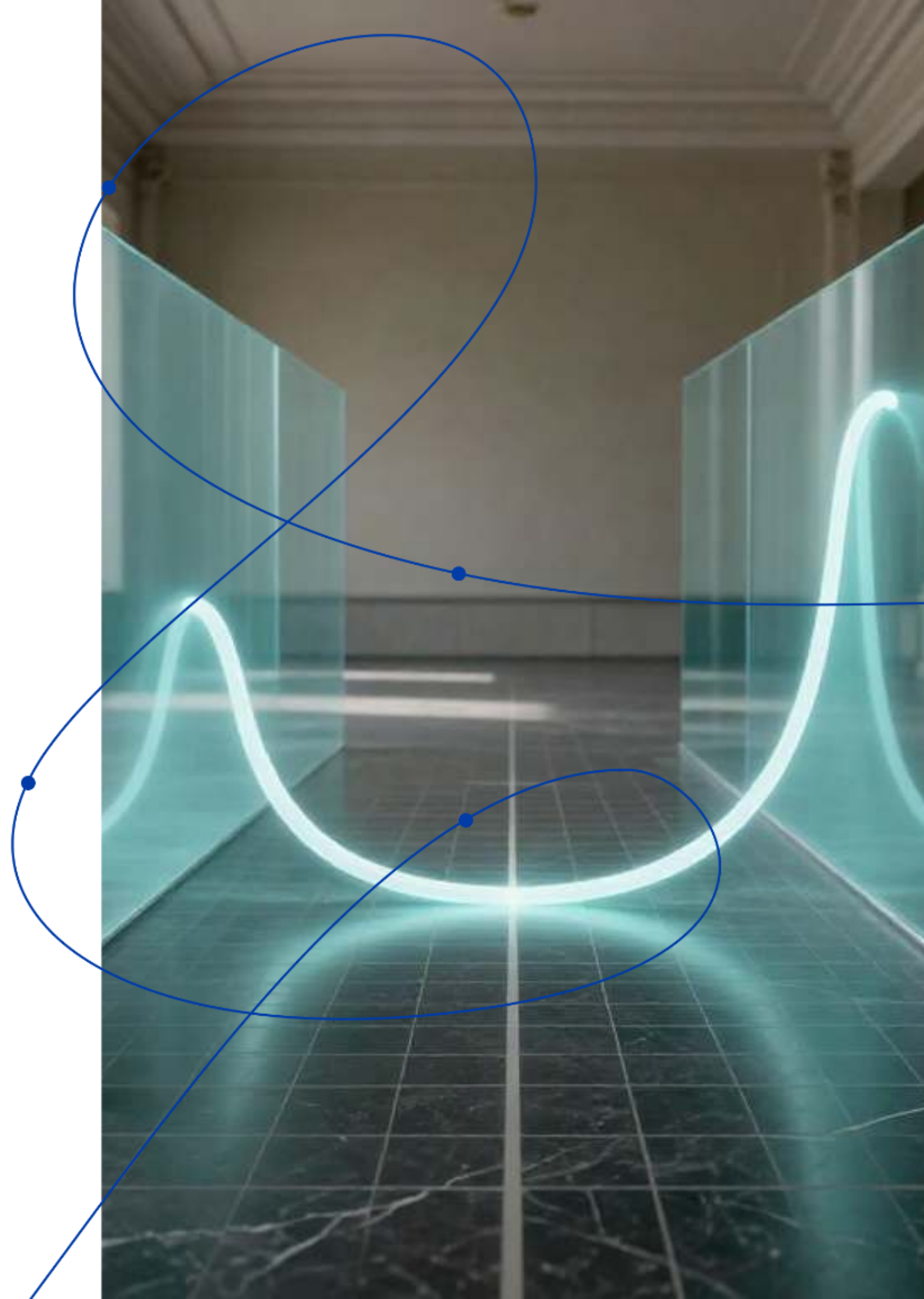


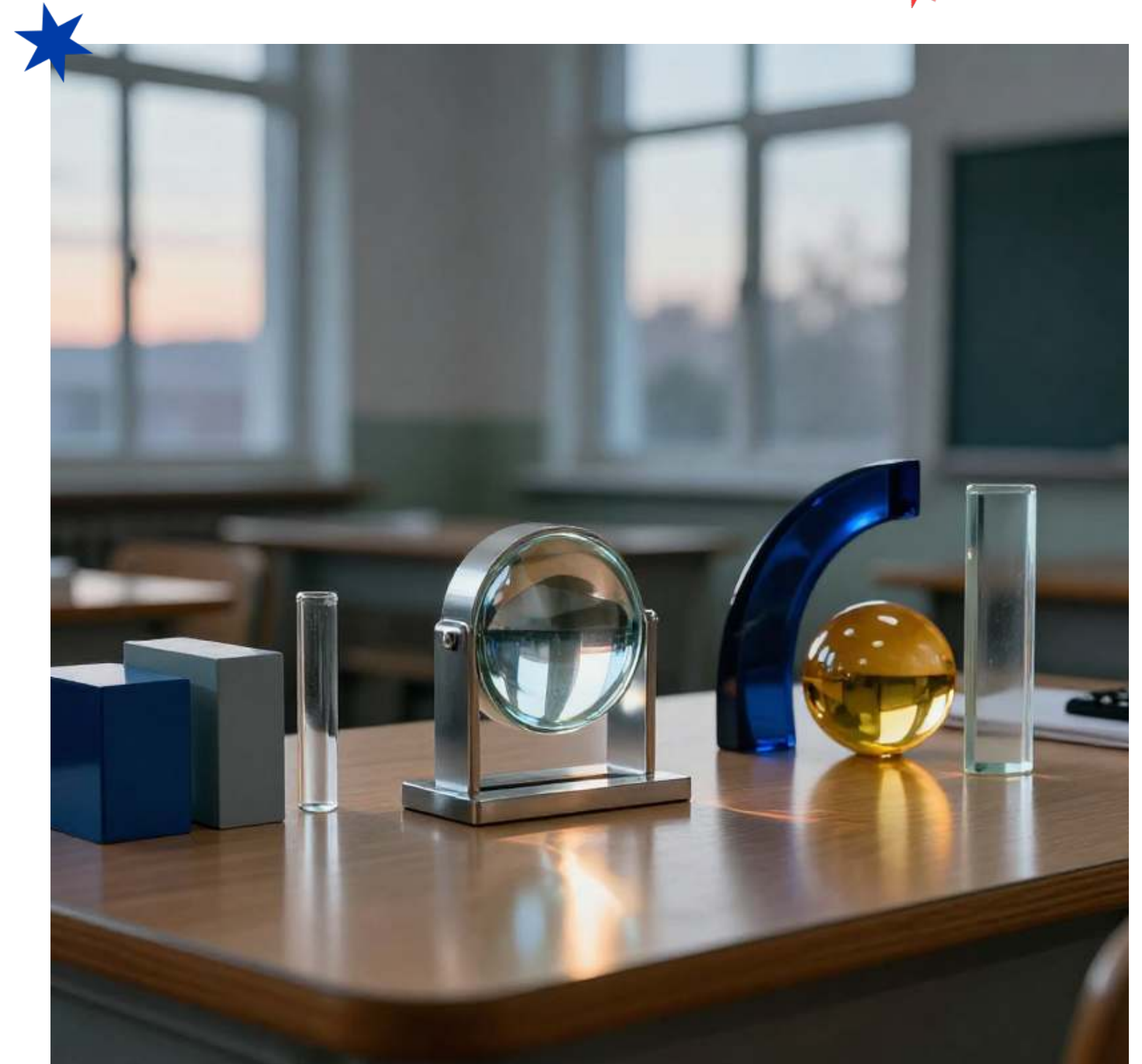
Дробно-линейная функция и её график: основные идеи

Разберём, как коэффициенты формулы
задают асимптоты, нули и форму графика.



