

Комплексные числа и квадратные уравнения

От действительных чисел к полным решениям
уравнений.



От неразрешимого к решаемому

- Когда квадратное уравнение не имеет действительных корней, математика не останавливается: она расширяет систему чисел. Именно так появляются комплексные числа, сохраняющие формулу корней и открывающие новые способы описания решений.



Мнимая единица и запись комплексного числа

1 Определение i

Мнимая единица вводится равенством $i^2 = -1$. Это не обычное число на прямой, а новый объект, который позволяет извлекать корни из отрицательных чисел в алгебраических преобразованиях.

2 Стандартная форма

Любое комплексное число записывают как $a + bi$, где a — действительная часть, а b — мнимая часть. Такая форма делает вычисления удобными и единообразными для всех примеров.

3 Частный случай

Если $b = 0$, число становится действительным, поэтому все действительные числа входят в систему комплексных как особый случай. Это показывает, что новое множество не отменяет старое, а включает его.

4 Равенство чисел

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда совпадают обе части: действительная и мнимая. Например, равенство $3 + 2i = 3 + 2i$ проверяется по каждому коэффициенту отдельно.

Комплексная плоскость как геометрическая модель

Координаты точки

Число $a + bi$ удобно изображать точкой с координатами (a, b) . Тогда алгебраическая запись получает наглядный геометрический смысл, а вычисления можно связывать с положением точки на плоскости.

Оси Re и Im

Горизонтальная ось отвечает за действительную часть, а вертикальная — за мнимую. Благодаря этому комплексная плоскость становится естественным продолжением обычной координатной системы.

Модуль числа

Модуль $|a + bi|$ равен расстоянию от начала координат до соответствующей точки. Он показывает, насколько далеко расположено число от нуля, и помогает сравнивать комплексные числа геометрически.

Примеры на плоскости

Точки $3 + 2i$, $-1 + i$ и $-2 - 3i$ занимают разные положения, но все они подчиняются одной и той же модели. Это делает комплексные числа удобными для визуального анализа.



Арифметика комплексных чисел

+

Сложение

При сложении складывают отдельно действительные и мнимые части. Это сохраняет структуру записи и позволяет работать с комплексными числами так же последовательно, как с многочленами.

—

Вычитание

Вычитание выполняют по тем же правилам: из каждой части вычитают соответствующую часть второго числа. Благодаря этому результат снова остаётся комплексным числом в стандартной форме.

×

Умножение

При умножении раскрывают скобки и заменяют i^2 на -1 . Именно это превращает произведение в выражение вида $(ac - bd) + (ad + bc)i$ и делает вычисление точным.

÷

Деление

Чтобы избавиться от i в знаменателе, числитель и знаменатель умножают на сопряжённое число. Так дробь приводится к виду без мнимой единицы внизу.

Степени мнимой единицы

Степень	Результат	Закономерность
i^1	i	исходная
i^2	-1	по определению
i^3	$-i$	умножение на i
i^4	1	цикл повторяется

- Четыре последовательных степени i образуют циклический повтор, который позволяет быстро вычислять любые большие показатели.

Все степени i повторяются с периодом 4, поэтому любую высокую степень можно свести к одному из четырёх значений.
- Следует из равенства $i^2 = -1$ и последовательного умножения степеней.

Квадратное уравнение и дискриминант

1 Общий вид

Квадратное уравнение записывают как $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Именно коэффициенты a , b и c определяют форму графика и характер возможных корней.

2 Формула D

Дискриминант вычисляют по формуле $D = b^2 - 4ac$. Это число заранее показывает, сколько действительных корней можно ожидать, не решая уравнение полностью.

