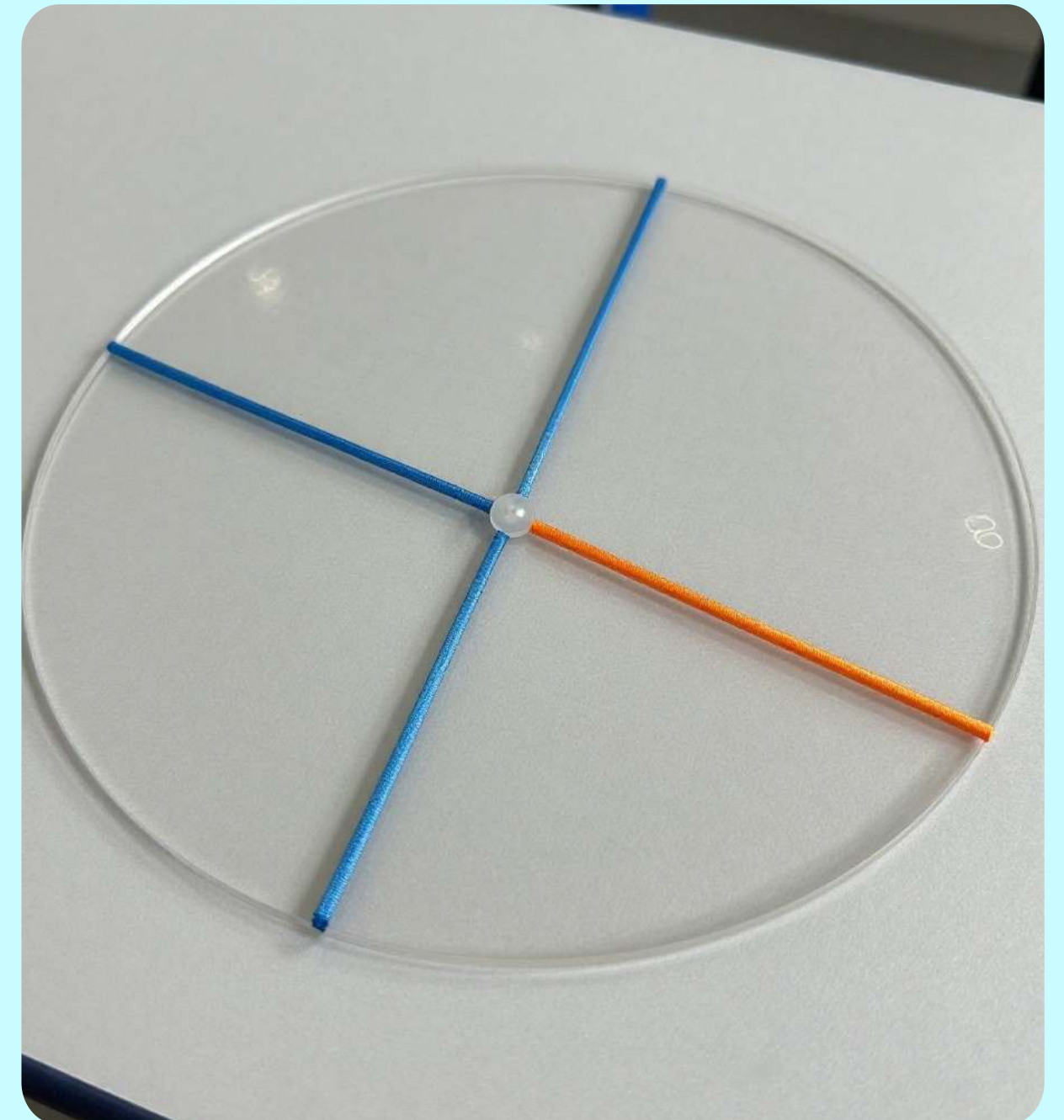
02

Для пересекающихся хорд верно $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Произведение частей одной хорды равно произведению частей другой хорды, пересечённой с ней.

Практический смысл

03

Теорема особенно полезна, когда одна из частей хорды неизвестна. Тогда по остальным данным легко составить уравнение и найти нужную длину.



Теорема о двух секущих



Что сравнивают

Если из одной внешней точки проведены две секущие, сравнивают внешний отрезок и всю секущую. Для обеих линий это произведение одинаково.

