

Степень с натуральным показателем и её свойства

Краткая запись повторного
умножения и правила
преобразования выражений.



Зачем нужны степени в алгебре

Степени позволяют записывать длинные произведения короче, быстрее считать и легче преобразовывать выражения. Эта тема помогает понять формулы, упростить дроби и подготовиться к дальнейшему изучению алгебры в 7 классе и выше.



Определение степени

01

Что означает запись

Запись a^n показывает, что число a умножают само на себя n раз. Это удобный способ заменить длинное повторяющееся произведение короткой математической записью.

02

Основание степени

Число a называют основанием степени. Именно оно повторяется в произведении и определяет, какое число умножают несколько раз подряд.

03

Показатель степени

Число n называют показателем степени. Оно показывает, сколько раз основание входит в произведение и сколько одинаковых множителей нужно записать.

04

Примеры записи

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, $7^4 = 2401$. В каждом случае показатель указывает число повторений основания.



Как читают и записывают степени

Как читается запись

Запись a^n читают как «а в степени n». Так сразу понятно, что речь идёт о повторном умножении одного и того же числа.

Где стоят части записи

Основание пишут внизу слева, а показатель — справа сверху. Такое расположение помогает быстро увидеть, какое число повторяется и сколько раз.

Примеры чтения

Запись 4^3 читают «четыре в третьей степени», а 10^2 — «десять во второй степени». Эти примеры помогают привыкнуть к правильному произношению.

Зачем это удобно

Степени позволяют кратко записывать большие числа. Например, $10^3 = 1000$, а $10^6 = 1000000$. Такая запись экономит время и место в тетради.

Основные свойства степеней с натуральным показателем

Свойство	Правило	Пример
Умножение	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Деление	$a^m : a^n = a^{(m-n)}$	$7^5 : 7^2 = 7^3$
Степень степени	$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$	$(3^2)^4 = 3^8$
Произведение	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$

Четыре главных правила помогают преобразовывать выражения со степенями и делать вычисления короче.

Свойства степеней заменяют длинные вычисления короткой и удобной записью, что облегчает упрощение выражений.

Алгебра, 7 класс: свойства степеней с натуральным показателем

Умножение степеней с одинаковым основанием

01

Главное правило

При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$.
Основание остаётся тем же, потому что множители не меняются.

02

Почему так происходит

В произведении одинаковые множители просто объединяются в одну группу. Поэтому вместо двух степеней с одним основанием получается одна степень с большим показателем.

03

Пример с двойкой

$2^3 \cdot 2^4 = 2^{(3+4)} = 2^7 = 128$. Сначала складывают показатели, затем записывают результат в виде одной степени и находят значение.

04

Пример с пятёркой

$5^2 \cdot 5^3 = 5^{(2+3)} = 5^5 = 3125$. Это правило удобно, когда нужно быстро упростить выражение без длинного перемножения всех множителей.

Деление степеней с одинаковым основанием

01

Основное правило

При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются: $a^m : a^n = a^{(m-n)}$, если $m > n$. Основание при этом не изменяется.

02

Смысл сокращения

При сокращении одинаковых множителей в числителе и знаменателе остаётся меньшее количество одинаковых множителей. Именно поэтому показатель уменьшается на величину второго показателя.

03

Пример с семёркой

$7^5 : 7^2 = 7^{(5-2)} = 7^3 = 343$. После вычитания показателей остаётся степень с меньшим количеством повторений основания.

04

Пример с девяткой

$9^4 : 9^1 = 9^{(4-1)} = 9^3 = 729$. Это правило помогает быстро сокращать выражения и проверять вычисления без лишних шагов.

Возведение степени в степень

○ Как работает правило

Когда степень возводят в степень, показатели перемножаются: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Сначала сохраняют основание, затем находят общее число повторений.

○ Пример с тройкой

$(3^2)^4 = 3^{(2 \cdot 4)} = 3^8 = 6561$. Сначала перемножают показатели, а потом находят значение полученной степени.

○ Почему показатели умножаются

Внешняя степень показывает, сколько раз повторяется уже готовая степень. Поэтому каждый множитель внутренней степени повторяется ещё n раз.

