

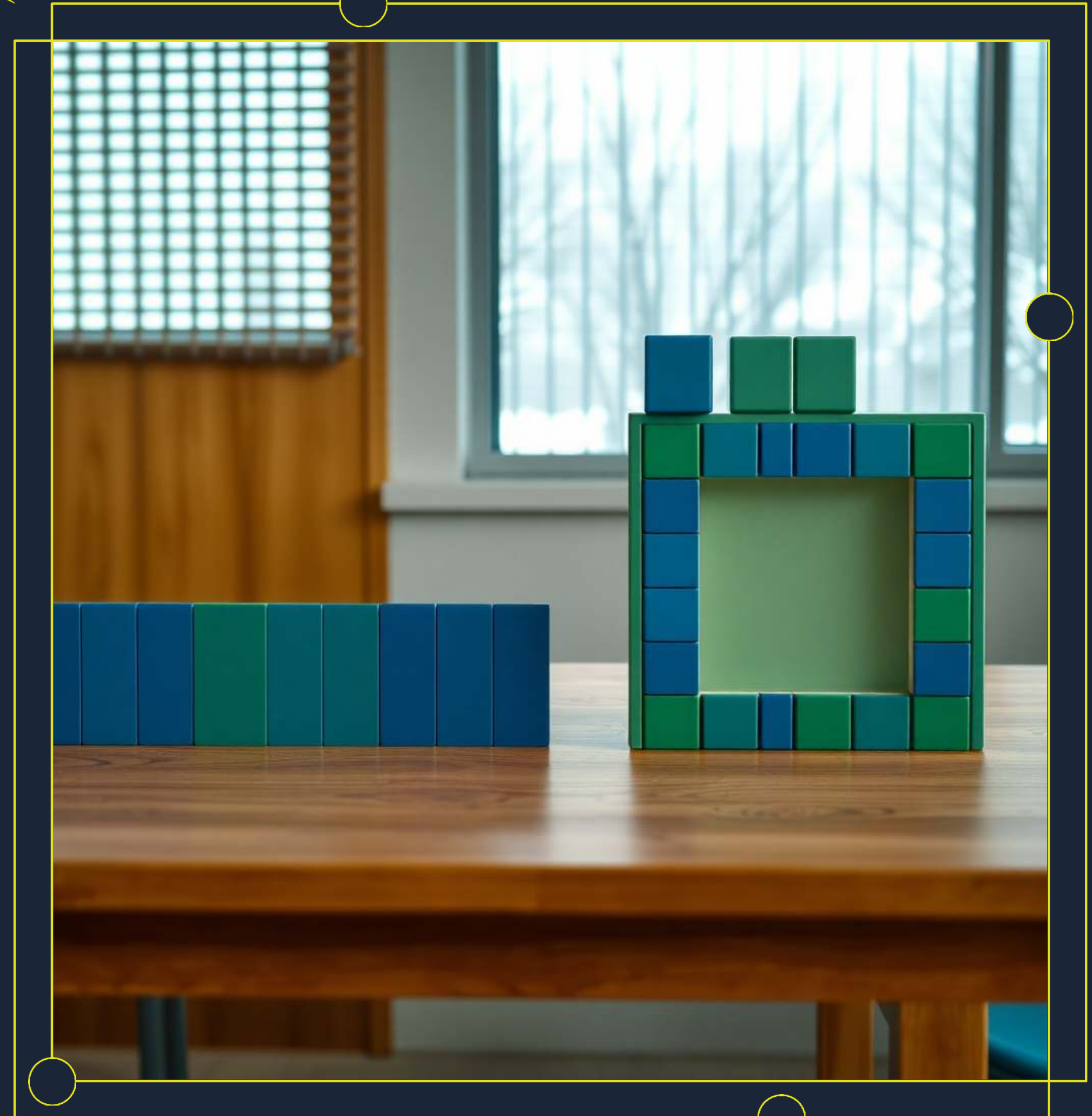
The background is a blurred photograph of a classroom. In the foreground, there are several large orange rectangular blocks and smaller blue and orange cubes on a grey tiled floor. In the background, there are wooden bookshelves and a window. Overlaid on this is a large dark blue circle with a yellow grid of concentric circles and radial lines. Small yellow stars are scattered around the perimeter of the circle.