3 Положительный случай

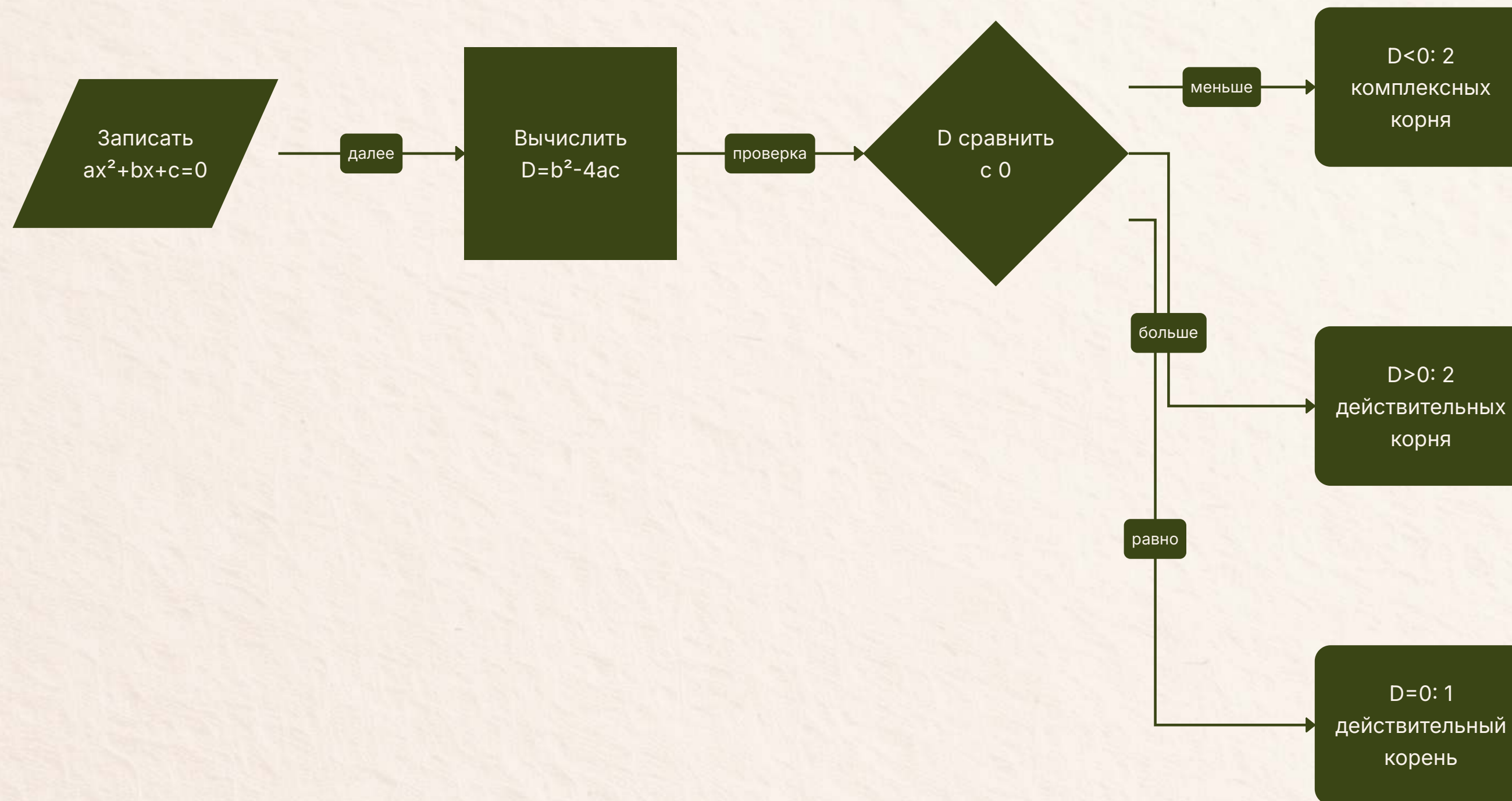
Если $D > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня. На числовой прямой это означает две отдельные точки пересечения с осью решений.

4 Нулевой и отрицательный случаи

При $D = 0$ корень один, но кратности 2. Если же $D < 0$, действительных корней нет, однако появляются два комплексных сопряжённых решения.

Определение вида корней по дискриминанту

Последовательность шагов показывает, как знак дискриминанта определяет тип решений.



Как знак дискриминанта связан с количеством действительных корней

Диаграмма показывает только действительные решения. Для случая $D < 0$ важно помнить: отсутствие корней на прямой не означает отсутствие решений вообще.