Запись формулы

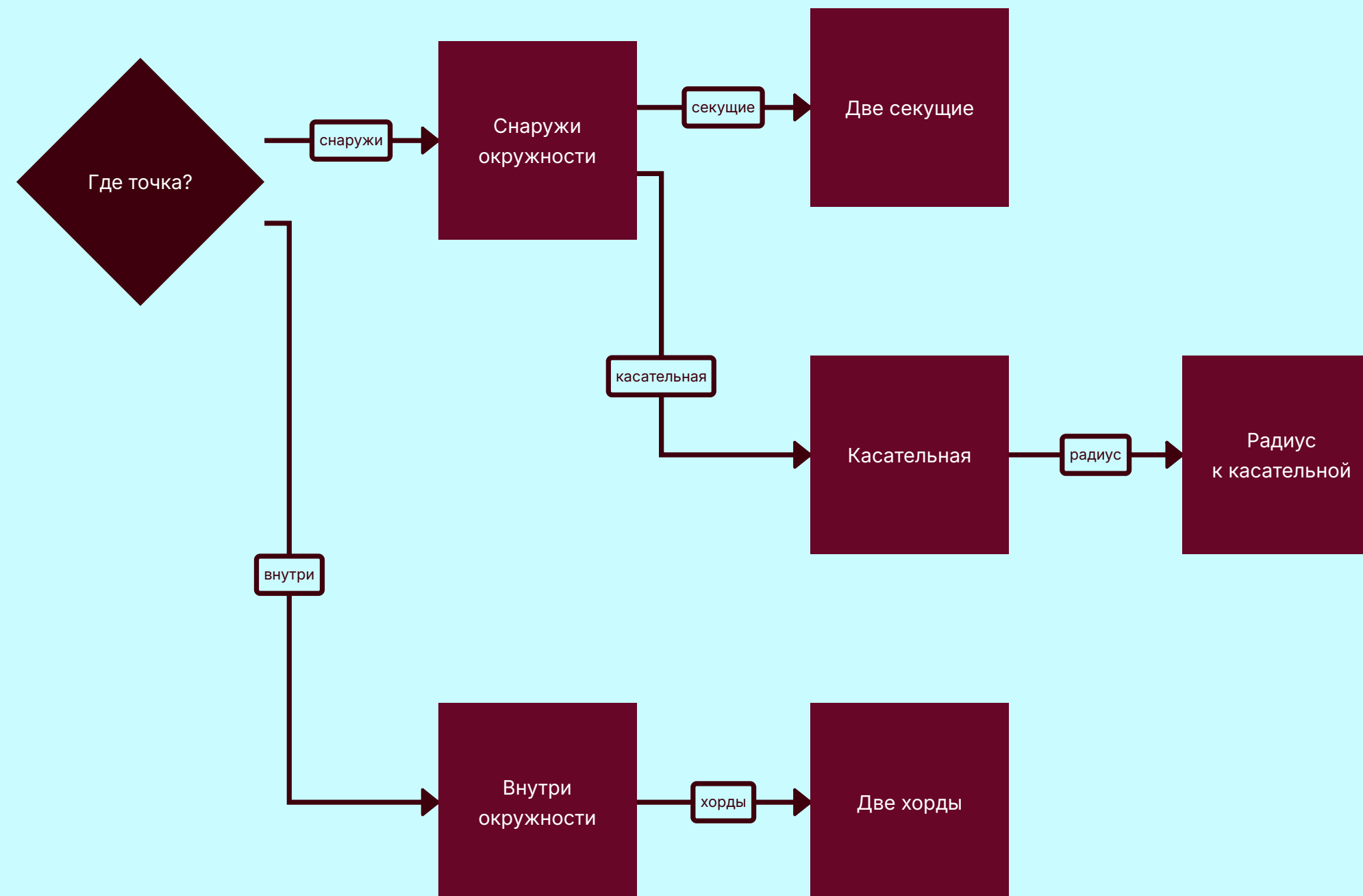
Для точек P, A, B, C, D записывают $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Здесь PA и PC — внешние отрезки, а PB и PD — целые секущие.

Зачем это нужно

Такое соотношение помогает находить длины в задачах, где через одну внешнюю точку проходят две линии, пересекающие окружность в разных местах.

Как выбрать формулу по рисунку

Алгоритм выбора соотношения по положению точки и виду линии



Одна запись позволяет сразу найти неизвестный отрезок, если известны части секущей и длина касательной.