○ Пример с двойкой

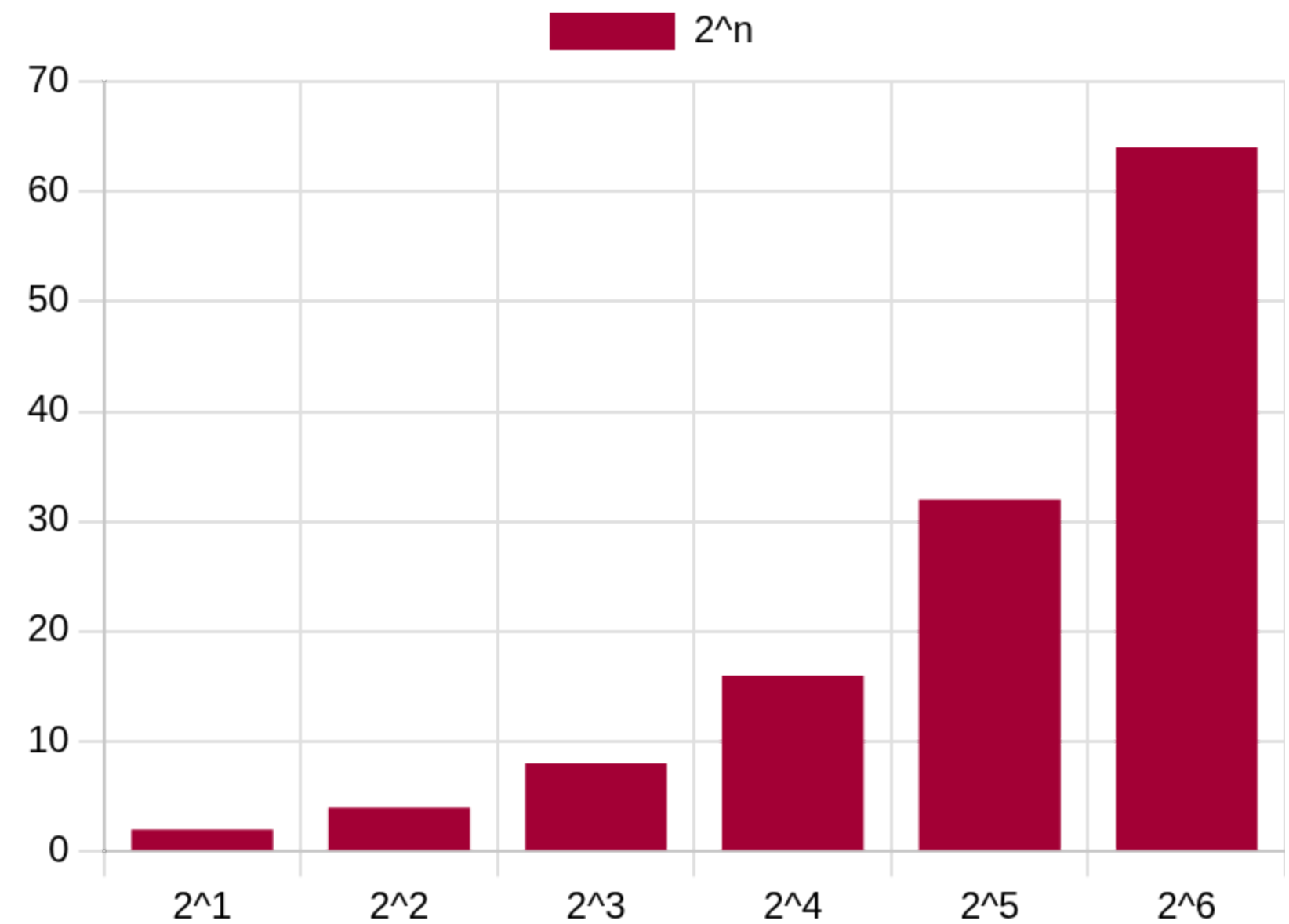
$(2^3)^2 = 2^{(3 \cdot 2)} = 2^6 = 64$. Это свойство особенно полезно, когда нужно работать с большими степенями и не запутаться в записи.

Как быстро растут степени числа 2

Даже при небольшом основании значения быстро увеличиваются, поэтому степени удобно использовать для краткой записи и сравнения больших чисел.

Каждое увеличение показателя на 1 удваивает результат, поэтому рост степени становится всё быстрее.