Знак дискриминанта полностью задаёт число действительных корней: от двух до нуля. При $D < 0$ решение переходит в комплексную область.

Стандартные свойства квадратного уравнения и дискриминанта.



Формула корней при любом значении дискриминанта

1 Универсальная запись

Формула $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$ остаётся верной для любого дискриминанта. Это делает её главным инструментом решения квадратных уравнений без исключений.

2 Отрицательный D

Если $D < 0$, то корень из D записывают через мнимую единицу: $\sqrt{D} = i\sqrt{|D|}$. Так отрицательное число становится допустимым внутри комплексной системы.

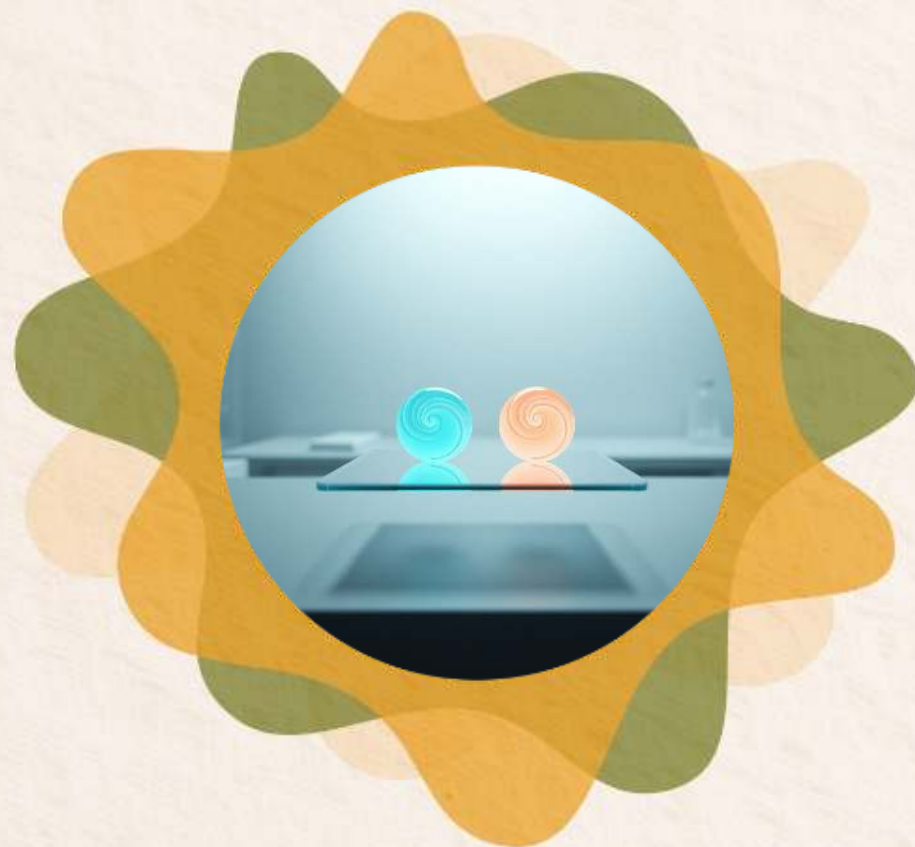
3 Вид корней

Подстановка даёт $x = (-b \pm i\sqrt{|D|}) / (2a)$. Оба решения различаются только знаком при i , поэтому всегда образуют пару сопряжённых чисел.

4 Практический смысл

Такая запись позволяет не менять алгоритм решения в зависимости от знака D. Формула остаётся одной и той же, а меняется только область, в которой находятся корни.

