

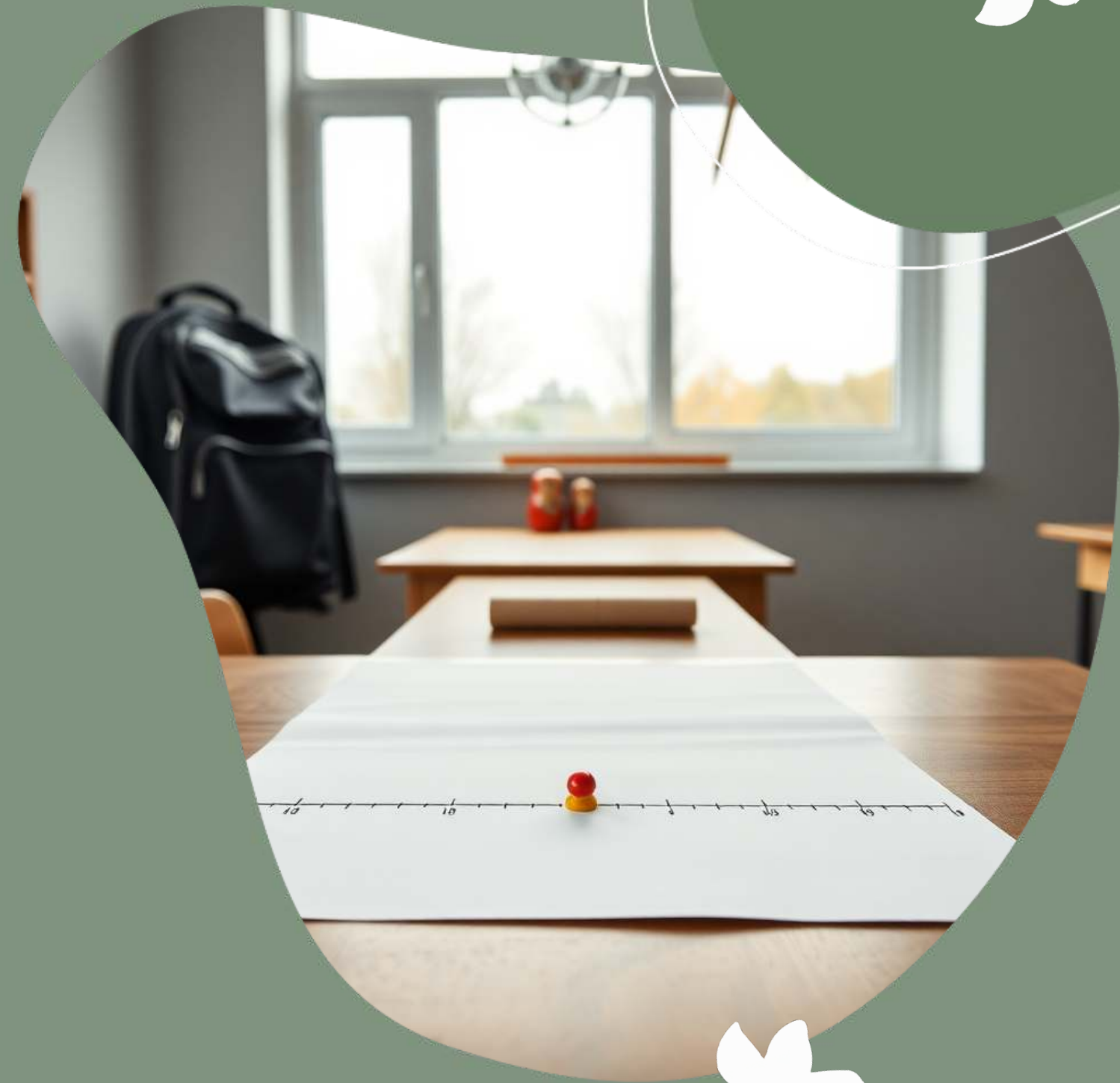
Неравенства с модулями: основная идея и виды заданий

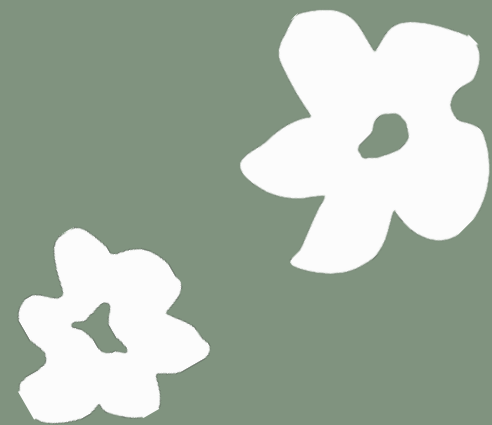
Модуль превращает неравенства в понятные промежутки на прямой.