Теорема о касательной и секущей из одной точки
(школьный курс геометрии, 9 класс)

1

формула связывает квадрат
длины касательной
с произведением отрезков
секущей

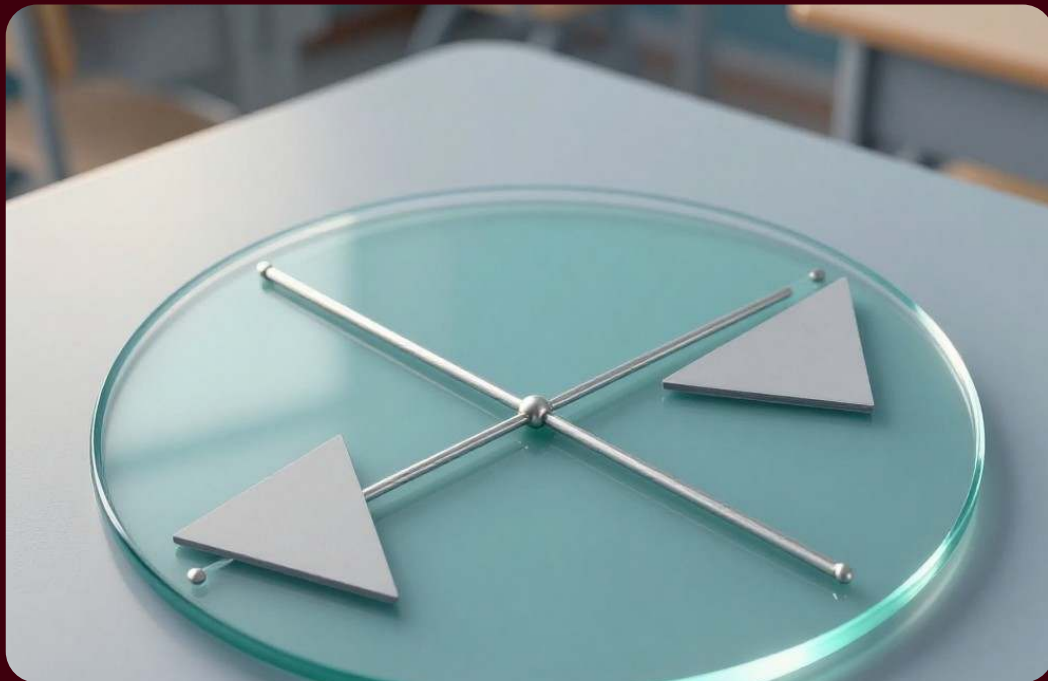
Формулы темы в компактной записи

Краткая таблица показывает, какая формула соответствует каждой конфигурации и что обычно ищут в задаче.

Во всех случаях решение сводится либо к равенству длин, либо к равенству произведений отрезков.

Случай	Формула	Что находят
Две касательные	$PA = PB$	Длину касательной
Две хорды	$AM \cdot MB = CM \cdot MD$	Часть хорды
Две секущие	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	Неизвестный отрезок
Касательная и секущая	$PT^2 = PA \cdot PB$	Длину касательной