Когда корни отражают друг друга



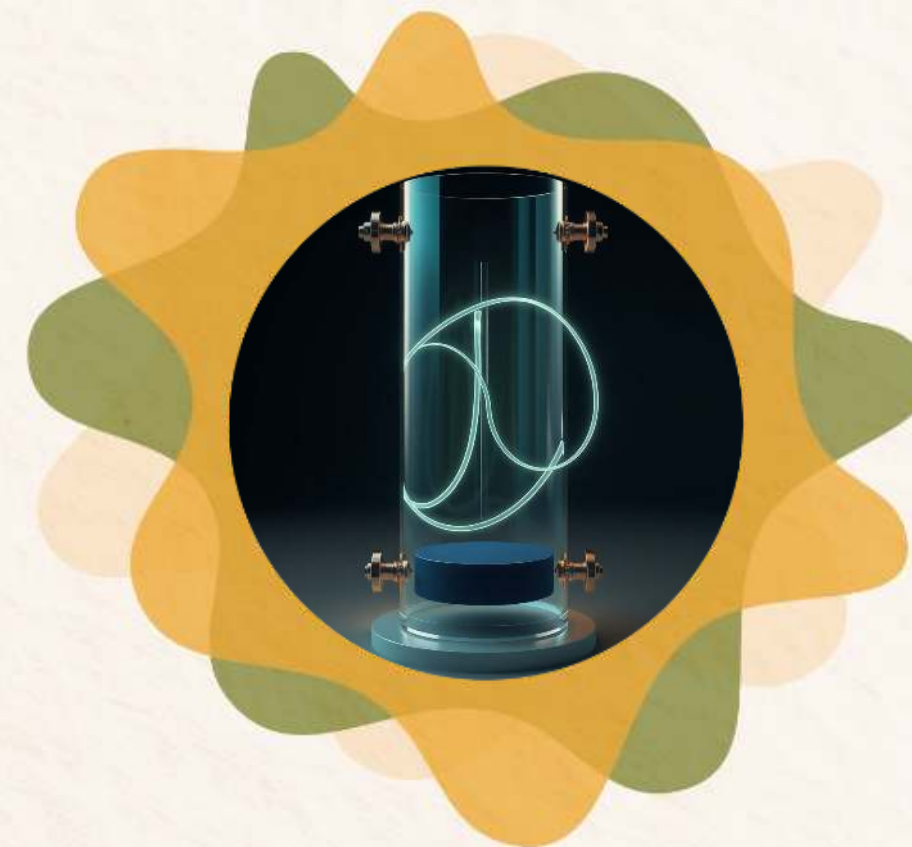
Зеркальная пара на плоскости

Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ выглядят как отражения относительно действительной оси. У них совпадает действительная часть, а мнимая меняет знак, поэтому точки на плоскости располагаются симметрично и сразу узнаются как пара.



Что дает такое соседство

Сумма сопряжённых чисел убирает мнимую часть и остаётся действительной: $2a$. Их произведение тоже не содержит i и равно a^2+b^2 , поэтому в алгебраических преобразованиях сопряжённые числа особенно удобны и устойчивы к вычислениям.



Почему это важно для уравнений

Если квадратное уравнение имеет отрицательный дискриминант, его корни неизбежно образуют сопряжённую пару. Это не случайность, а следствие структуры формулы корней, где знаки при i отличаются только в одном месте.

Примеры квадратных уравнений с комплексными корнями

Уравнение	D	Ответ
$x^2+1=0$	-4	$x=\pm i$
$x^2+4x+13=0$	-36	$x=-2\pm 3i$
$x^2-2x+5=0$	-16	$x=1\pm 2i$

Три коротких примера показывают, как отрицательный дискриминант приводит к комплексным решениям по одной и той же формуле.

Во всех трёх случаях дискриминант отрицателен, поэтому действительных корней нет, но формула дает две комплексные сопряжённые точки.

Вычисления по формуле корней квадратного уравнения

От ограничения к расширенной числовой системе



Сначала — только действительные числа

Обычная алгебра долго рассматривала только решения на числовой прямой. Этого хватало для многих задач, но не для уравнений вроде $x^2+1=0$.



Появление комплексных чисел

Мнимая единица i позволила записывать корни там, где дискриминант отрицателен. Формула квадратного уравнения сохранилась без исключений для всех случаев.



Полная картина решений

После расширения системы чисел каждый квадратный трёхчлен получает корни. Уравнение больше не делится на «разрешимые» и «безответные» случаи.