Где в 9 классе встречаются неравенства с модулем

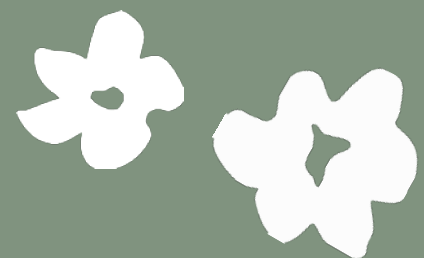
Эта тема связывает модуль числа, неравенства и числовые промежутки. Такие задания показывают, как описывать расстояние, отклонение от значения и допустимые границы на числовой прямой.





Модуль показывает, насколько число удалено от нуля, и всегда остаётся неотрицательным.

Школьный курс алгебры, 9 класс



0

**— ЭТО ТОЧКА
отсчёта, от которой
измеряют
расстояние до числа.**



Основные свойства модуля

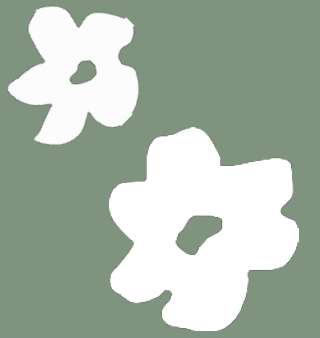
Соберём главные свойства модуля в краткую таблицу, чтобы видеть, как он действует в вычислениях и преобразованиях.

Модуль убирает знак числа и сохраняет только его величину.

Свойство	Запись	Смысл
Неотрицательность	$ a \geq 0$	Не бывает отрицательным
Нуль	$ a =0 \Leftrightarrow a=0$	Только для нуля
Симметрия	$ a = -a $	Знак не важен
Произведение	$ ab = a \cdot b $	Модули перемножаются
Частное	$ a/b = a / b $	При $b \neq 0$

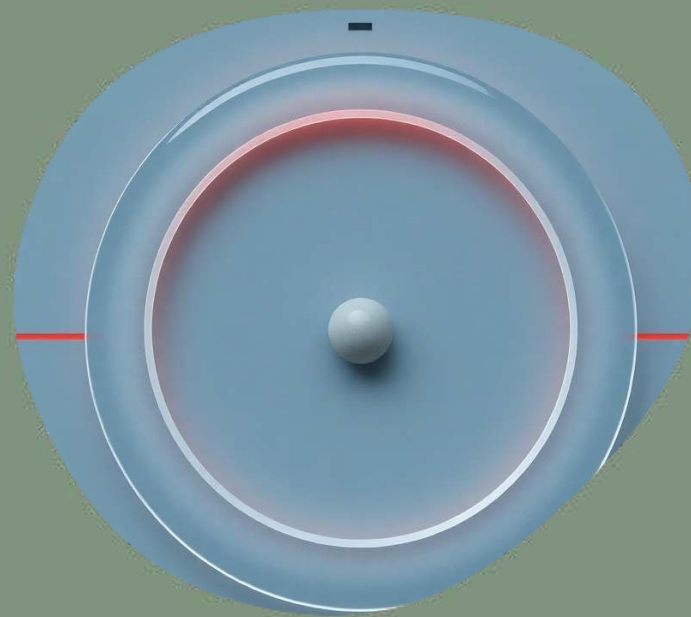
Школьный курс алгебры

Модуль на числовой прямой



Точка -3

Точка -3 находится слева от нуля, но расстояние до него равно трём единицам. Именно поэтому модуль этого числа равен 3, а не -3 . На прямой важна длина отрезка, а не направление движения.



Ноль как центр

Ноль удобно считать точкой отсчёта для всех измерений модуля. Если число совпадает с нулём, расстояние равно нулю. Это помогает увидеть, почему решения часто образуют симметричные промежутки вокруг центра.