Вычисления по определению степени: 2^1 – 2^6



Квадрат и куб в геометрии

01

Площадь квадрата

Число 2^2 связано с площадью квадрата со стороной 2. Здесь степень показывает, что длина умножается на ширину, то есть на два одинаковых измерения.

02

Объём куба

Запись 2^3 связана с объёмом куба со стороной 2. В этом случае три одинаковых измерения перемножаются: длина, ширина и высота.

03

Смысл степени

Степень помогает понять, сколько одинаковых измерений участвует в вычислении. Для площади их два, а для объёма — уже три.

04

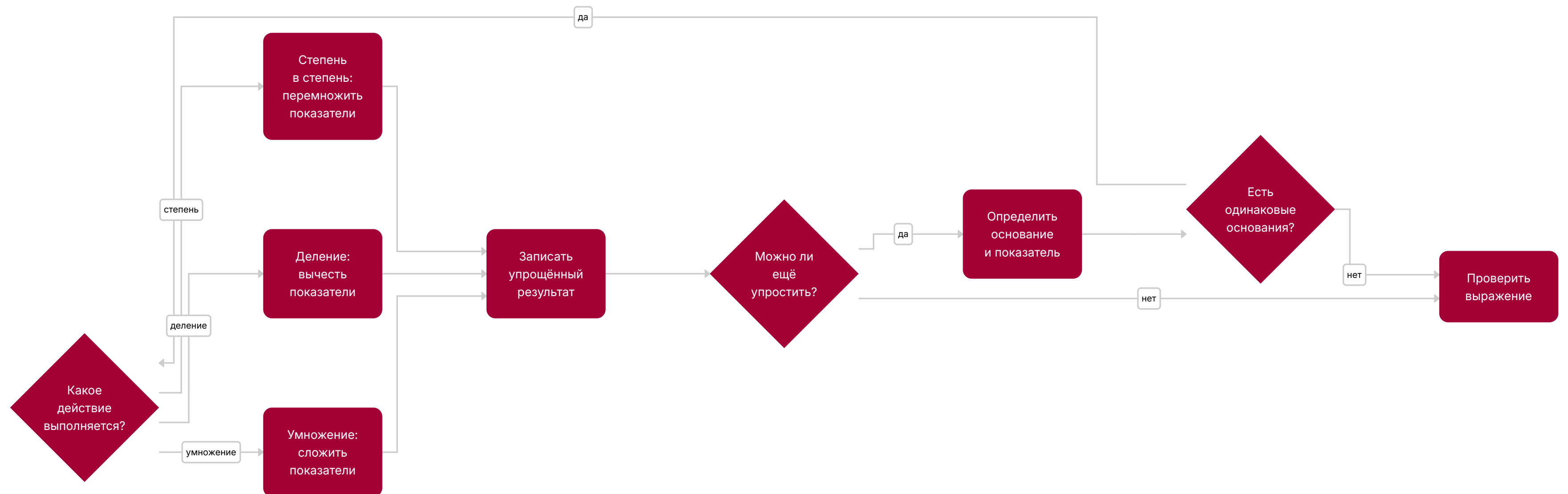
Что покажет иллюстрация

На рисунке удобно показать квадрат и куб с подписанными сторонами. Тогда сразу видно, что $2^2 = 4$, а $2^3 = 8$.



Алгоритм преобразования выражений со степенями

Последовательность действий при выборе свойства степени: определить вид выражения, найти одинаковые основания, выбрать правило и упростить запись.



Типичные ошибки при работе со степенями

Путают основание и показатель

В выражении $2^3 \cdot 2^4$ нужно складывать показатели, а не менять основание. Запись 4^7 неверна, потому что основание остаётся тем же и не складывается с другим числом.

Неверно раскрывают скобки

Степень суммы нельзя распределять по слагаемым. Выражение $(2+3)^2$ не равно $2^2 + 3^2$, потому что сначала нужно вычислить сумму внутри скобок.

Не замечают роль скобок

Скобки меняют порядок действий и смысл записи. Если переписать выражение невнимательно, можно получить другой результат, хотя внешне примеры выглядят похоже.

Степени и запись больших чисел



Быстрая запись

Степени числа 10 позволяют записывать большие числа короче и без длинных цепочек нулей. Это ускоряет вычисления и делает запись аккуратнее.



