

Фигуры вращения: связь плоских образов и пространственных тел

Плоская фигура, вращаясь вокруг оси, рождает
объёмное тело с точными формулами.



Почему фигур вращения не избежать в 11 классе

Эта тема соединяет геометрию и алгебру: здесь нужны формулы, степени, корни, π , площади и объёмы. Она помогает решать прикладные задачи о вместимости, материалах, моделях деталей и чтении чертежей.



Что называют телом вращения



Идея вращения

Тело вращения возникает, когда плоская фигура поворачивается вокруг прямой в своей плоскости или пересекающей её. В результате каждая точка описывает окружность, а плоский контур превращается в объёмную форму.



Пример цилиндра

Если вращать прямоугольник вокруг одной из его сторон, получается цилиндр. Его геометрия задаётся радиусом основания и высотой, а ось вращения проходит через центры двух равных кругов.



Пример конуса

При вращении прямоугольного треугольника вокруг катета образуется конус. Здесь особенно важны вершина, образующая и высота, потому что именно они определяют форму и вычисления площади и объёма.



Пример шара

Полуокружность, вращаясь вокруг диаметра, образует шар. Все точки его поверхности удалены от центра на одно и то же расстояние, поэтому шар отличается наибольшей симметрией среди тел вращения.

Цилиндр как модель повторяющейся формы

Два основания

У цилиндра два равных круглых основания, расположенных параллельно друг другу. Между ними находится боковая поверхность, а расстояние между основаниями называется высотой и определяет вытянутость фигуры.

Роль радиуса

Радиус основания задаёт размер поперечного сечения цилиндра и напрямую входит в формулы площади и объёма. Чем больше радиус, тем быстрее растут все геометрические характеристики тела.

Развёртка поверхности

Если боковую поверхность цилиндра развернуть на плоскость, получится прямоугольник. Его стороны равны длине окружности основания $2\pi r$ и высоте h , что удобно для вычисления площади материала.

Примеры вокруг нас

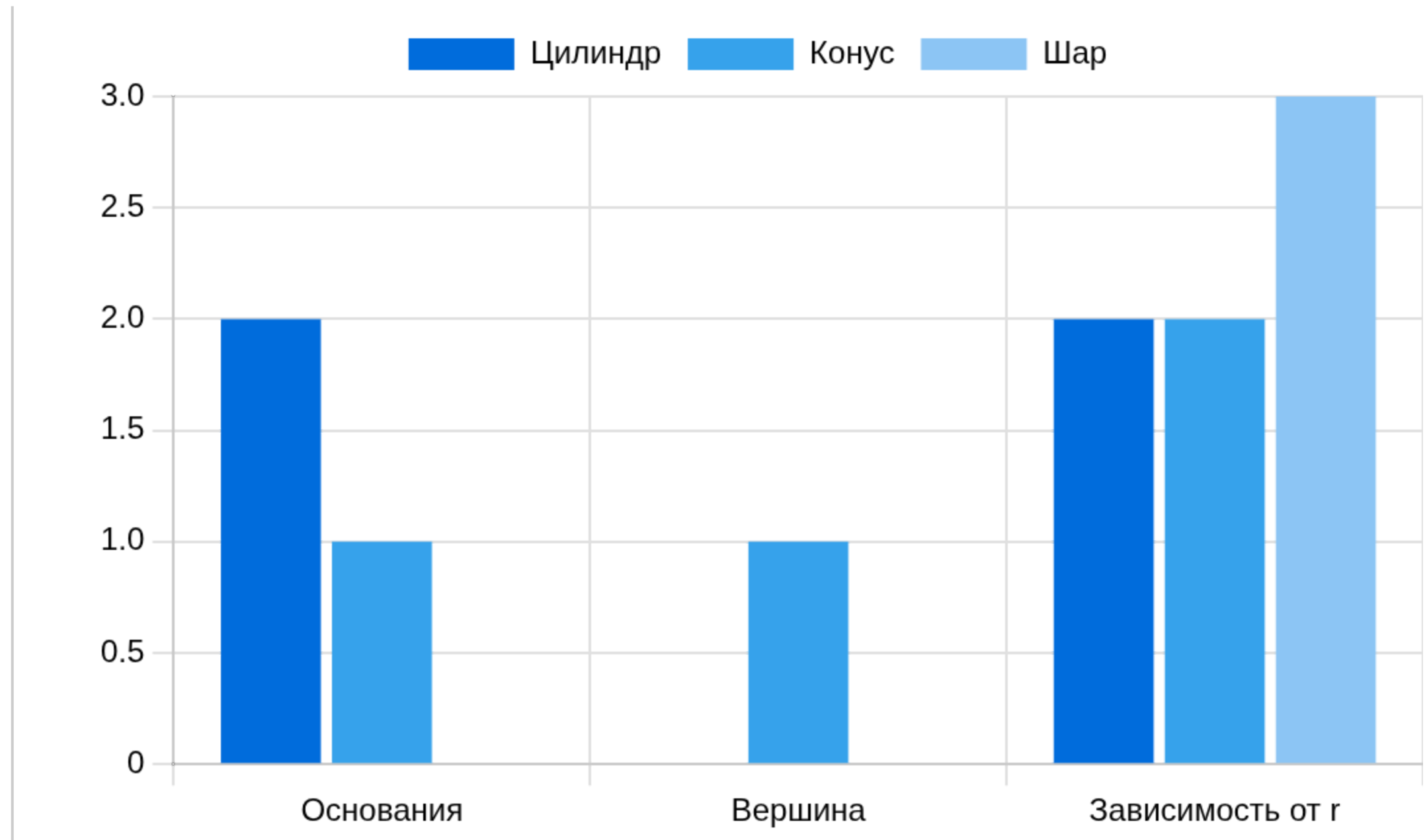
Цилиндрическая форма часто встречается в банках, трубах, стаканах, батарейках и технических деталях. Такая форма удобна там, где важно сохранить одинаковое поперечное сечение по всей длине.