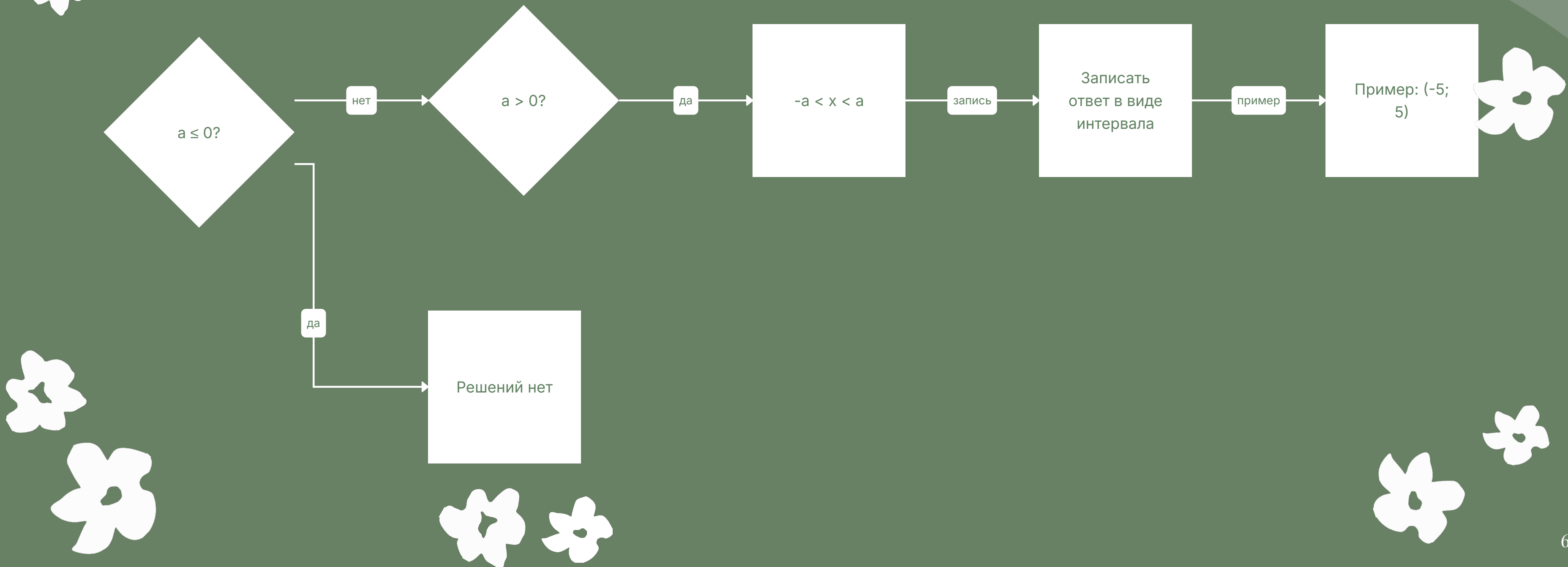
Точка 4

Число 4 расположено справа от нуля, и его модуль тоже равен 4. На рисунке легко заметить, что одинаковая длина может быть у чисел с разными знаками. Поэтому модуль объединяет противоположные числа.



Алгоритм решения неравенства $|x| < a$

Последовательность действий для перехода от модуля к обычному промежутку решений.



Смысл неравенства $|x| < a$

1. Ближе к нулю

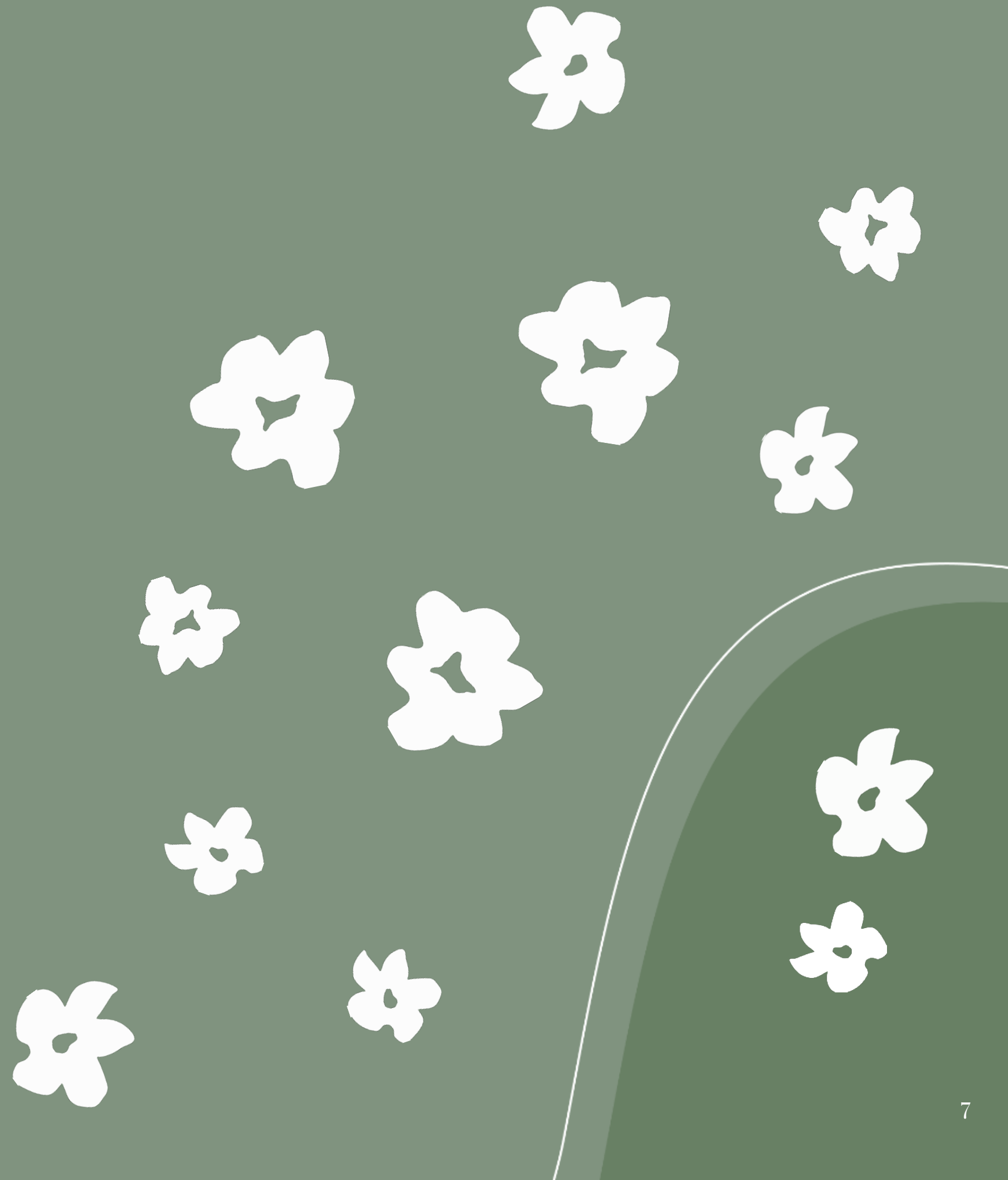
Неравенство $|x| < a$ означает, что число x находится ближе к нулю, чем число a . Поэтому решения собираются в центральный промежуток, а не по краям числовой прямой.