Как дробно-линейная функция связывает разные темы алгебры

Эта функция соединяет линейные уравнения, дроби и графический анализ. На её примере удобно увидеть, как алгебраическая запись определяет положение графика, его ветви и точки разрыва.



Общий вид функции и условия существования

1. Стандартная запись

Дробно-линейную функцию записывают в виде $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Числа a , b , c и d задают конкретный вид зависимости, а весь график определяется их сочетанием.

2. Ограничение на знаменатель

Выражение $cx+d$ не должно обращаться в нуль, иначе значение функции не определено. Поэтому для построения графика прежде всего находят значение x , при котором знаменатель равен нулю.

3. Когда функция линейная

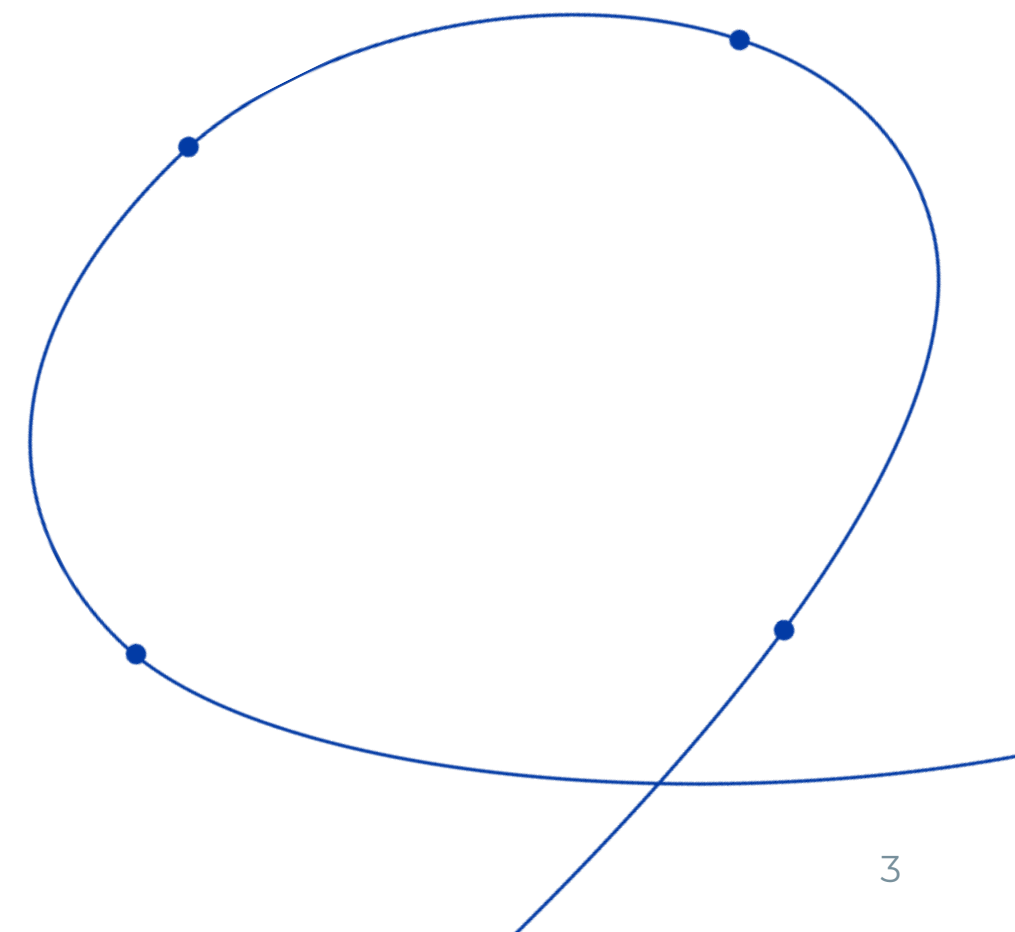
Если $c=0$, знаменатель становится постоянным числом, и дробно-линейная запись сводится к линейной функции. В этом случае исчезает характерный разрыв и одна из асимптот.

4. Вырожденный случай

При $ad-bc=0$ дробь может сократиться и привести к более простой форме. Тогда график уже не обладает всеми свойствами настоящей дробно-линейной функции.

5. Что важно проверить

Чтобы понять поведение функции, нужно сразу установить область определения, возможные нули и точки разрыва. Именно эти элементы задают основу дальнейшего исследования графика.



Основные характеристики дробно-линейной функции



По коэффициентам формулы можно заранее определить ключевые элементы графика и его расположение на плоскости.

Четыре коэффициента позволяют заранее определить разрыв, асимптоты и опорные точки, не строя график методом подбора.



Элемент	Как находится	Что означает
Область определения	$cx+d \neq 0$	Допустимые x
Вертикальная асимптота	$x = -d/c$	Линия разрыва
Горизонтальная асимптота	$y = a/c$	Уровень ветвей
Нуль функции	$ax+b=0$	Пересечение с Ox
Пересечение с Oy	$x=0$	Точка на оси Oy



Свойства функции $y = (ax+b)/(cx+d)$, школьный курс алгебры 10 класса

График дробно-линейной функции как две ветви гиперболы

Две ветви

График такой функции обычно распадается на две отдельные части, расположенные по разные стороны от вертикальной асимптоты. Именно это создаёт внешний вид сдвинутой гиперболы.