Порядок величины

Запись 10^3 , 10^4 или 10^6 сразу показывает, насколько число велико. По числу нулей легко понять масштаб и сравнить два значения.



Полезно в науке

В физике и других точных науках степенная запись помогает быстро работать с очень большими и очень маленькими величинами, не перегружая формулы.



Удобно в информатике

В программах и таблицах степенные формы уменьшают запись данных и помогают читать значения быстрее, особенно когда приходится сравнивать большие числа.

Сравнение длинной записи и записи степенью

Длинное произведение	Степень	Результат
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^5	32
$7 \cdot 7 \cdot 7$	7^3	343
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^4	10000

В таблице показано, как повторное умножение можно заменить степенной записью, сохранив тот же результат и сделав вычисление короче.

Степенная запись сокращает выражение, помогает быстрее считать и удобнее проверять ответ без лишних повторов.

Примеры из темы «Степень с натуральным показателем»

Степень как замена одинаковых множителей

01

Найти повторяющееся число

Сначала посмотрите, какое число повторяется в произведении и сколько раз оно встречается. Именно это число станет основанием степени, а количество повторов — показателем.

02

Записать кратко и точно

Если одинаковых множителей несколько, их можно заменить одной степенью без изменения значения выражения. Например, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, а $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$.

03

Использовать в преобразованиях

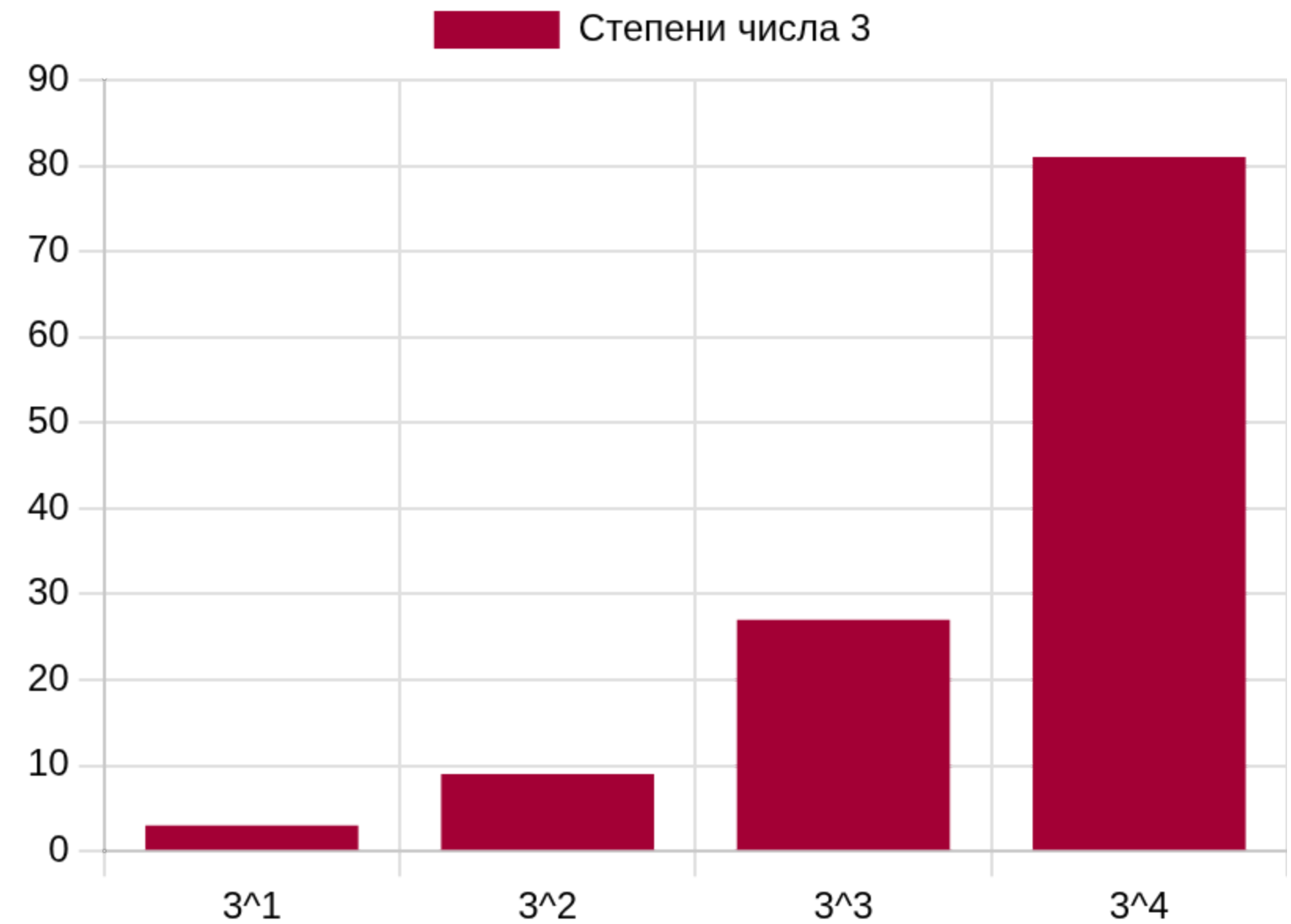
Такой переход полезен при упрощении выражений, решении уравнений и вычислениях. Он делает запись короче, а работу с большими числами — заметно удобнее.