2. Границы не включаются

Если стоит знак $<$, то числа $-a$ и a не входят в ответ. Это удобно проверять на примерах: для $|x| < 3$ подходят -2 , 0 и $1,5$, но не подходят 3 и -4 .

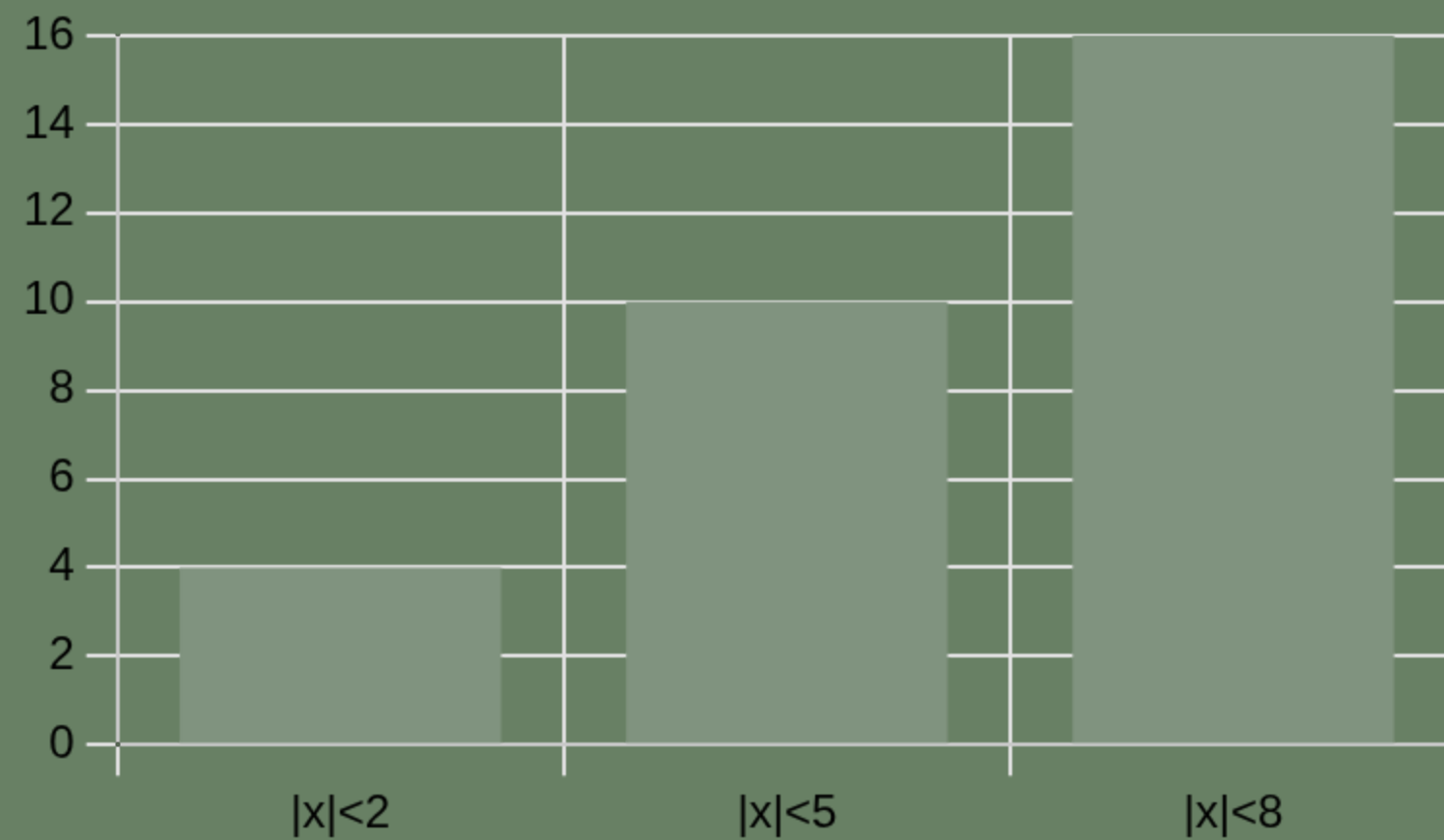
3. Как выглядит ответ

Все решения записывают одним промежутком: $-a < x < a$. Такой вид показывает, что подходят только числа