Сравнение цилиндра, конуса и шара

Диаграмма показывает различия в строении трёх тел вращения и подчёркивает, что их формулы по-разному зависят от радиуса.

Цилиндр и конус имеют сходную степень зависимости от r^2 , а объём шара растёт быстрее всего, потому что зависит от r^3 .



Конус и его основные элементы

Основание и вершина

Конус имеет одно круглое основание и одну вершину. Такая структура сразу отличает его от цилиндра и шара и помогает узнавать фигуру по чертежу без лишних вычислений.

1

Образующая

Отрезок, соединяющий вершину с точкой окружности основания, называется образующей. Она образует боковую поверхность конуса и вместе с радиусом и высотой задаёт его основные измеряемые параметры.

2

Высота конуса

Высота проводится перпендикулярно к плоскости основания. Для прямого конуса она проходит через центр основания, поэтому удобно связывать высоту с другими элементами при решении задач.

3

Осевое сечение

У прямого конуса осевое сечение имеет вид равнобедренного треугольника. В нём высота конуса совпадает с высотой треугольника, что упрощает анализ формы и размеров.

4

Связь по Пифагору

Если известны радиус r , высота h и образующая l , их связывает теорема Пифагора: $l^2 = r^2 + h^2$. Эта формула особенно полезна, когда одна из величин неизвестна.

5



Формулы площади поверхности и объёма тел вращения

Тело	Площадь	Объём
Цилиндр	$2\pi rh; 2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$
Конус	$\pi rl; \pi r(l+r)$	$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$
Шар	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

Таблица систематизирует основные формулы для трёх главных тел вращения и показывает, какие величины нужно подставлять в вычисления.

Во всех случаях радиус играет ключевую роль: именно он задаёт масштаб поверхности и объёма, а для конуса дополнительно нужна образующая.

Шар и его геометрические свойства

Как образуется шар

Шар получают вращением полуокружности вокруг её диаметра. Такая конструкция делает тело естественно гладким и симметричным, а его геометрия полностью определяется одним параметром — радиусом.