Близость к асимптотам

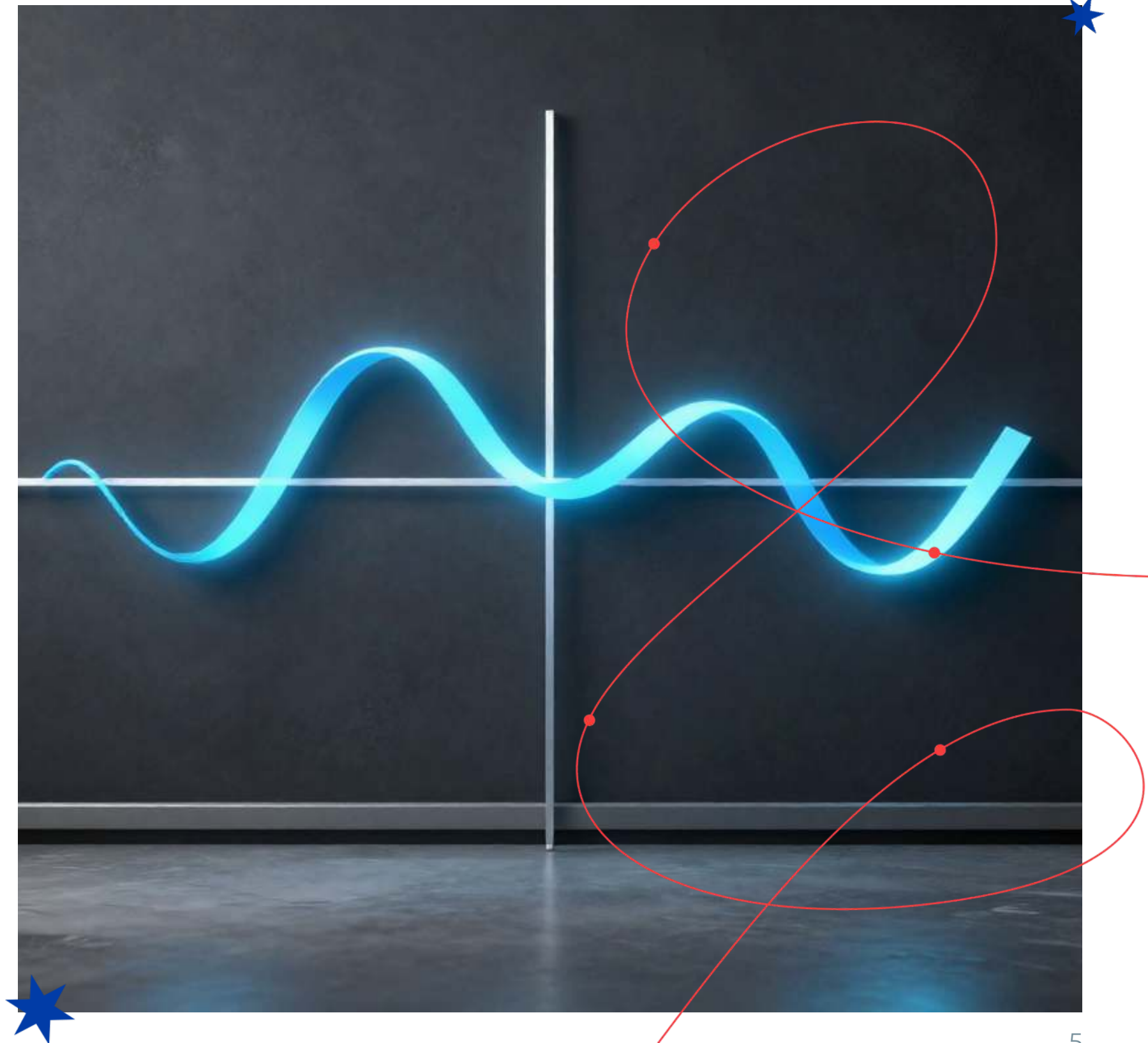
При удалении от центра график всё ближе подходит к вертикальной и горизонтальной прямым, но не пересекает их в точке разрыва. Поэтому асимптоты задают общее направление ветвей.

Сдвиг относительно начала

Положение графика не привязано к началу координат: его можно сместить вверх, вниз, влево или вправо. Это зависит от конкретных значений коэффициентов a , b , c и d .

Центральная симметрия

Две ветви симметричны относительно точки пересечения асимптот. Эта особенность помогает быстро представить общий вид графика и проверить правильность построения.



Область определения и исключённая точка



1.

Исключённое значение

Область определения включает все значения x , кроме того, при котором знаменатель обращается в нуль. Для данной функции это значение находится из уравнения $sx+d=0$.

2.

Связь с асимптотой

Точка, где знаменатель равен нулю, не принадлежит графику и становится причиной вертикальной асимптоты. На рисунке она задаёт границу между двумя ветвями.

3.

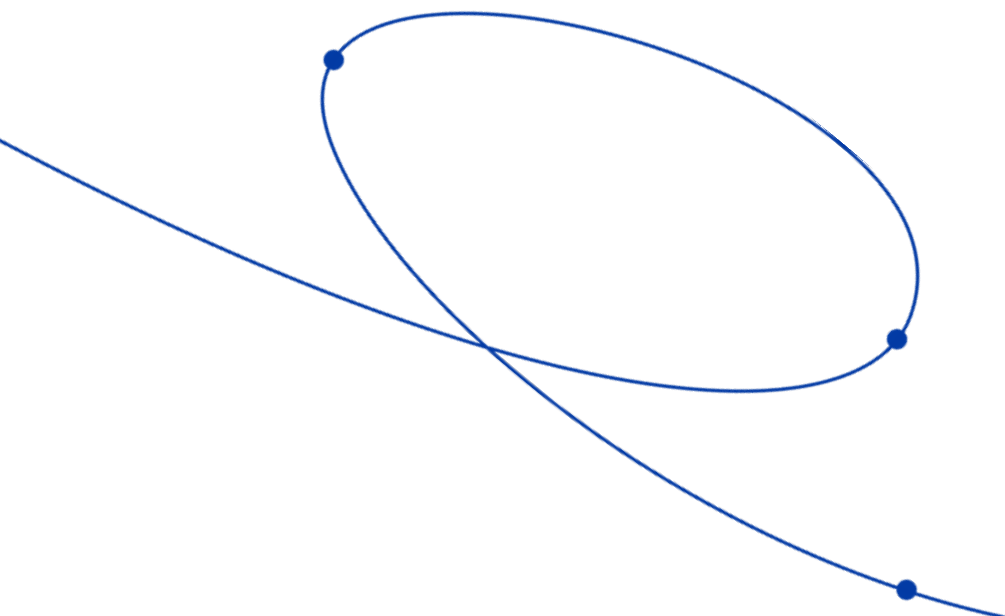
Проверка перед сокращением

Если числитель и знаменатель имеют общий множитель, его можно сокращать только после анализа области определения. Иначе легко потерять выколотую точку и исказить график.

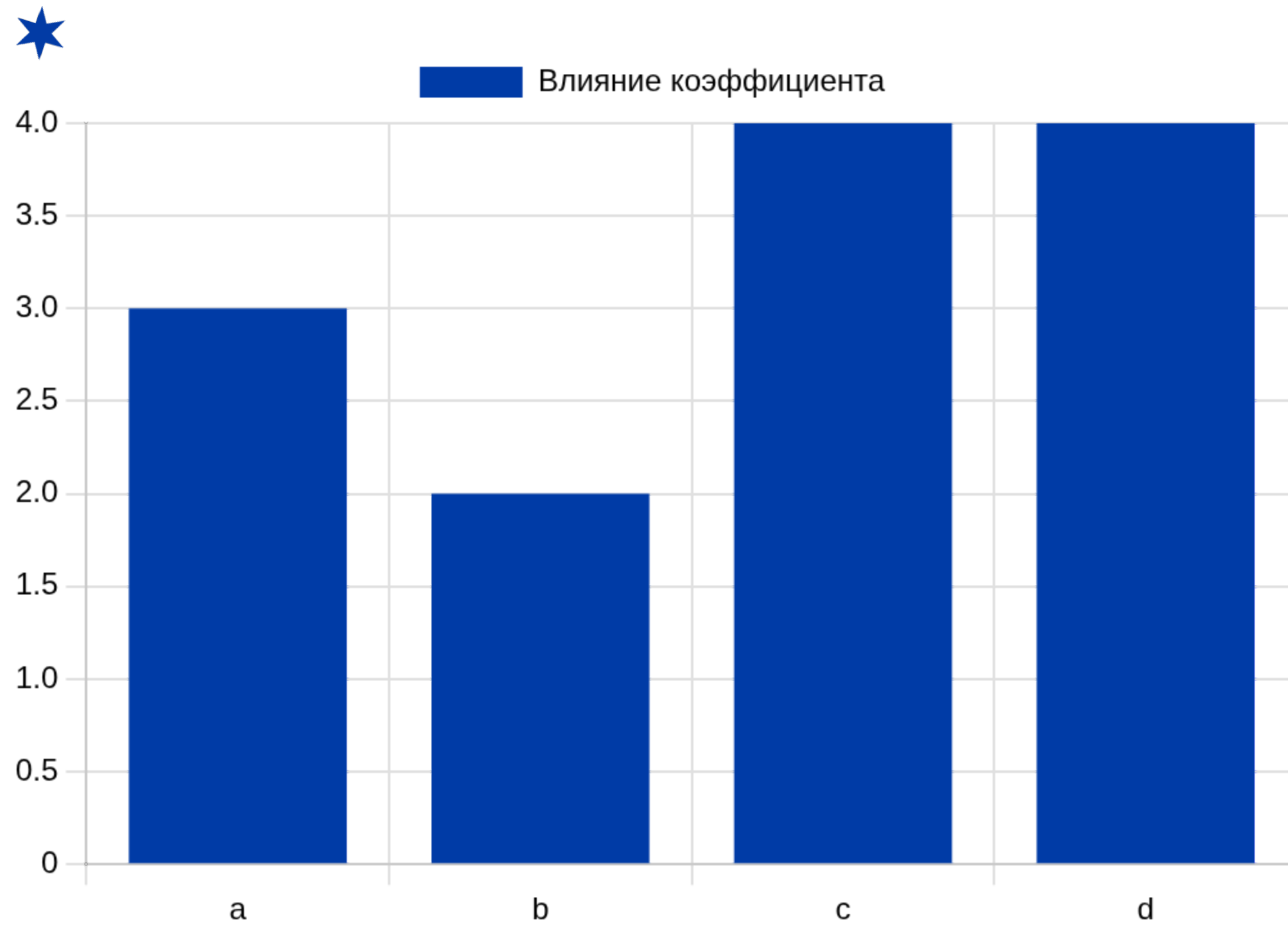
4.