внутри отрезка между двумя границами, симметричного относительно нуля.



Как меняется промежуток решений при разных значениях a

Длина промежутка решений



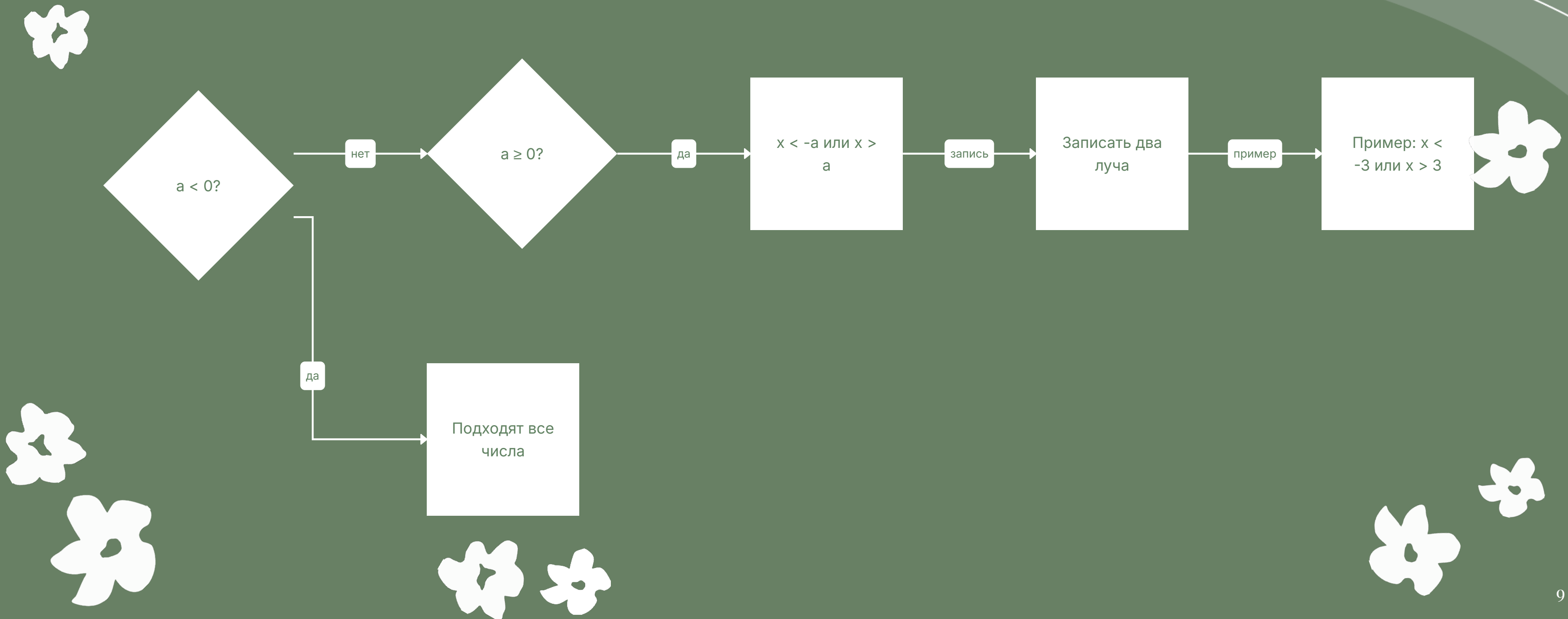
По правилу $|x| < a$, школьный курс алгебры

На диаграмме показана только длина ответа. Сам промежуток всегда расположен симметрично относительно нуля.