Равное расстояние

Каждая точка поверхности шара удалена от центра на одно и то же расстояние. Поэтому шар удобно описывать через центр и радиус, не вводя дополнительные ребра, вершины или основания.

Симметрия формы

Шар обладает наибольшей центральной симметрией среди тел вращения. Любое направление через центр для него одинаково, что делает форму особенно устойчивой в природе и технике.

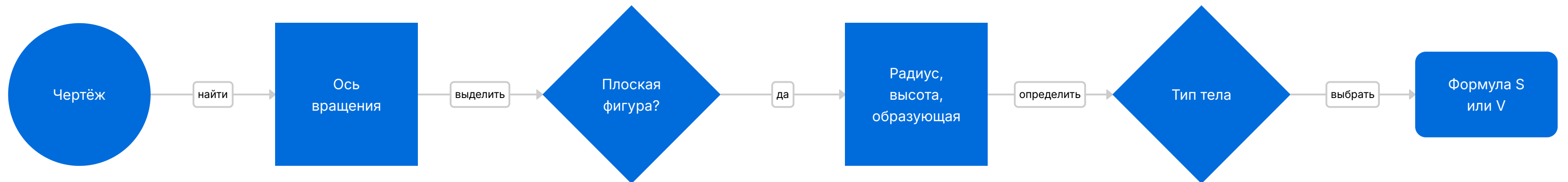
Где встречается

К шару близки мяч, глобус, капля жидкости и Земля как приближённая модель. В технике сферические элементы используются в подшипниках и шаровых соединениях, где важны плавность движения и равномерность нагрузки.



Как распознать тело вращения по чертежу

Последовательность действий помогает выделить ось вращения, определить параметры фигуры и выбрать правильную формулу.



Осевые сечения тел вращения

1. Цилиндр

Осевое сечение цилиндра представляет собой прямоугольник. Одна его сторона равна высоте тела, а другая — диаметру основания, поэтому через сечение легко проверить размеры цилиндра.

2. Конус

Осевое сечение конуса является равнобедренным треугольником. Его боковые стороны соответствуют образующим, а высота треугольника совпадает с высотой самого конуса, что удобно для построения и расчётов.