Практический смысл

При решении задач важно не просто упростить дробь, а сохранить информацию о запрещённом значении x . Это отличает корректное исследование функции от формального преобразования.



Как коэффициенты влияют на график



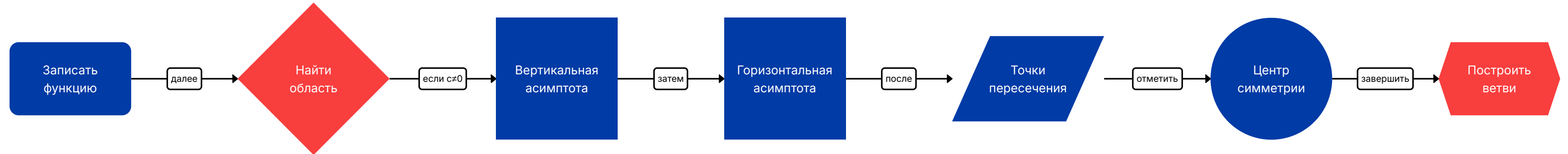
Схематическое обобщение свойств $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Диаграмма показывает, какие элементы графика затрагивает каждый коэффициент и как меняется положение асимптот и точки пересечения с осями.

Наиболее заметно на график воздействуют c и d: они определяют положение вертикальной асимптоты и разрыв функции.

Алгоритм построения графика

Последовательность шагов для исследования дробно-линейной функции по формуле



Пересечения с осями координат

Точка на оси Oy

Чтобы найти пересечение с осью Oy, подставляют $x=0$. Если $d \neq 0$, получается $y=b/d$, и эта точка становится удобной опорой при построении графика.

Точка на оси Ox

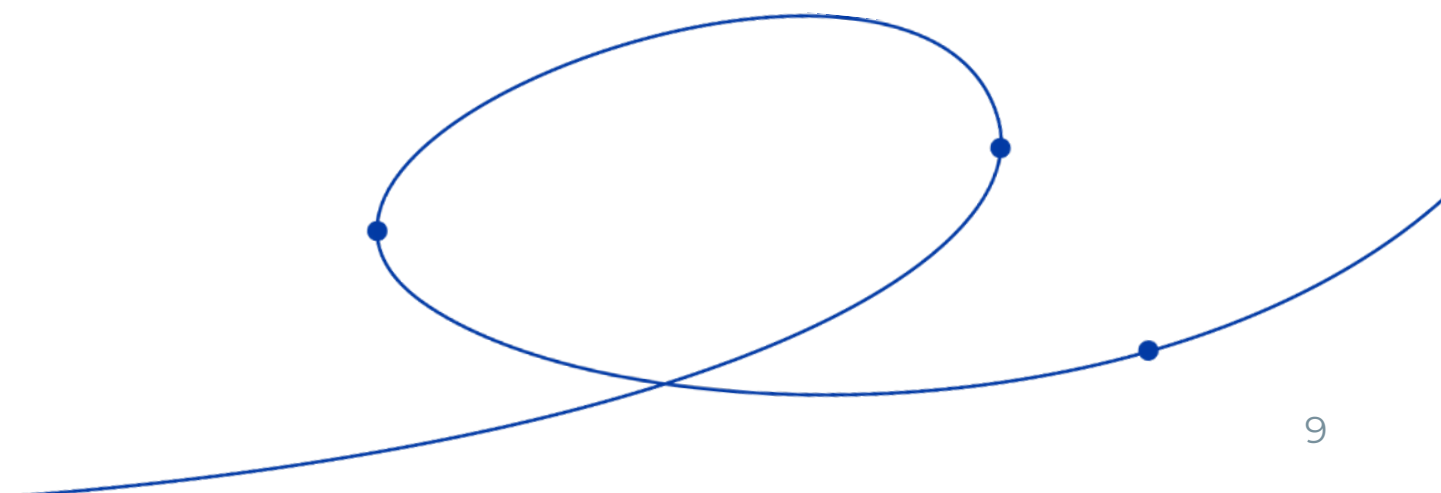
Пересечение с осью Ox находят из уравнения $ax+b=0$. При $a \neq 0$ получаем $x=-b/a$, и график проходит через найденную точку на горизонтальной оси.

Когда корня нет

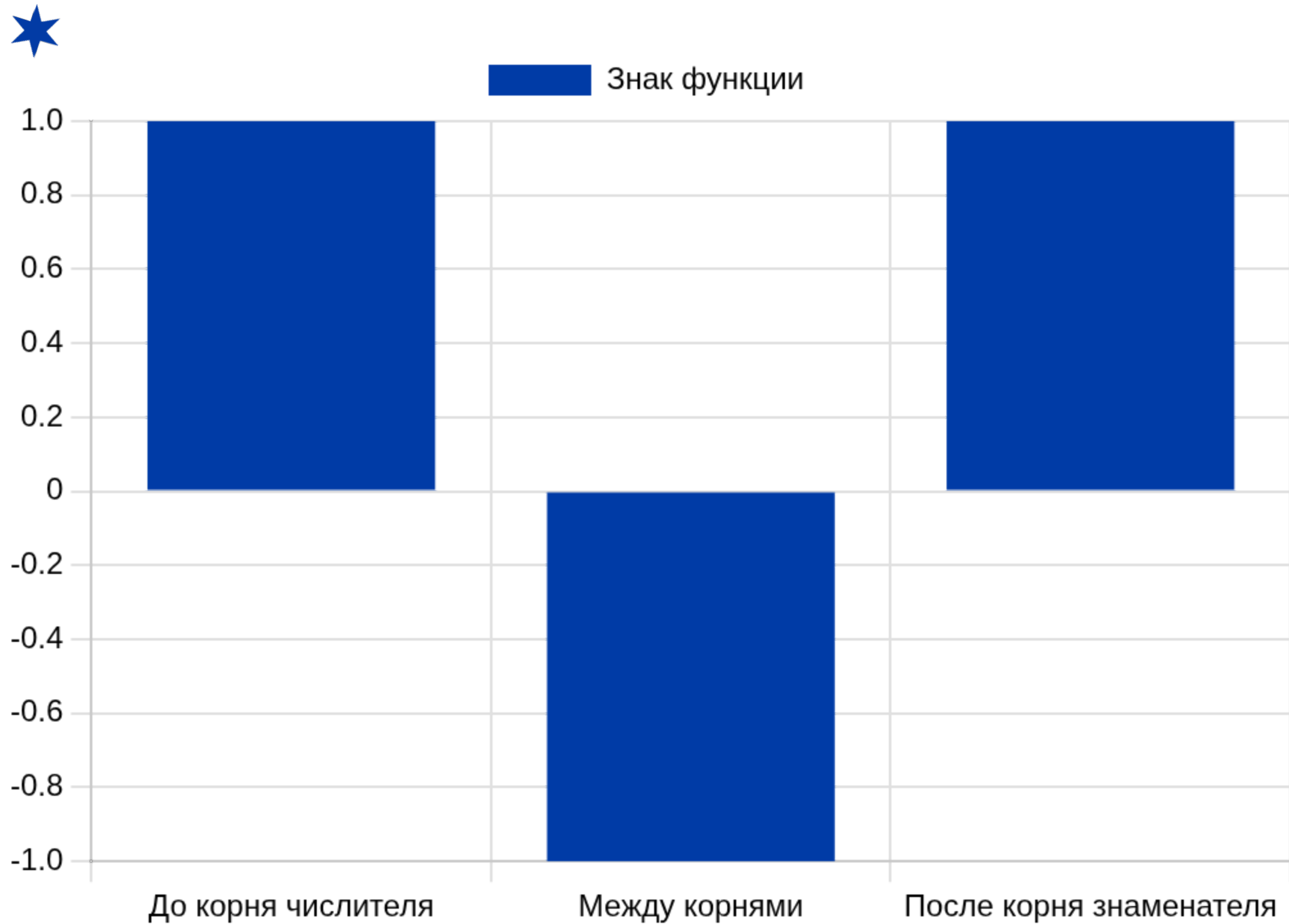
Если $a=0$, у функции может не оказаться нуля, и тогда она не пересекает ось Ox. Это важно учитывать ещё до нанесения графика на координатную плоскость.