Как геометрия превращается в уравнение



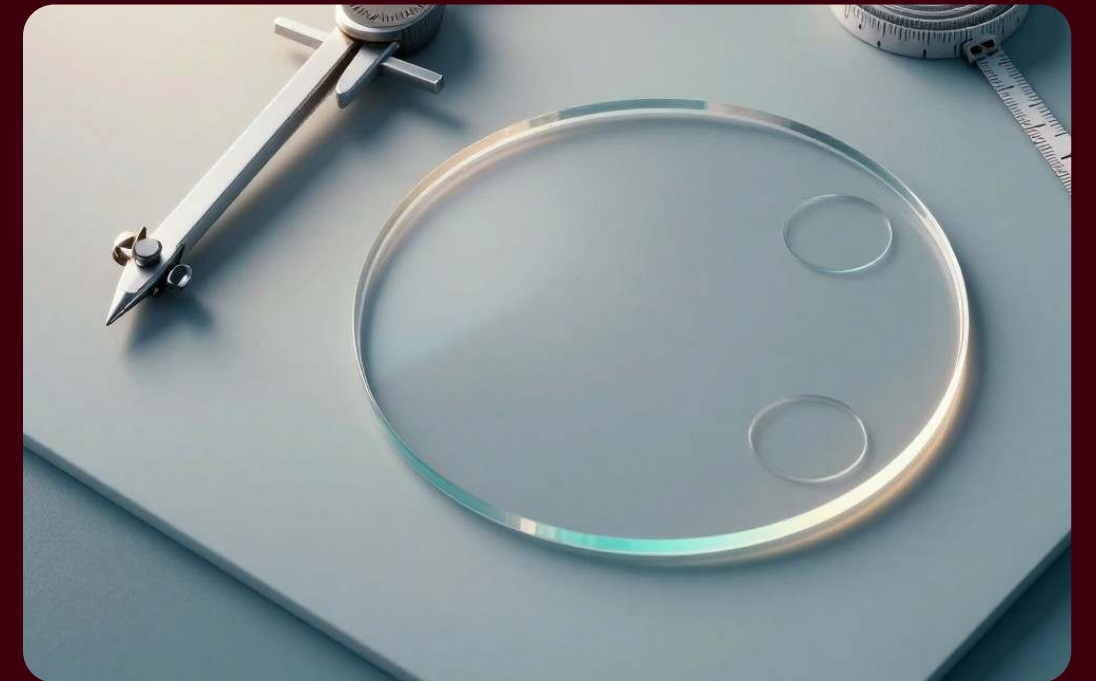
Подобные треугольники в деле

На рисунке с окружностью часто можно заметить одинаковые углы и прямые углы. Из-за этого возникают подобные треугольники, а их стороны связаны пропорциями. Именно так появляются нужные отношения между отрезками.



От пропорции к произведению

Если записать пропорцию правильно и перемножить её члены, получается равенство произведений. Так выводят формулы для пересекающихся хорд и для касательной с секущей. Сложный чертёж превращается в короткое уравнение.



Почему это удобно в задачах

Вместо длинных построений достаточно увидеть тип линии и точку её положения. Затем выбирают подходящую теорему, подставляют числа и получают ответ. Этот приём особенно полезен в задачах с неизвестной длиной.

Что чаще всего требуется найти в задачах



01 Внешний отрезок

Часто нужно найти отрезок от внешней точки до первой точки пересечения с окружностью. Он входит в формулы для секущих и помогает составить уравнение.

02 Полная секущая

Иногда известна только одна часть секущей, а требуется весь отрезок. Тогда к внешнему отрезку добавляют внутреннюю часть и используют произведение.