3. Шар

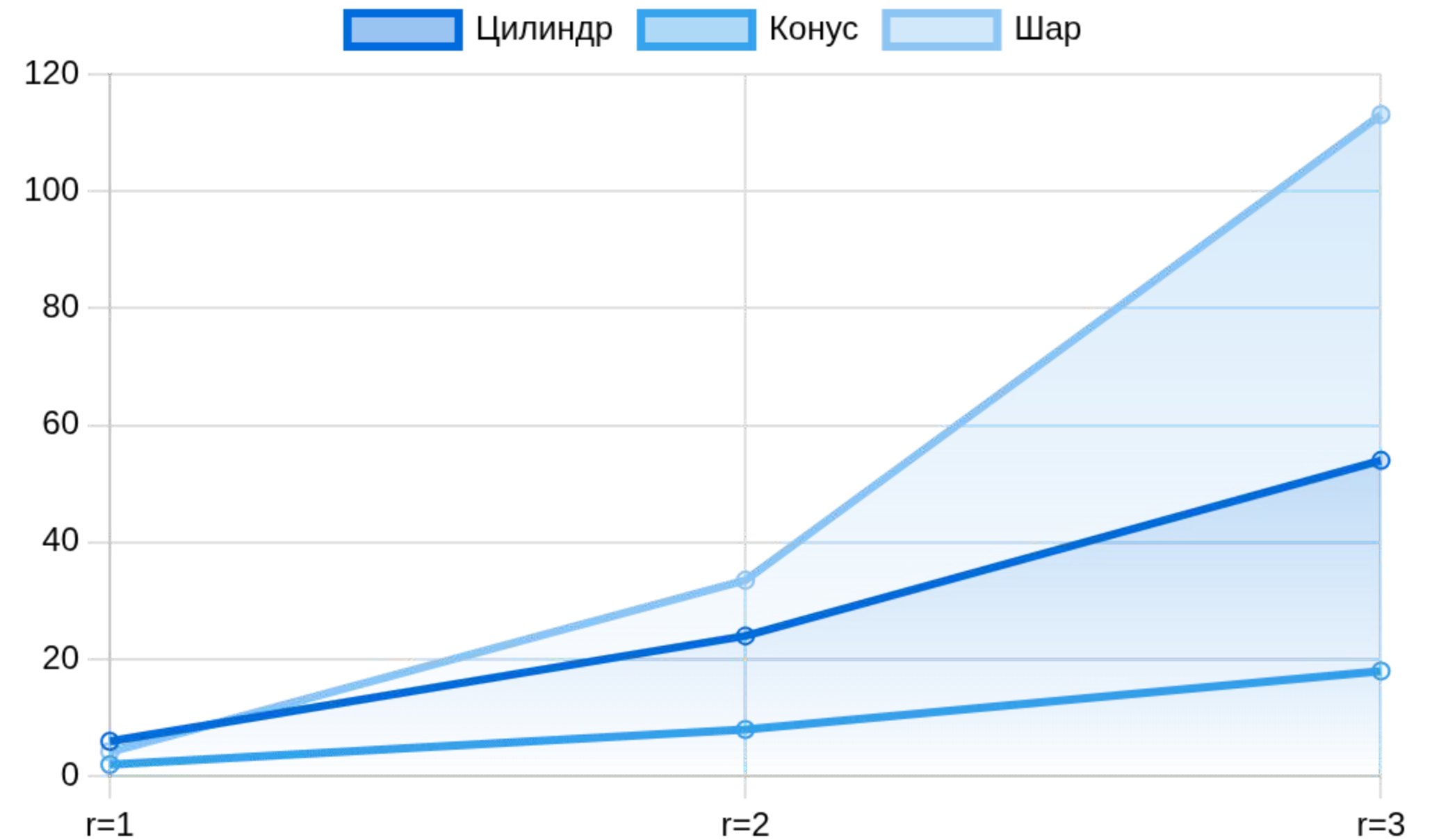
Осевое сечение шара — круг, диаметр которого равен диаметру шара. Это сечение особенно наглядно показывает, как пространственная форма связана с обычной плоской окружностью.



Как меняется объём при изменении радиуса

При одинаковом масштабе по оси радиуса шар демонстрирует наиболее резкий рост объёма, что важно при оценке вместимости и расхода материала.

Чем больше степень зависимости от радиуса, тем быстрее растёт объём; у шара этот эффект выражен сильнее всего.



Развёртки поверхностей тел вращения

Цилиндр

Боковая поверхность цилиндра разворачивается без искажений в прямоугольник. Его стороны равны высоте h и длине окружности основания $2\pi r$, поэтому площадь легко выражается через эти два параметра.

Конус

Развёртка боковой поверхности конуса имеет вид сектора круга. Радиус сектора равен образующей l , а длина его дуги совпадает с длиной окружности основания $2\pi r$.

Шар

Для шара точной плоской развёртки не существует, потому что его поверхность нельзя развернуть на плоскость без деформации. Поэтому геометрию шара описывают формулой площади и приближёнными моделями.



Сравнение элементов тел вращения

Тело	Основания	Сечение
Цилиндр	2	прямоуг.
Конус	1	треуг.
Шар	нет	круг

Школьный курс стереометрии: фигуры вращения

Таблица показывает, чем отличаются три основные фигуры вращения по опорным элементам и осевому сечению.

По числу оснований и виду осевого сечения можно быстро распознать тело и выбрать верную формулу.

Фигуры вращения в окружающем мире и технике

Цилиндр в повседневных предметах

Цилиндр легко узнать в банках, трубах, стаканах и резервуарах. Его форма удобна там, где важно постоянное поперечное сечение и простота расчёта вместимости, поверхности и массы конструкции.



Конус как форма направления и перехода

Конические детали встречаются в воронках, крышах, дорожных конусах и свечах. Такая форма помогает направлять поток, уменьшать сопротивление или плавно изменять размеры детали от основания к вершине.