Чем больше a , тем шире область решений; длина промежутка при $a > 0$ равна $2a$.

Алгоритм решения неравенства $|x| > a$

Последовательность действий для случаев, когда нужно выйти за пределы центрального промежутка.



Смысл неравенства $|x| > a$

Дальше от нуля

Неравенство $|x| > a$ означает, что число x расположено дальше от нуля, чем число a . Поэтому решения находятся не в центре, а по обе стороны от него.

Два внешних луча

Если $a > 0$, ответ состоит из двух частей: $x < -a$ или $x > a$. Это удобно помнить как «всё слева» и «всё справа» от центрального промежутка.

Проверка на примерах

Для $|x| > 2$ подходят числа -5 , -3 и 4 , потому что их расстояние до нуля больше двух. Числа -1 , 0 и 2 не подходят, так как они слишком близки к центру.

Четыре основных случая неравенств с модулем

Сводная таблица показывает, как знак неравенства влияет на вид ответа: внутри промежутка, вне его и с включением границ или без них.

Знак $<$ или $>$ задаёт открытые границы, а $\leq$ и $\geq$ включают крайние значения в ответ.

Случай	Ответ	Границы
$ x < a$	$-a < x < a$	нет
$ x \leq a$	$-a \leq x \leq a$	да
$ x > a$	$x < -a$ или $x > a$	нет
$ x \geq a$	$x \leq -a$ или $x \geq a$	да



Открытые и закрытые точки на числовой прямой



Пустая точка

Пустая точка показывает, что граница не входит в решение. Так отмечают случаи с знаками $<$ и $>$, когда значение на конце промежутка или луча нужно исключить из ответа.