Как увидеть корни на комплексной плоскости



1. Найти координаты

Корень $a+bi$ изображается точкой с координатами (a, b) . Действительная часть задаёт положение по горизонтали, а мнимая — по вертикали, поэтому число становится геометрическим объектом.

2. Увидеть симметрию

Если корни сопряжены, их точки находятся по разные стороны от действительной оси на одинаковом расстоянии. Такая симметрия сразу показывает, что мнимые части равны по модулю и противоположны по знаку.

3. Сравнить расстояния

Модуль корня равен расстоянию от начала координат до точки. Он помогает оценить, насколько далеко решение находится от нуля, и связывает алгебру с привычной геометрией плоскости.

4. Понять структуру ответа

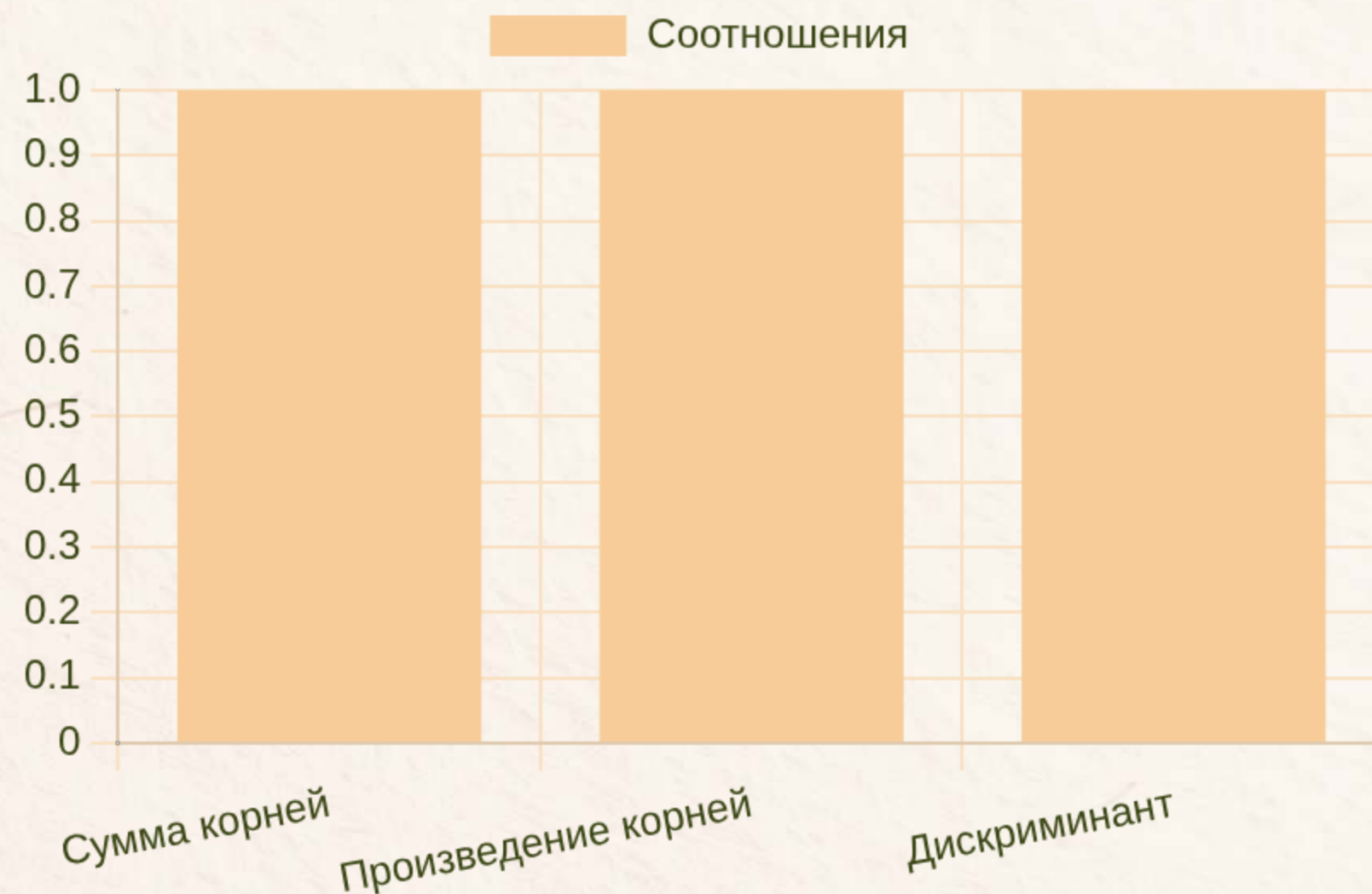
Комплексная запись не скрывает смысл решения, а делает его наглядным. Даже когда действительных корней нет, пара точек сохраняет закономерность и показывает, что уравнение решено полностью.