Шар как образец симметрии

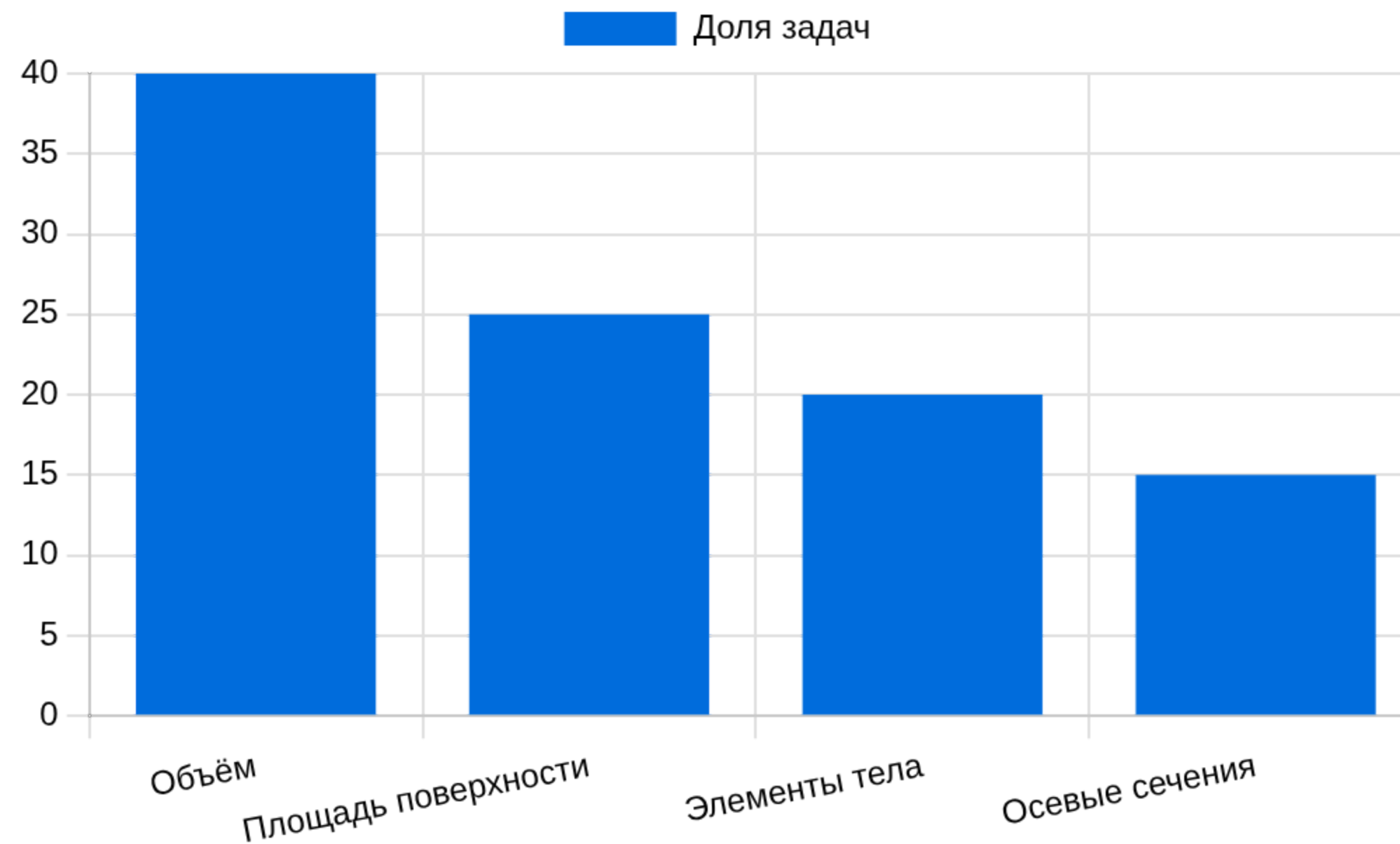
Шарообразные объекты заметны в мячах, пузырях, декоративных элементах и некоторых технических узлах. Шар ценят за равномерность формы, центральную симметрию и удобство описания через один параметр — радиус.