Особый случай $d=0$

Когда $d=0$, точка пересечения с осью Oy отсутствует, потому что при $x=0$ знаменатель обращается в нуль. В таком случае график не проходит через ось Oy.



Знаки функции на промежутках



Метод знаков для рациональных функций, школьная алгебра

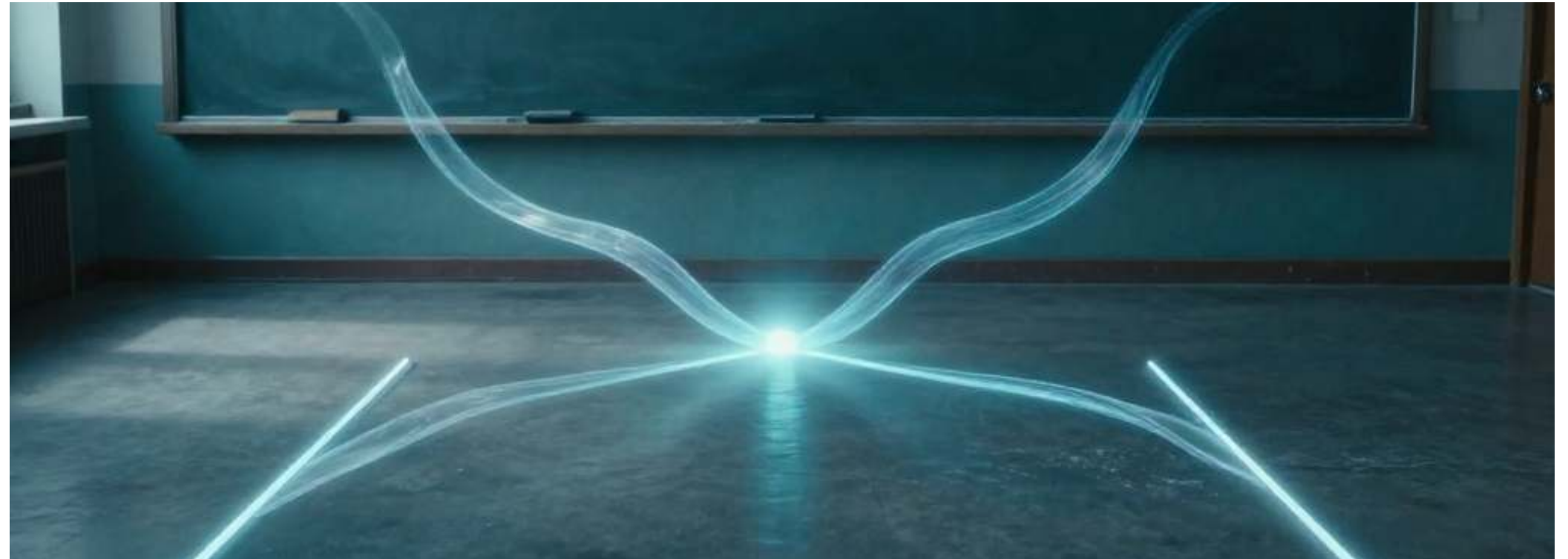
Таблица знаков помогает заранее определить, где ветви графика лежат выше или ниже оси Ox , не прибегая к точному построению каждой точки.

Знак функции определяется сочетанием знаков числителя и знаменателя, поэтому разбиение на промежутки упрощает анализ расположения графика.

Две ветви и одна точка равновесия

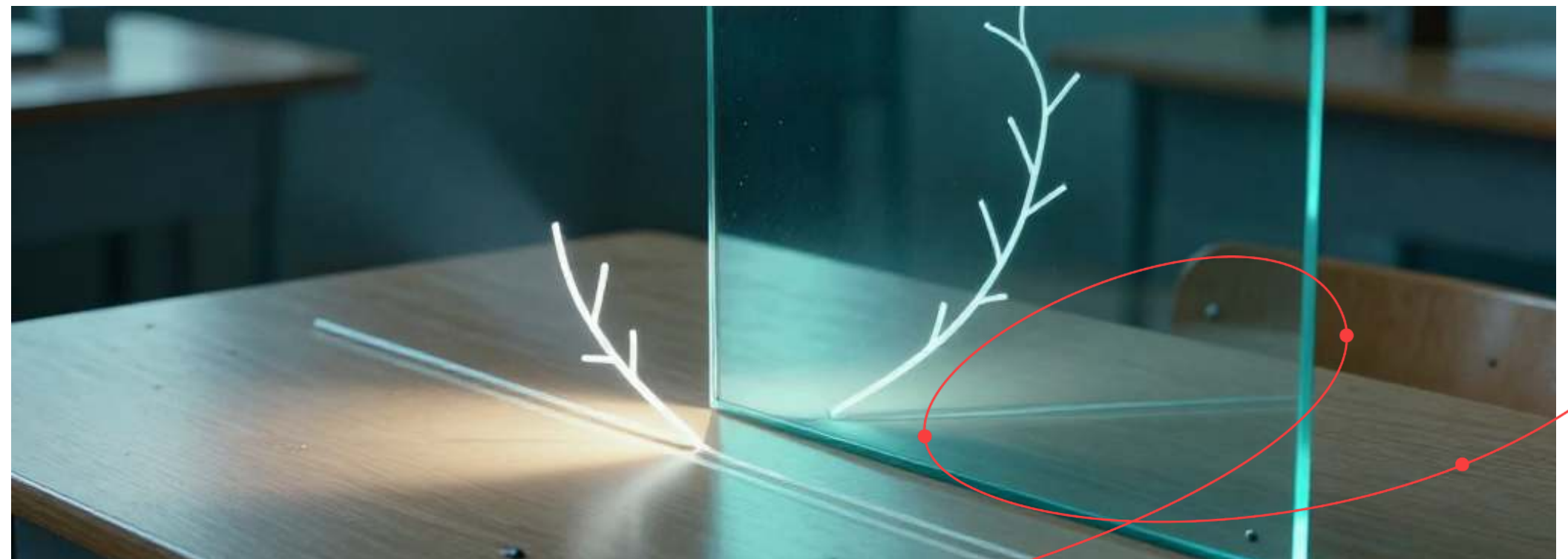
Центр, вокруг которого строится график

У дробно-линейной функции есть особая точка, относительно которой весь график можно мысленно повернуть на 180° . Это точка пересечения асимптот, и именно она задаёт центр симметрии. Благодаря этому две ветви оказываются согласованными по расположению и форме.