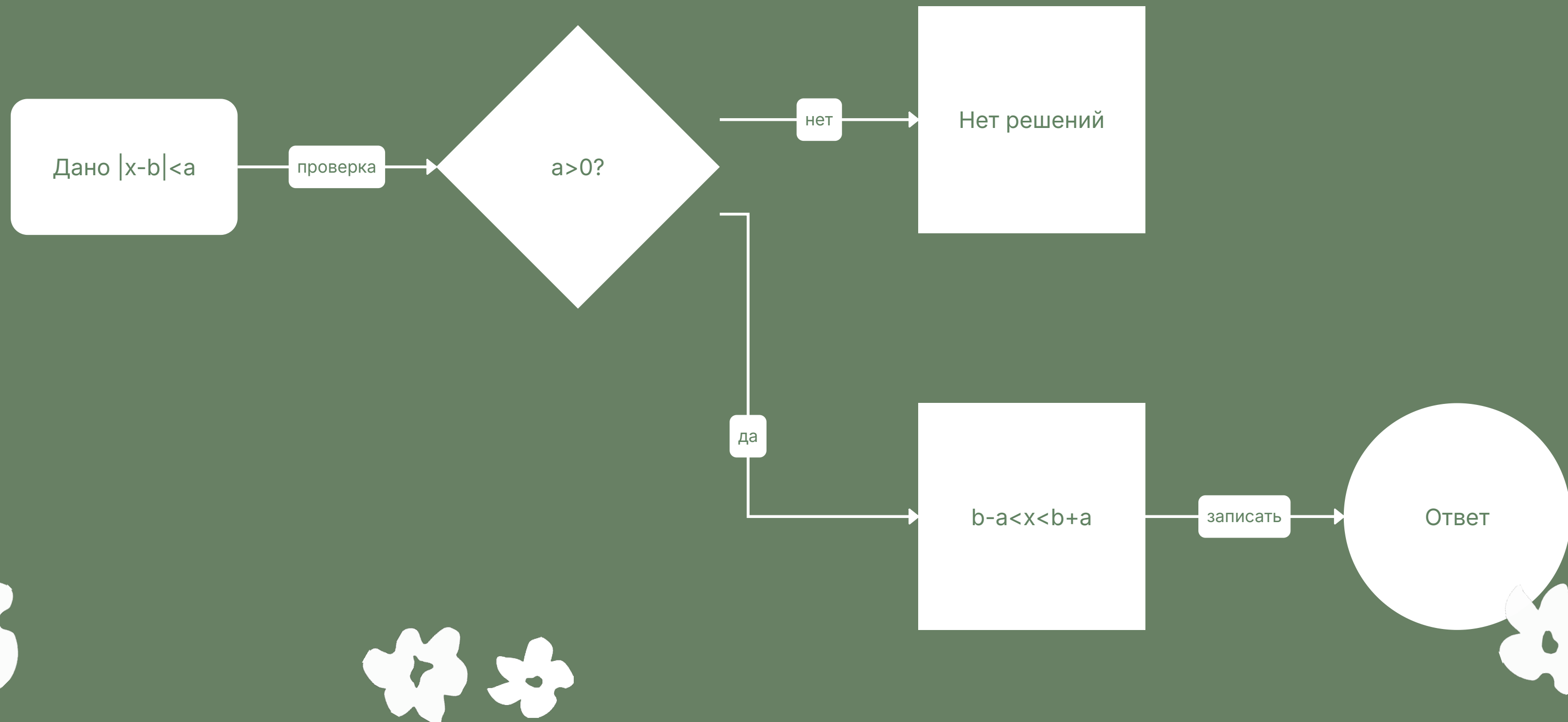
Закрашенная точка

Закрашенная точка означает, что граница входит в решение. Её используют при знаках $\leq$ и $\geq$, чтобы сразу видно было, что крайнее значение подходит и его нужно оставить в ответе.

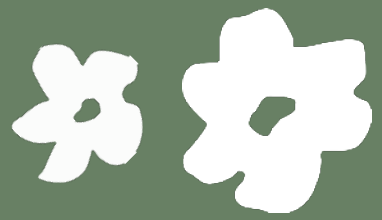


Решение неравенства $|x-b|<a$

Пошаговое преобразование неравенства через расстояние до точки b



Как решается $|x-b|>a$



Сначала проверяют a

Если $a \leq 0$, неравенство выполняется для любых x , потому что модуль не бывает отрицательным. При $a > 0$ задача требует искать точки, удалённые от центра b дальше заданного расстояния.

Затем записывают два луча

Получают два случая: $x < b-a$ или $x > b+a$. Например, $|x+1| > 3$ даёт $x < -4$ или $x > 2$. Ответ всегда распадается на два промежутка по обе стороны от центра.



Типичные ошибки при решении



Анализ типичных школьных ошибок при решении неравенств с модулем

Чаще всего ошибки появляются не в вычислениях, а в записи ответа и внимательности к знаку неравенства.

Наибольший риск связан с неравенством вида $>$: его нужно сразу записывать как два внешних промежутка.

Проверка найденного решения



Проверка внутри ответа

Подставьте число из найденного промежутка и убедитесь, что модуль действительно меньше или больше нужного числа. Для $|x| < 4$ подходят, например, 0 и 3, потому что их модуль меньше 4.



Проверка вне ответа

Возьмите число за пределами ответа и сравните результат. Если взять 4 или 5, то условие $|x| < 4$ уже не выполняется, а значит граница и внешние значения записаны правильно.



Почему это полезно

Такая проверка помогает заметить пропущенные границы, лишние промежутки и неверный знак. Она особенно важна в заданиях, где ответ нужно записать быстро и без лишних преобразований.

Примеры неравенств и ответы

В таблице собраны короткие примеры, показывающие, как модуль переходит в обычные промежутки и лучи.

Во всех примерах ответ зависит от знака неравенства и от того, смещён ли центр выражения на число b .

Неравенство	Ответ	Вид
$ x \leq 3$	$-3 \leq x \leq 3$	отрезок
$ x > 2$	$x < -2$ или $x > 2$	лучи
$ x-5 < 1$	$4 < x < 6$	интервал
$ x+2 \geq 4$	$x \leq -6$ или $x \geq 2$	лучи

Типовые примеры из темы «Неравенства с модулем»



Связь с измерениями и точностью



1. Допустимое отклонение

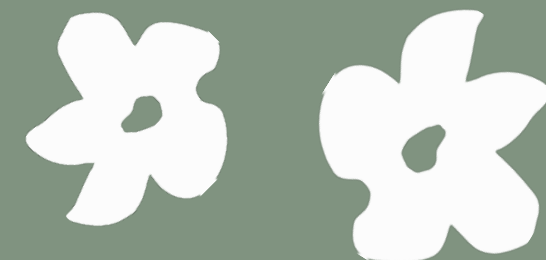
Запись с модулем показывает, насколько измерение может отличаться от заданного значения. Например, $|t-20| \leq 1$ означает, что температура лежит в пределах от 19 до 21 градуса.