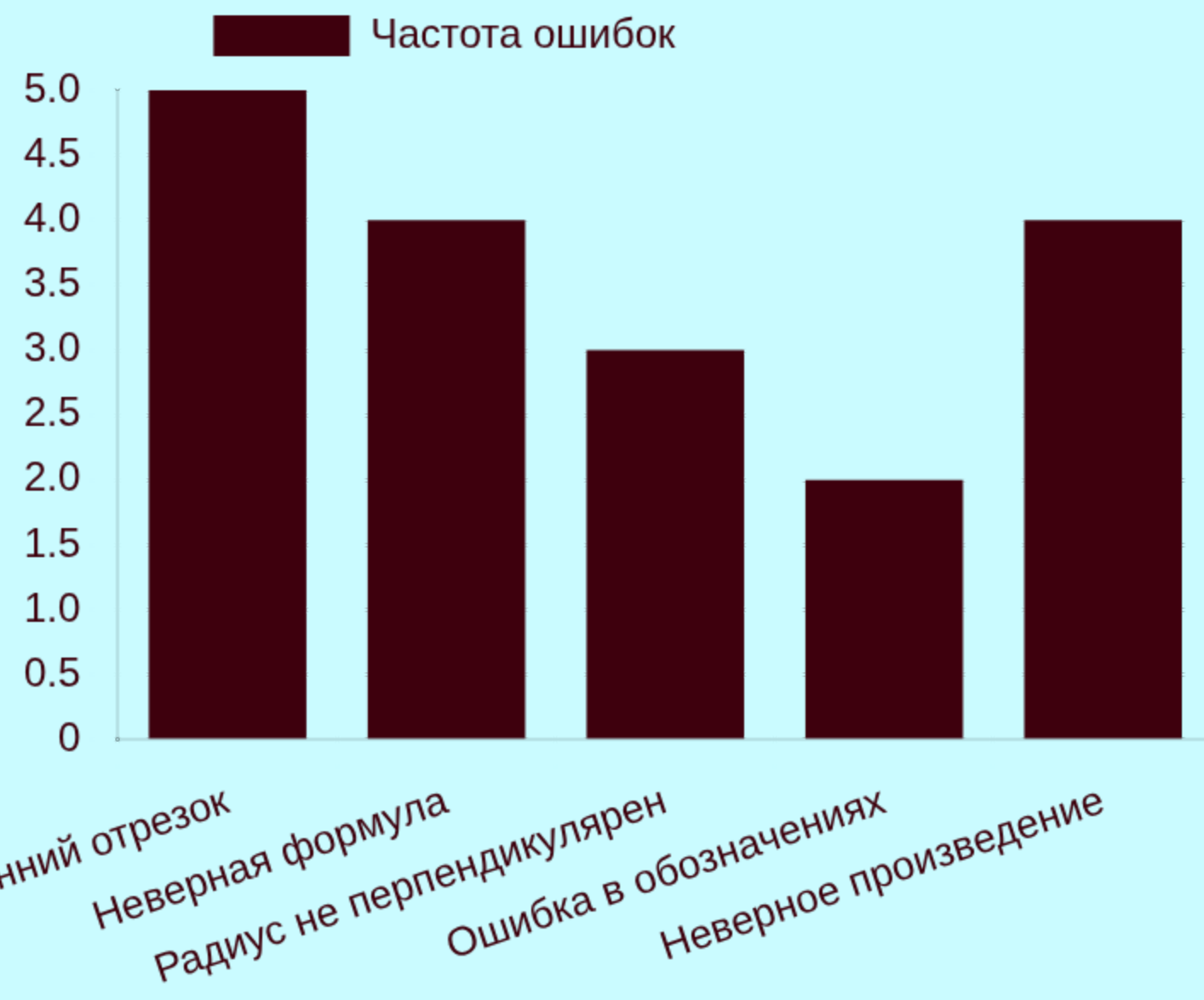
03 Касательная длина

Если из точки проведена касательная, обычно находят её длину через квадратный корень из произведения известных отрезков. Это самый короткий путь к ответу.

04 Часть хорды

В задачах на пересекающиеся хорды нередко неизвестна одна часть отрезка. Её находят из равенства произведений и затем проверяют по рисунку.

Типичные ошибки при решении задач



Числа на диаграмме показывают, какие ошибки требуют особого внимания при чтении рисунка и записи формулы.

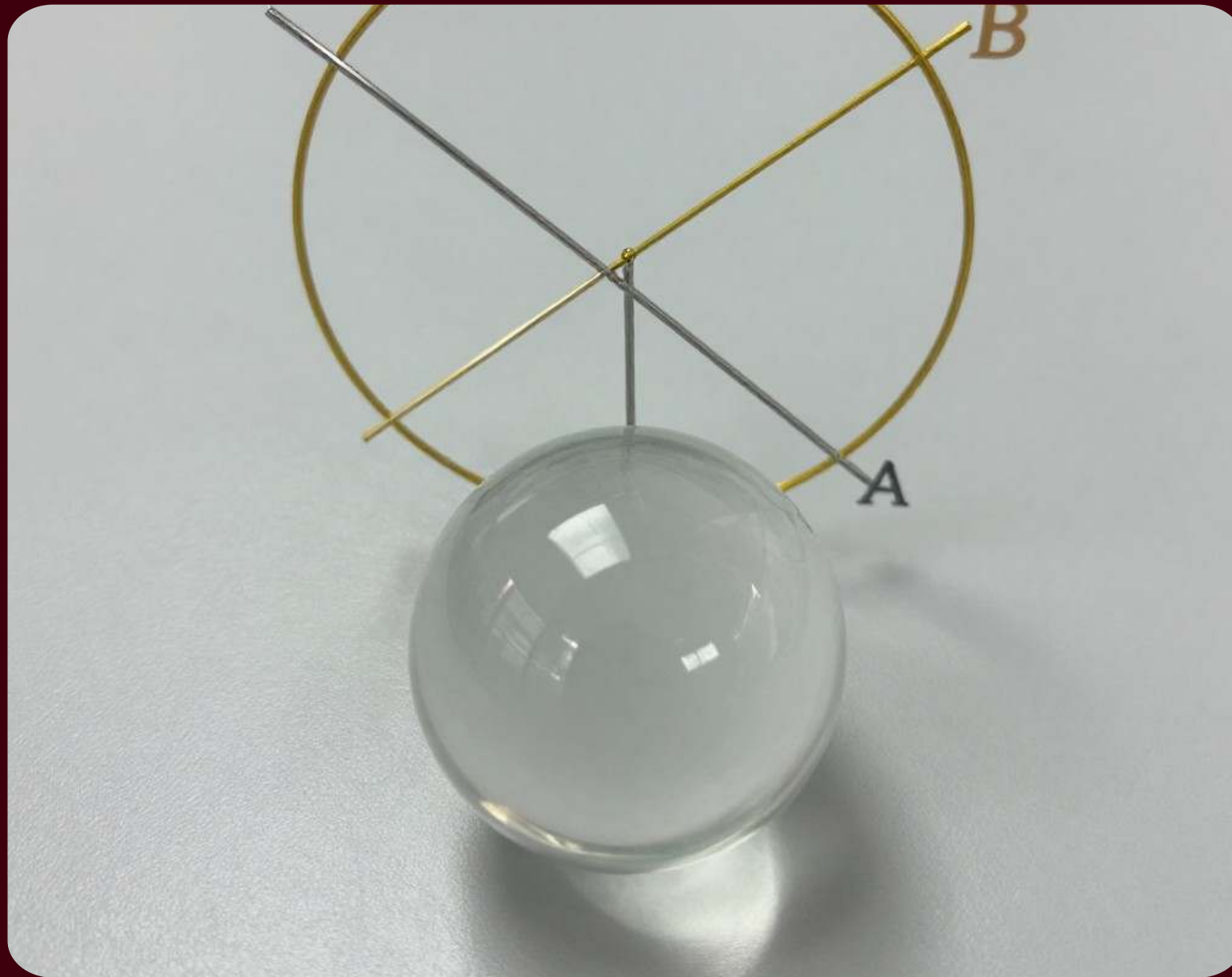
Чаще всего трудности связаны не с вычислениями, а с распознаванием конфигурации и аккуратной записью отрезков.