Как симметрия помогает при построении

Если одна ветвь уже найдена по опорным точкам, вторая не требует полного пересчёта. Достаточно отразить её относительно центра симметрии и проверить, что обе части стремятся к своим асимптотам. Такой приём экономит время и уменьшает число ошибок.



Линейный, дробно-линейный и вырожденный случаи

Таблица показывает, как формула и соотношение коэффициентов меняют вид графика и наличие асимптот.

Вид графика определяется не только записью формулы, но и тем, как связаны её коэффициенты.

Случай	Вид графика	Асимптоты	Особенности
$c=0$	прямая	нет	линейная функция
$ad-bc \neq 0$	две ветви	две	обычный случай
$ad-bc=0$	простая форма	может не быть	после сокращения

Обобщение свойств функции $y=(ax+b)/(cx+d)$

Как по производной понять поведение функции

1. 1. Смотрим на знак производной

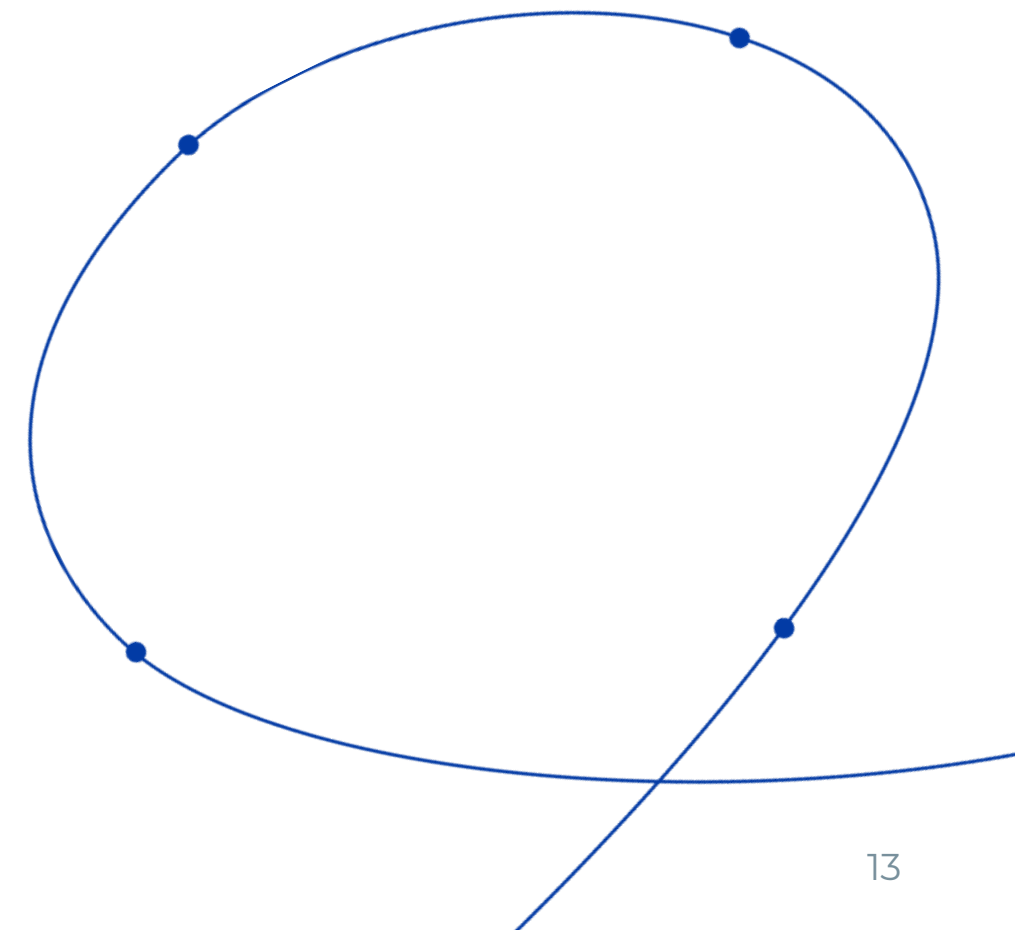
Для дробно-линейной функции производная имеет вид $y' = (ad - bc) / (cx + d)^2$. Знаменатель всегда положителен на области определения, поэтому направление изменения задаёт только выражение $ad - bc$.

2. 2. Определяем возрастание или убывание

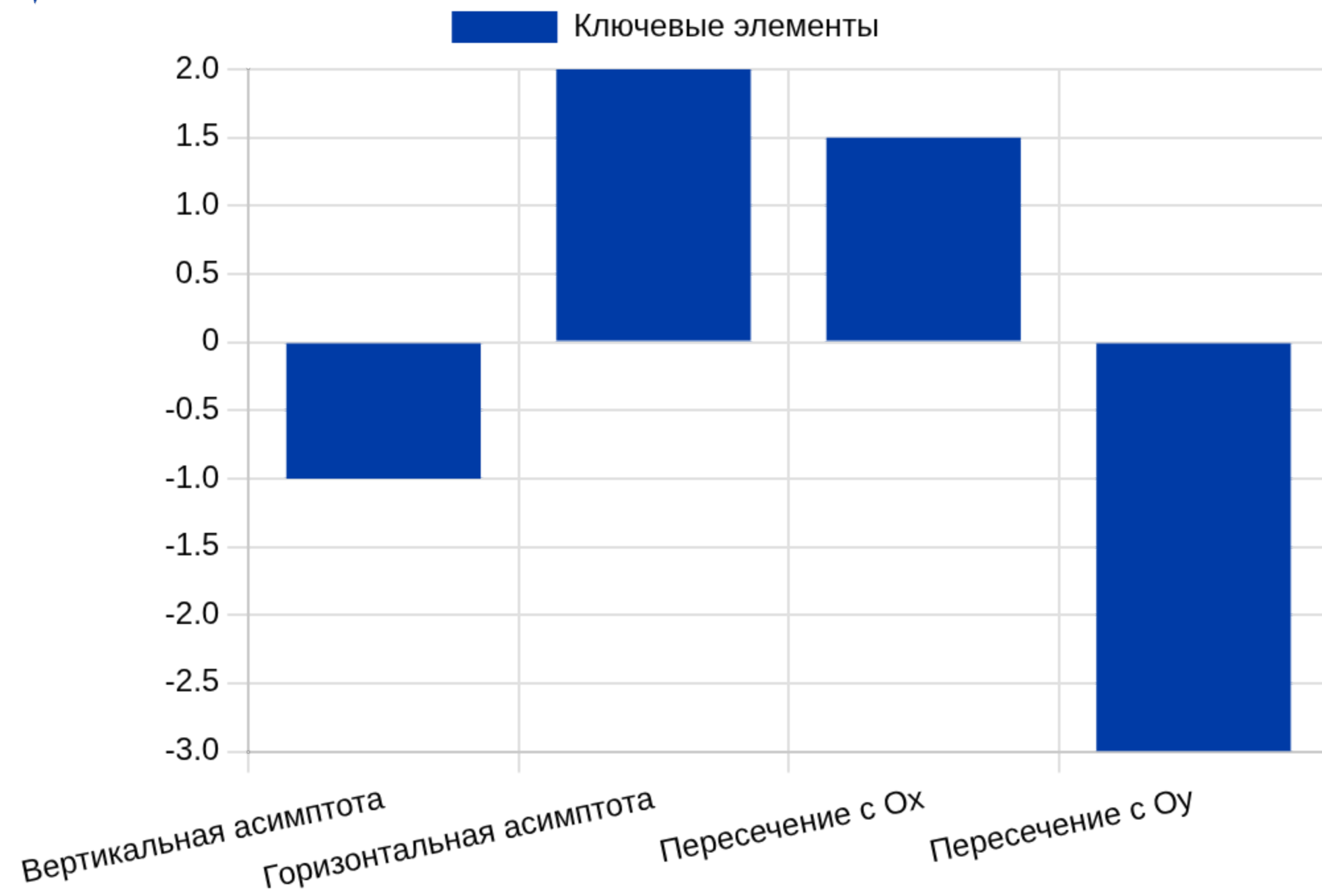
Если $ad - bc > 0$, функция возрастает на каждом промежутке области определения. Если $ad - bc < 0$, она убывает на каждом таком промежутке, причём разрыв на знак не влияет.