2. Чтение условий

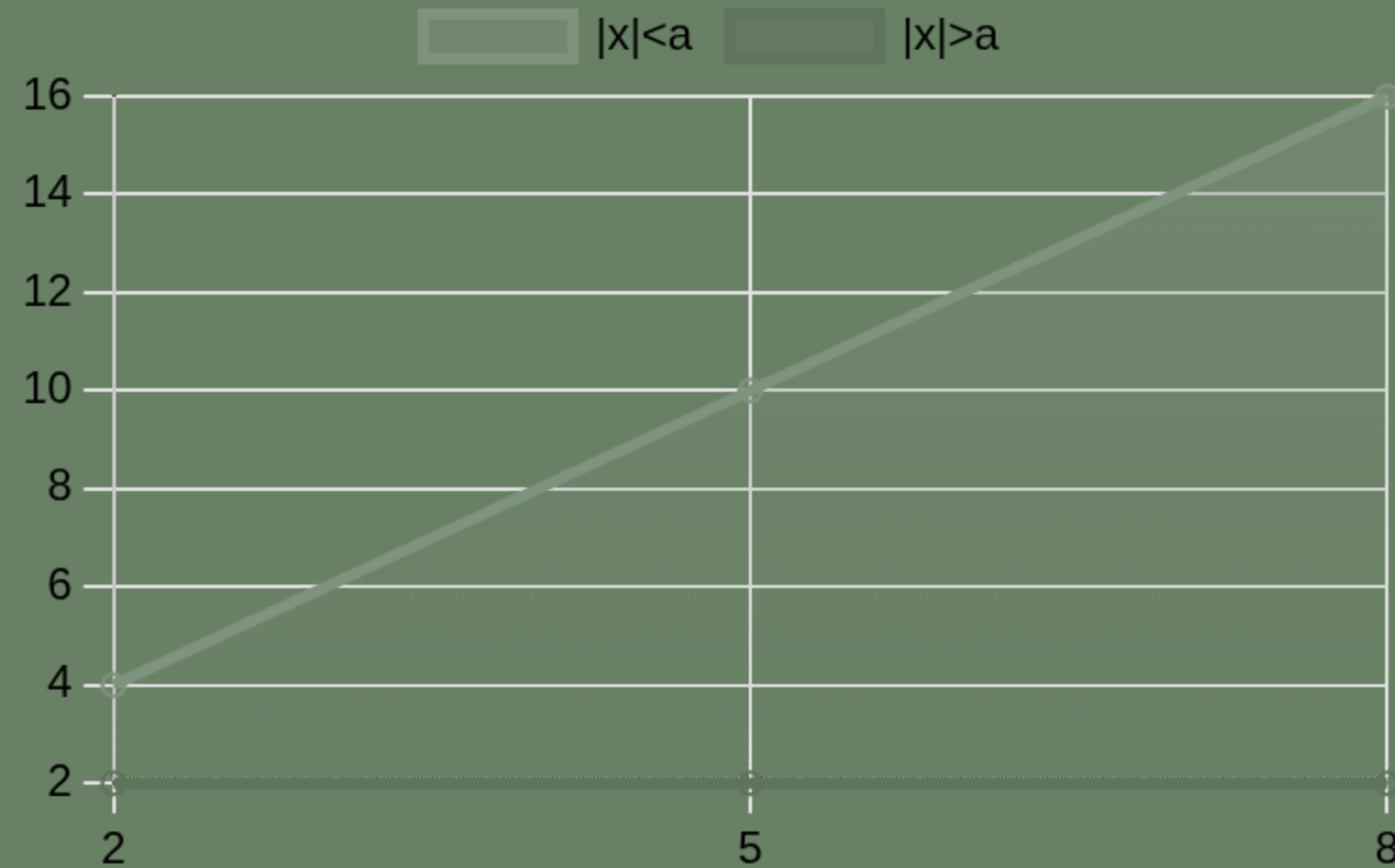
Сначала находят центр, затем рассматривают допустимое расстояние от него. Такой смысл особенно удобен в задачах про длину, массу, температуру и другие измеряемые величины.

3. Практическая польза

Модуль помогает переводить реальные условия в математическую запись без лишних слов. Поэтому его часто используют в физике, химии и в задачах на погрешность измерений.



Как меняется множество решений



Сравнение решений для $a=2, 5$ и 8 по правилам неравенств с модулем

Чем больше a , тем шире центральный промежуток и тем дальше внешние решения от нуля. Симметрия сохраняется при любом значении a .

Для $|x| < a$ множество решений расширяется, а для $|x| > a$ остаётся разорванным и удаляется от центра.

Главное о неравенствах с модулем

Неравенства с модулем удобно понимать через расстояние на прямой: внутри, вне или вокруг точки. Если помнить про границы, симметрию и знак неравенства, ответы получаются быстро и без ошибок.