Типы задач по теме фигур вращения

Разные типы заданий требуют не только формул, но и умения читать чертёж, видеть симметрию и проверять размерность ответа.

Преобладают задачи на объём, однако успешное решение темы опирается на уверенную работу и с поверхностями, и с сечениями.



Учебная схема распределения типов заданий по теме «Фигуры вращения»

Типичные ошибки в вычислениях



Радиус вместо диаметра

Часто в формулу подставляют диаметр вместо радиуса или, наоборот, забывают разделить диаметр пополам. Такая подмена сразу меняет результат в четыре раза при квадрате радиуса.



Путают высоту и образующую

Для конуса и цилиндра важно различать высоту и образующую. Если взять наклонный отрезок вместо перпендикуляра, формулы площади и объёма перестают соответствовать чертежу.



Неверная формула площади

Иногда смешивают боковую и полную поверхность, хотя они отличаются добавлением площадей оснований. Перед вычислением полезно точно определить, что требуется по условию задачи.



Забытый коэффициент

В объёме конуса часто пропускают множитель $1/3$. Из-за этого ответ получается завышенным в три раза, хотя вся структура вычисления может быть выполнена верно.

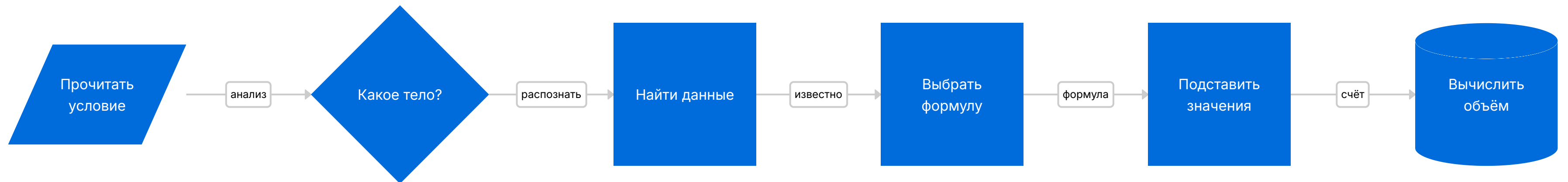


Степень при шаре

Для шара особенно важно помнить куб радиуса в формуле объёма. Ошибка в степени приводит к неверному росту результата и нарушает проверку по размерности.

План решения задачи на объём тела вращения

Последовательность действий при работе с геометрической задачей на объём



Связь темы с алгеброй и дальнейшим изучением математики

Формульное мышление

Задачи на тела вращения требуют уверенно преобразовывать выражения, работать со степенями, корнями и π . Это развивает привычку видеть в геометрии строгую алгебраическую структуру.

1

Пифагор и параметры тела

При нахождении радиуса, высоты или образующей часто используется теорема Пифагора. Из-за этого геометрическая задача превращается в сочетание чертежа и вычислений с выражениями.

2

Подготовка к аналитической геометрии

Понимание тел вращения помогает легче воспринимать уравнения окружности, сферы и других пространственных объектов. Здесь важно уже не только представление формы, но и её координатное описание.

3

Выход к высшей математике

Идеи вращения поверхности и накопления объёма становятся естественным мостом к интегральному исчислению. Поэтому тема служит не отдельным разделом, а основой для дальнейшего математического развития.

4

Краткий справочник по телам вращения

Тело	Объём	Пример
Цилиндр	$\pi r^2 h$	банка
Конус	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	воронка
Шар	$\frac{4}{3}\pi r^3$	мяч

Справочник объединяет самые нужные признаки, формулы и примеры, чтобы быстро сверять тело, его параметры и вычисления.

Во всех трёх случаях один параметр — радиус — определяет масштаб вычислений и связывает чертёж с численным ответом.

Фигуры вращения объединяют чертёж и расчёт

Тела вращения показывают, как из плоской фигуры рождается пространственная форма, а геометрический образ сразу превращается в точные формулы площади и объёма, полезные в задачах и приложениях.