Сравнение значений степеней числа 3

Даже небольшое увеличение показателя быстро меняет результат: каждое новое значение получается умножением предыдущего на 3.

Рост идёт очень быстро, поэтому степень удобно использовать для описания изменений, где значения увеличиваются многократно.

Вычисления по определению степени: 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4



Где встречаются степени в жизни

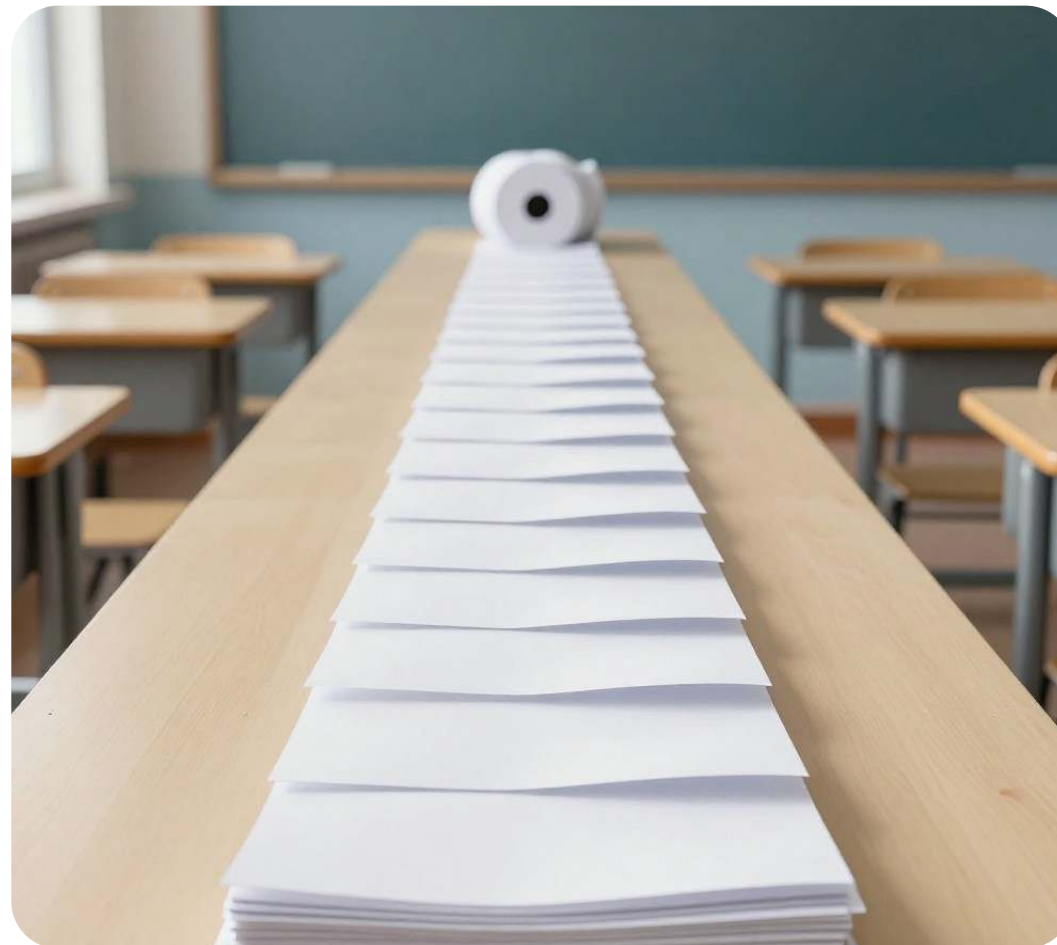
Площадь и объём рядом с нами

Когда нужно найти площадь квадрата или объём куба, степень помогает записать формулу коротко и понятно. Поэтому на чертежах и в учебных задачах часто встречаются записи вида 2^2 и 2^3 , связанные с длиной ребра.