Возведение суммы и разности в квадрат и в куб

Четыре формулы, которые ускоряют раскрытие скобок
и упрощение выражений.

Зачем это нужно в 7 классе

Эти формулы опираются на свойства умножения и степеней. Они помогают быстро преобразовывать выражения, упрощать многочлены и решать уравнения, а ещё становятся важной основой для дальнейшего изучения алгебры.



Четыре основные формулы

Сводная таблица показывает вид формулы, число членов и знаки в ответе.

У квадратов всегда три члена, у кубов — четыре; различие между суммой и разностью видно прежде всего по знакам.

Формула	Члены	Знак
$(a+b)^2$	3	+ средний
$(a-b)^2$	3	— средний
$(a+b)^3$	4	+ +
$(a-b)^3$	4	— +

Формулы сокращённого умножения: квадрат и куб суммы и разности.

Как устроен квадрат суммы

① Что означает запись

Запись $(a+b)^2$ — это произведение $(a+b)(a+b)$. При раскрытии скобок каждое слагаемое умножается на каждое, поэтому появляются квадрат первого слагаемого, два одинаковых произведения и квадрат второго.

② Почему появляется $2ab$

Произведения ab возникают дважды: из первой скобки с первым членом второй и наоборот. Поэтому они складываются в $2ab$, а не остаются отдельными слагаемыми.

③ Универсальность формулы

Формула работает не только с буквами. Вместо a и b могут быть числа, одночлены или даже более сложные выражения, если их нужно возвести в квадрат.

Как устроен квадрат разности

Запись произведения

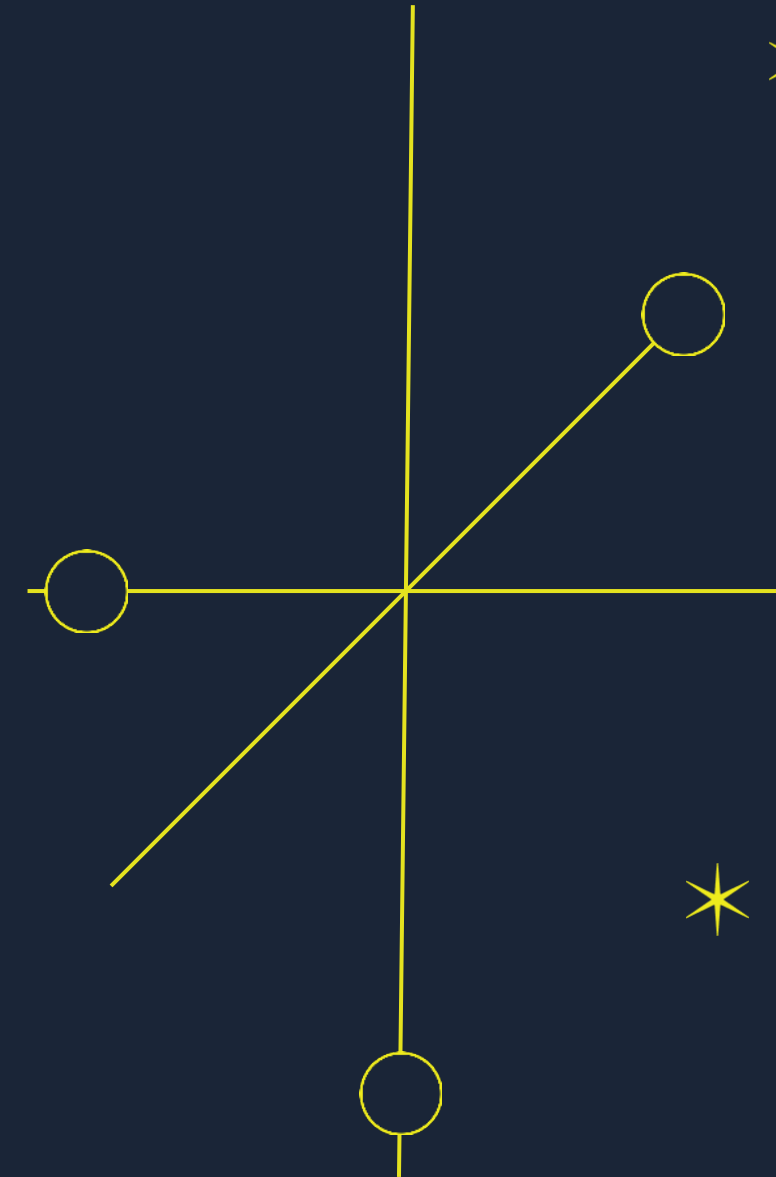
Выражение $(a-b)^2$ означает произведение $(a-b)(a-b)$. При раскрытии скобок важно не менять порядок членов, чтобы правильно увидеть, откуда берётся каждый знак.