3. 3. Ищем точки экстремума

Внутри области определения экстремумов нет, потому что знак производной не меняется на одном промежутке. Это упрощает исследование: достаточно разделить ось по точке разрыва и проверить поведение на каждой части.



Пример: функция $y=(2x-3)/(x+1)$



Пример по формуле $y=(2x-3)/(x+1)$



На одном примере видно, как быстро извлекаются основные характеристики без построения таблицы значений.

Функция сразу задаёт разрыв, опорные точки и центр симметрии, поэтому график можно восстановить по нескольким вычислениям.



Как привести формулу к удобному виду



1.

Выделяем постоянную часть

Исходную дробь удобно переписать так, чтобы отдельно выделить число a/c . Тогда становится ясно, где находится уровень горизонтальной асимптоты и как распределяется остальная часть выражения.

2.

Преобразуем дробную часть Вводим сдвиг

После алгебраических преобразований остаётся дробь с линейным выражением в знаменателе. Она показывает, насколько график похож на сдвинутую гиперболу, а не на обычную рациональную функцию.

3.

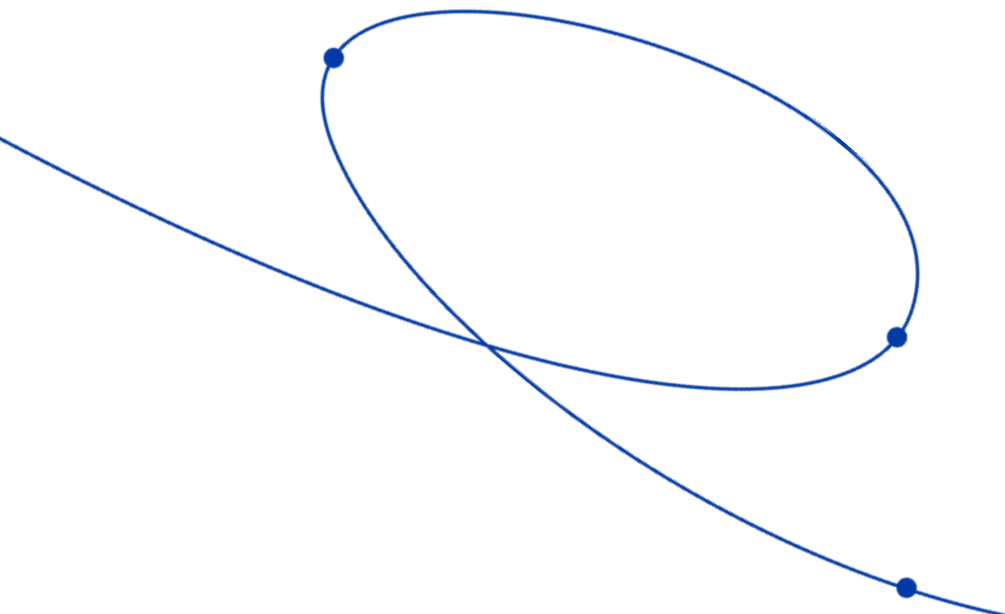
Вводим сдвиг

Если заменить переменную и записать функцию как $y = k/(x-h) + m$, асимптоты читаются сразу. Параметры h и m показывают смещение графика по осям и положение центра симметрии.

4.

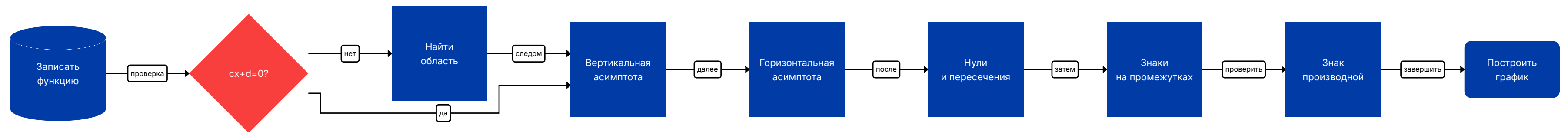
Используем вид для построения

Такой формат особенно полезен при чертеже: видно направление ветвей, расстояние до асимптот и удобные опорные точки. Это помогает строить график аккуратно и без лишних вычислений.



Последовательность исследования функции

Схема отражает стандартный порядок анализа дробно-линейной функции на уроке алгебры.