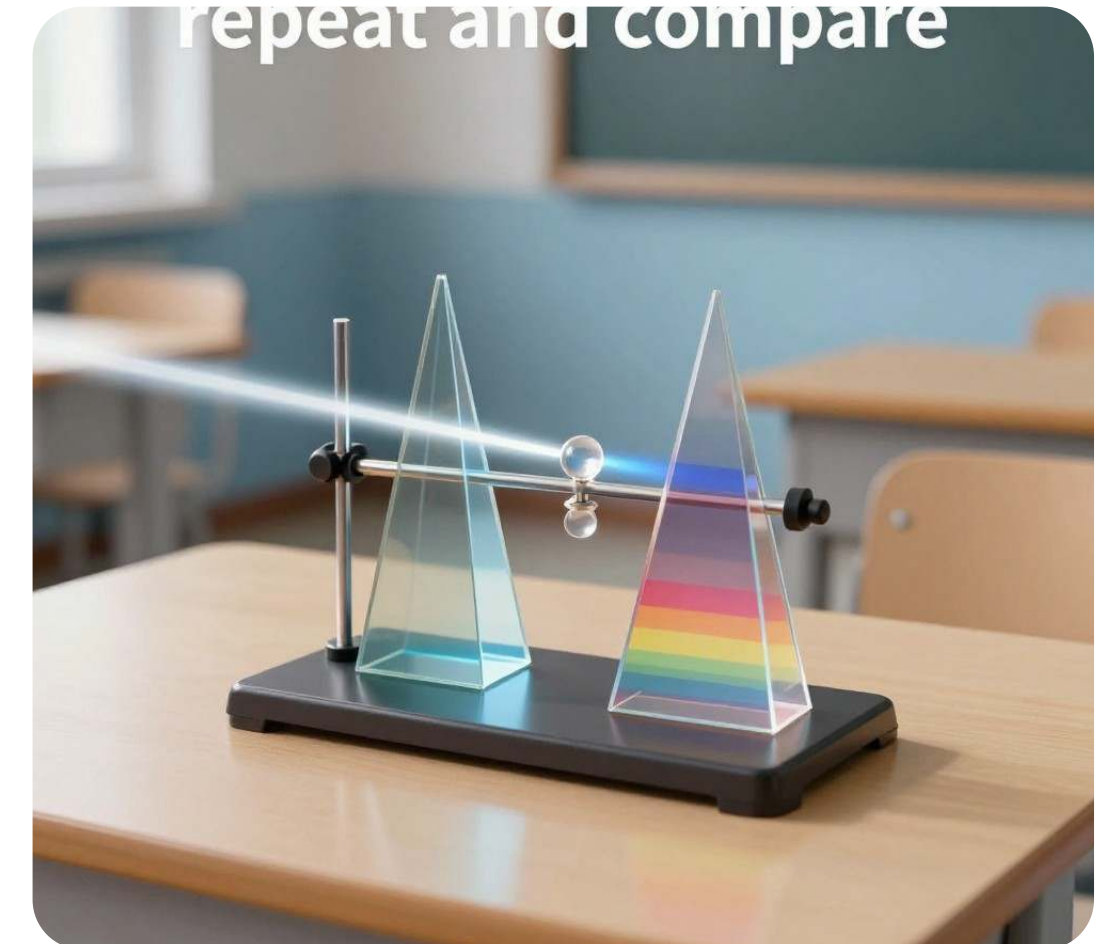
Большие числа без лишних нулей

Научная запись экономит место, если число слишком велико для обычной строки. В тетради, калькуляторе или учебнике запись 10^6 сразу показывает масштаб и помогает не ошибиться при подсчётах.