Какие параметры задают корни

Формулы связывают коэффициенты уравнения не только с числом корней, но и с их взаимным расположением. Это работает и для комплексных решений.

Коэффициенты a , b и c полностью определяют характер ответа: через сумму, произведение и дискриминант задаются тип и форма корней.

Формулы Виета и формула дискриминанта для $ax^2+bx+c=0$



Типичные ошибки при работе с комплексными корнями



Забывают мнимую единицу

При извлечении корня из отрицательного числа нужно обязательно записывать i . Без неё ответ теряет смысл и перестаёт быть комплексным решением.



Путают обозначения

Следует различать равенство $i^2 = -1$ и запись $\sqrt{-1} = i$. Это не одно и то же, поэтому подмена знаков приводит к неверным преобразованиям.



Теряют знак $\pm$

В формуле корней важно сохранить оба варианта знака. Иначе получится только одно решение, хотя квадратное уравнение с $D < 0$ имеет пару корней.



Ошибаются в умножении

При раскрытии скобок легко неверно учесть $i^2 = -1$. Тогда действительная и мнимая части смешиваются, и итоговый ответ становится неправильным.

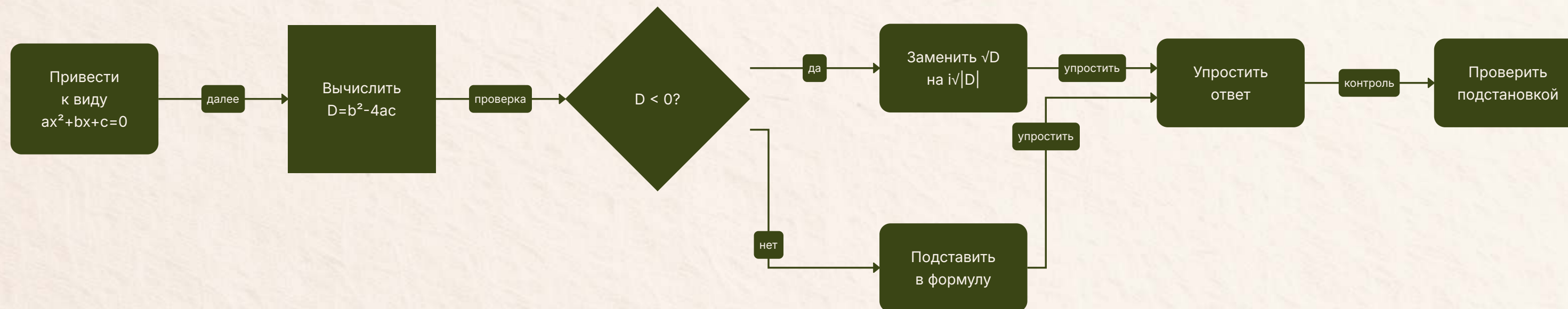


Не проверяют пару корней

Если корни комплексные, они должны быть сопряжёнными. Проверка подстановкой в исходное уравнение помогает быстро обнаружить вычислительную ошибку.

Пошаговое решение квадратного уравнения

Схема показывает универсальный алгоритм: он работает и для действительных, и для комплексных корней.