На что чаще всего ошибаются

Сокращение без проверки

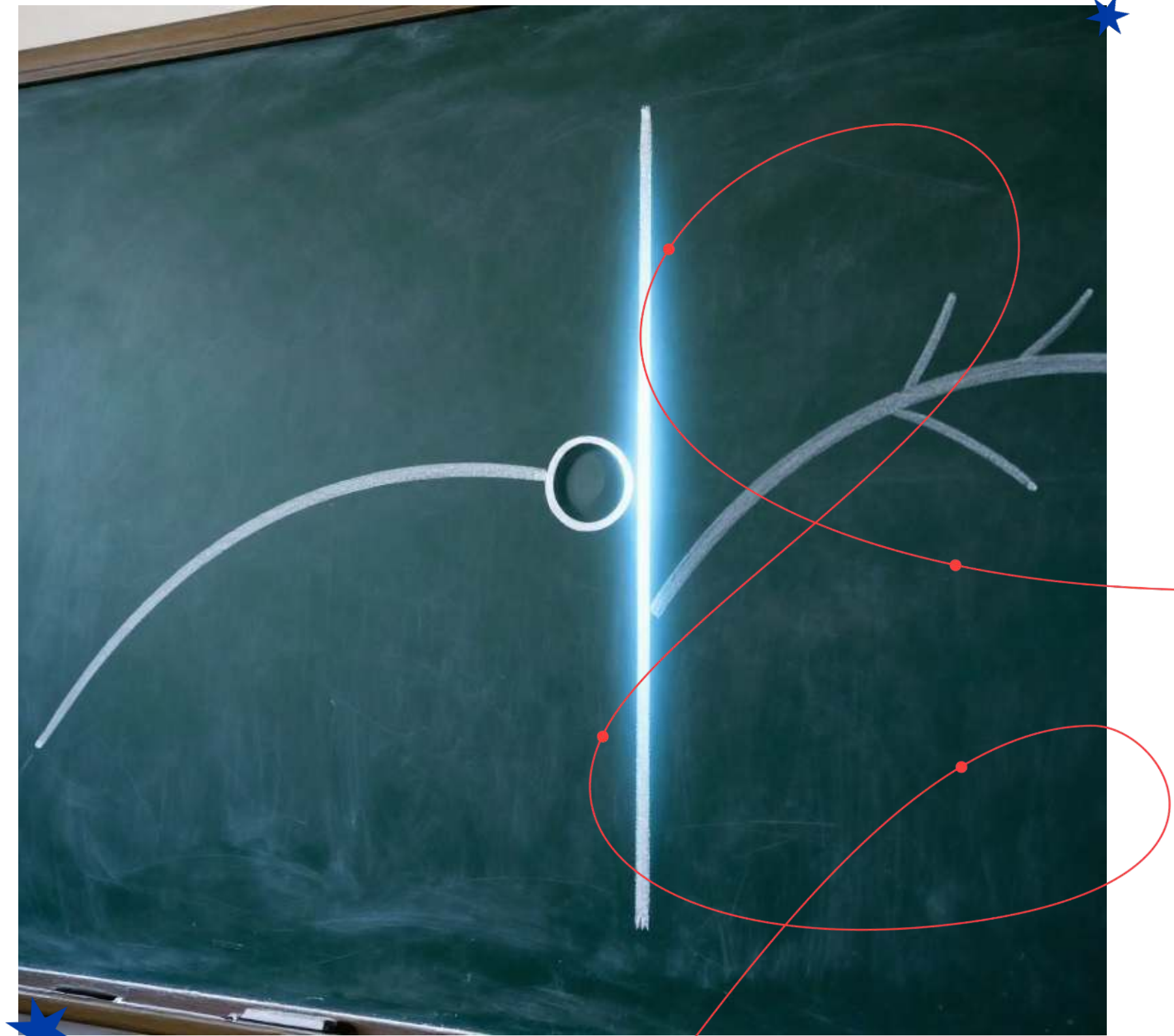
Если сократить дробь, не заметив запрещённое значение x , можно потерять выколотую точку. Из-за этого график будет выглядеть правильно лишь частично, а область определения окажется искажённой.

Путаница корней

Корень числителя даёт ноль функции, а корень знаменателя — разрыв и вертикальную асимптоту. Эти точки выполняют разные роли, поэтому их нельзя отмечать как одинаковые опорные элементы.

Смещение в неверную сторону

Ошибочно определённый знак асимптоты приводит к зеркальному расположению ветвей. Тогда график внешне напоминает нужный, но не совпадает ни с пересечениями, ни с направлением приближения к асимптотам.



Короткая памятка по исследованию



Таблица помогает быстро восстановить полный алгоритм проверки дробно-линейной функции перед построением графика.

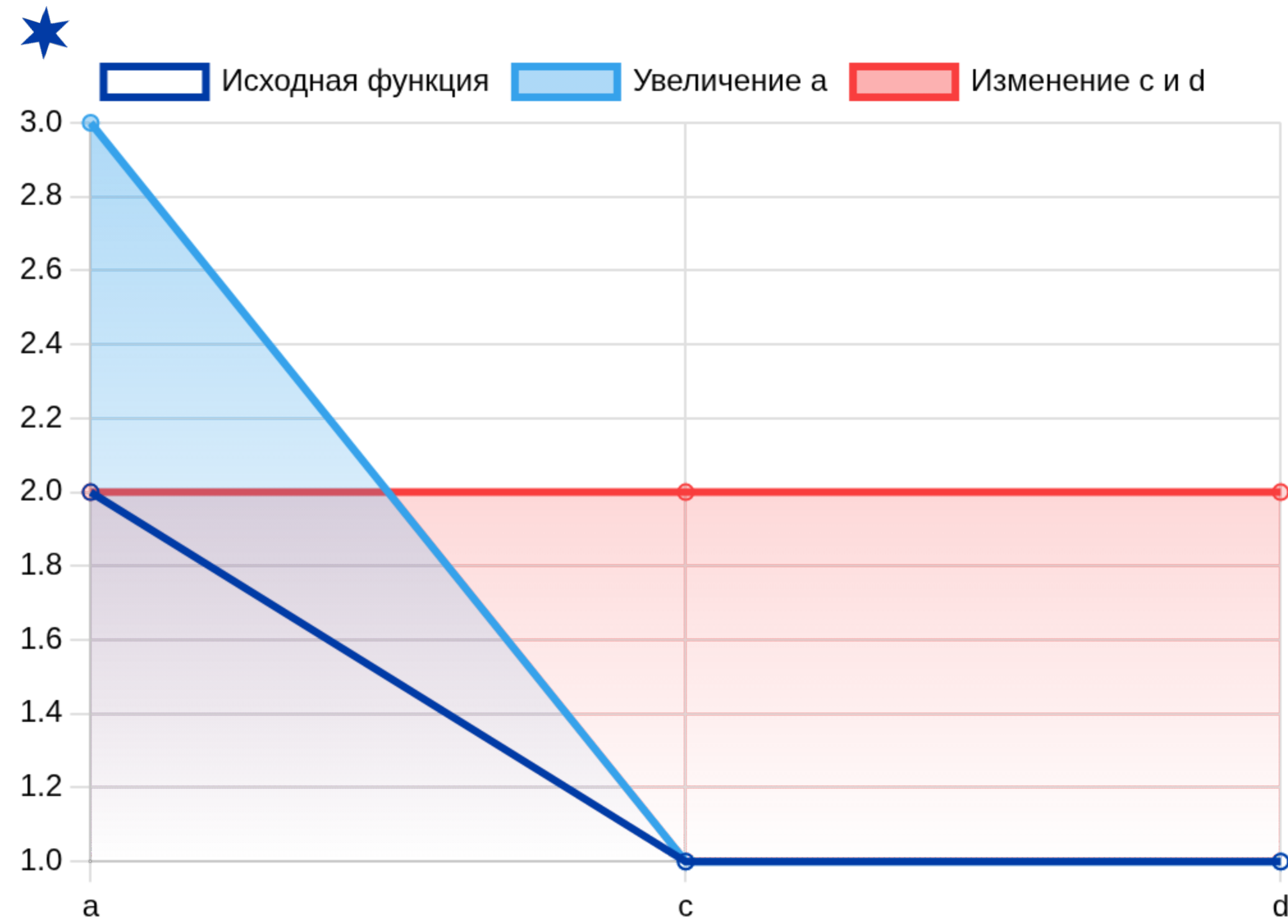
Последовательная проверка нескольких условий даёт почти полное описание графика ещё до его построения.

Что проверить	Условие	Результат
Область определения	$cx+d\neq 0$	запрещённые x
Вертикальная асимптота	$x=-d/c$	точка разрыва
Горизонтальная асимптота	$y=a/c$	уровень графика
Ноль функции	$ax+b=0$	пересечение с Ox
Пересечение с Oy	$x=0$	значение при нуле
Монотонность	знак $ad-bc$	возрастание/убывание



Стандартные свойства дробно-линейной функции

Как меняется график при изменении коэффициентов



Сравнительный пример на основе $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Сравнение трёх вариантов показывает, что даже при одинаковом типе функции положение асимптот и ветвей заметно меняется.

Коэффициенты влияют не по отдельности, а совместно: сдвиг одной части формулы сразу отражается на всей конфигурации графика.

Что важно запомнить о дробно-линейной функции

Дробно-линейная функция кажется сложной только на первый взгляд: её график читается через область определения, асимптоты, нули и центр симметрии. Освоив эти шаги, можно уверенно строить и исследовать такие функции.