**Одна подстановка
в формулу секущих
сразу даёт ответ
без дополнительных
построений и длинных
преобразований.**

Пример по теореме о двух секущих: $3 \cdot 12 = 4 \cdot PD$

9

получается значение
неизвестного отрезка PD



Пример с касательной и секущей

- **Записываем формулу**

Для точки P используем равенство $PT^2 = PA \cdot PB$. Оно связывает длину касательной с двумя частями секущей и подходит для прямого вычисления.

- **Подставляем данные**

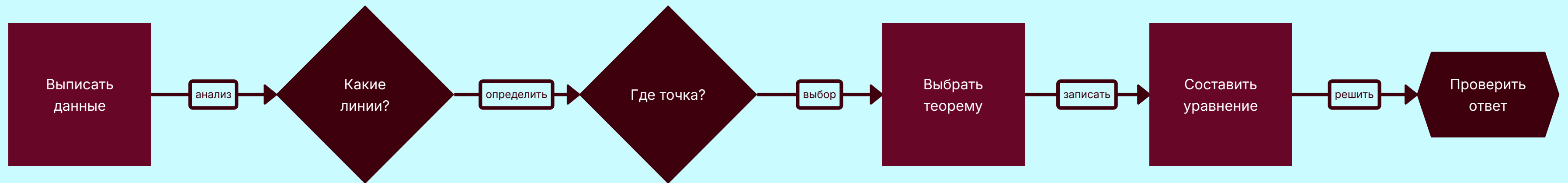
При $PA = 5$ и $PB = 20$ получаем $PT^2 = 5 \cdot 20 = 100$. Здесь важно не перепутать внешний отрезок с полной длиной секущей.

- **Находим ответ**

Из равенства $PT^2 = 100$ следует $PT = 10$. В таких задачах проверяют, чтобы ответ был положительным, ведь длина отрезка не может быть отрицательной.

Как решать задачи на отрезки с окружностью

Последовательность действий от чтения рисунка до проверки ответа



Сравнение трёх главных случаев

Случай	Формула	Что находят
Касательные	$PA = PB$	Длину касательной
Хорды	$AM \cdot MB = CM \cdot MD$	Часть хорды
Секущие	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	Неизвестный отрезок

Таблица помогает быстро выбрать нужную формулу по положению точки и виду прямой.

Положение точки сразу подсказывает тип формулы: внутри окружности — хорды, снаружи — секущие и касательные.

Главное, что нужно запомнить

Если распознать тип линии и положение точки, нужная формула находится быстро. Для хорд и секущих работают произведения отрезков, а для касательных — равенство дуг и перпендикулярность радиуса.