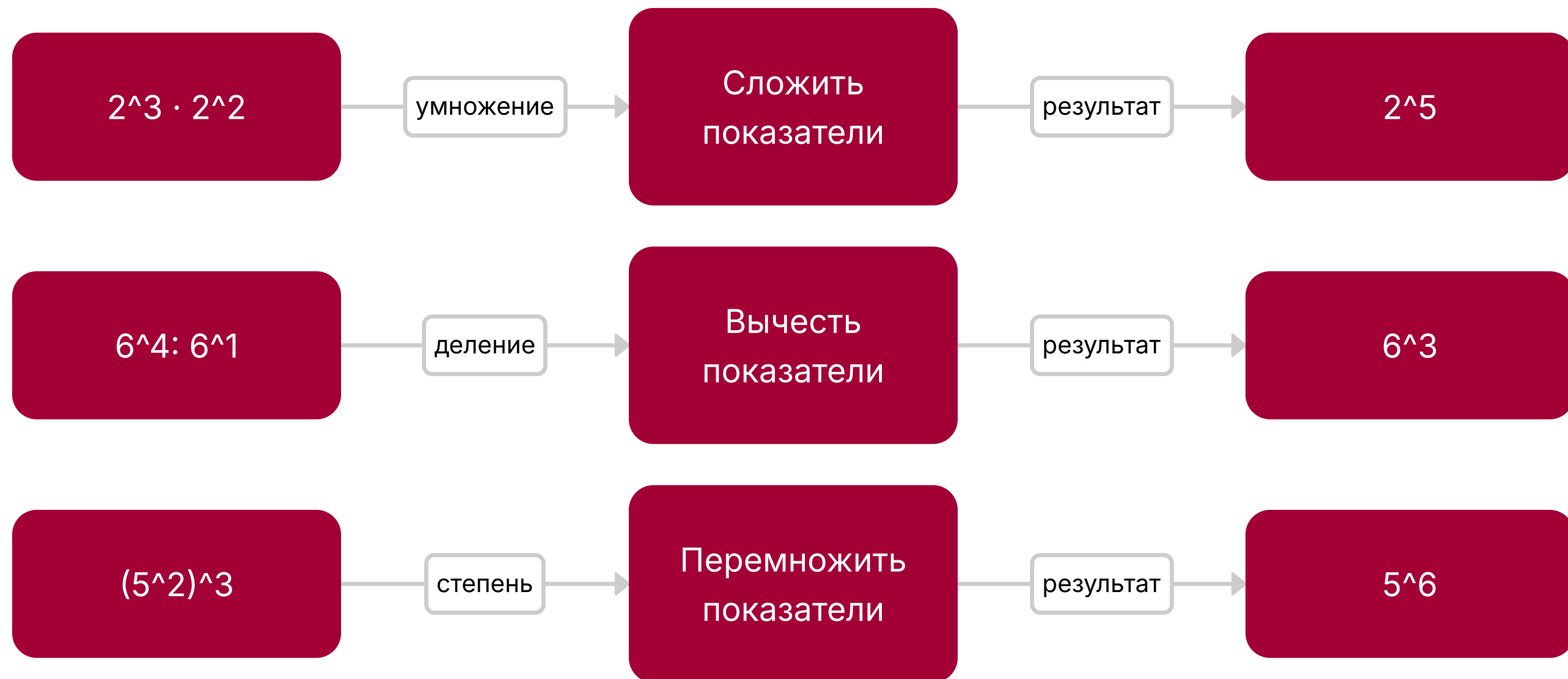
Уроки физики и информатики

В формулах для измерений, вычислений и сравнения величин степени встречаются очень часто. Они позволяют работать с разными масштабами, не переписывая длинные числа каждый раз заново.



Проверка свойств степени на примерах

Три коротких примера показывают, как меняются показатели при умножении, делении и возведении степени в степень.



3

главных свойства степени с натуральным показателем

Три основные операции со степенями помогают быстро упрощать выражения: показатели складывают, вычитают или перемножают в зависимости от действия.

Правила степеней с натуральным показателем

Степени: короткая запись, точный результат

Степень с натуральным показателем делает запись повторного умножения короче, а вычисления — понятнее. Эти правила пригодятся и дальше, когда вы будете преобразовывать выражения и решать более сложные задания.