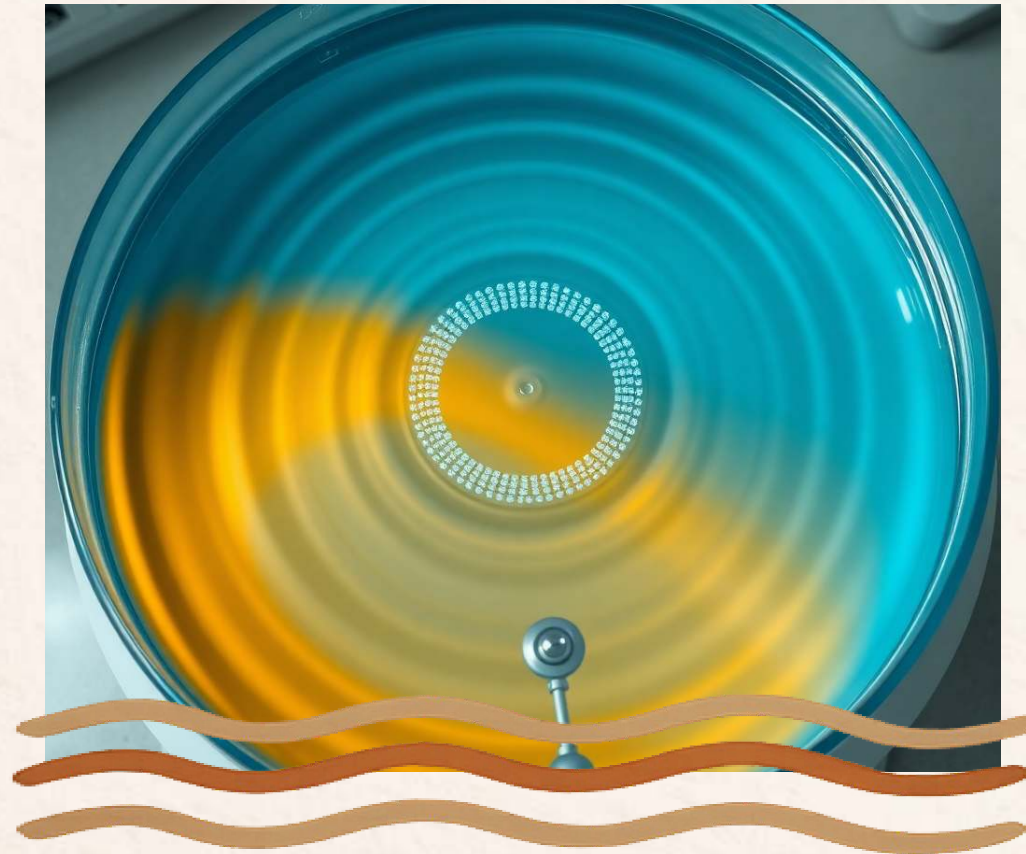


Где встречаются комплексные числа



Электрические цепи и ток

В электротехнике комплексные числа помогают описывать переменный ток, напряжение и сопротивление цепей. Такая запись удобна, потому что амплитуда и фаза объединяются в одной форме, а расчёты становятся короче и прозрачнее.



Волны и колебания

При изучении колебаний и волн комплексная форма позволяет компактно выражать периодические процессы. Вместо длинных тригонометрических преобразований используют одну запись, которая точно отражает и величину, и сдвиг по фазе.



Сигналы и изображение

В обработке сигналов и компьютерной графике комплексные числа применяют для поворотов, масштабирования и анализа формы сигналов. На схеме это можно показать синусоидой, вектором на плоскости и электрической цепью рядом.

Четыре опоры темы

Все ключевые идеи связаны между собой и работают как единая схема. Одно звено сразу объясняет другое, поэтому тема воспринимается цельно.

Отрицательный дискриминант, мнимая единица, сопряжение и общая формула образуют замкнутую систему, которая делает теорию квадратных уравнений полной.

Обобщение правил для комплексных чисел и квадратных уравнений



Комплексные числа расширяют возможности алгебры

Комплексные числа снимают ограничение отрицательного дискриминанта и сохраняют формулу корней в полном виде. Они соединяют алгебру с геометрией, а школьная тема превращается в основу для более широких математических и прикладных идей.