Положительные крайние члены

Квадраты первого и второго слагаемых остаются положительными: a^2 и b^2 . Знак минус влияет только на средний член, но не на крайние части формулы.

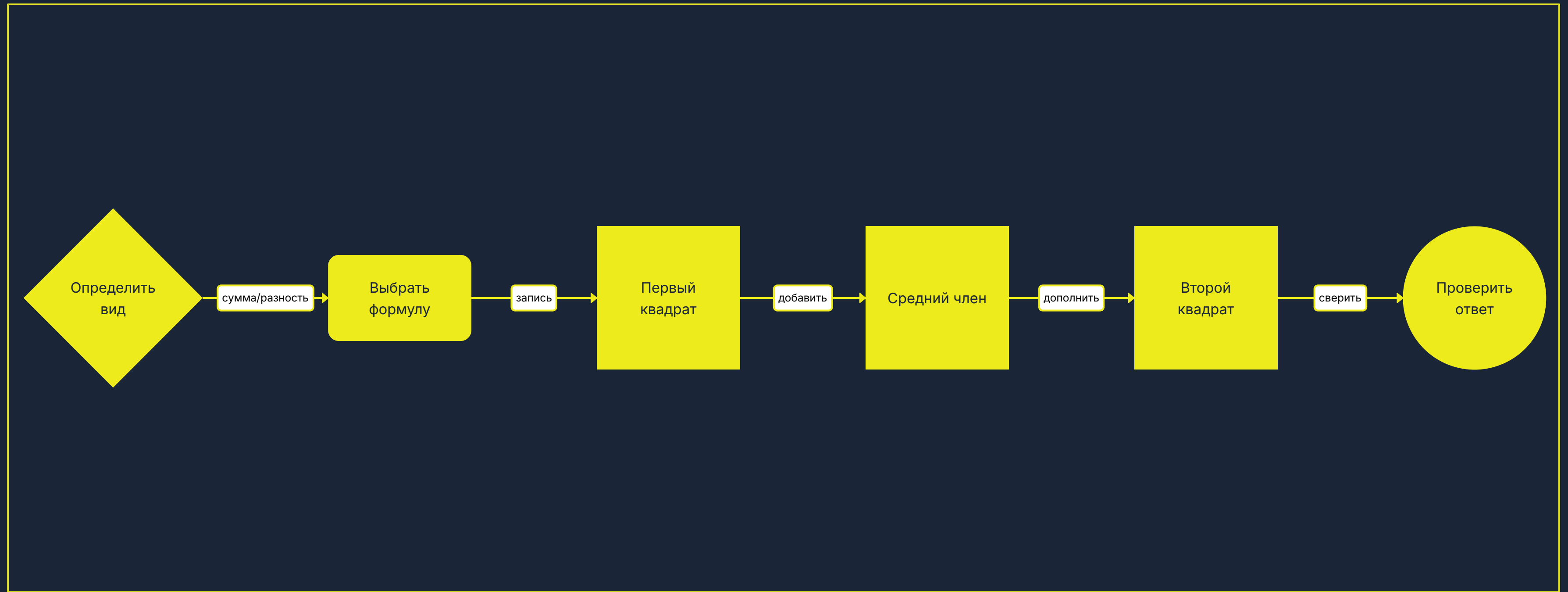
Отрицательный средний член

Два одинаковых произведения ab дают $-2ab$, потому что оба возникают с минусом. Например, $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$.



Последовательность раскрытия квадрата

Алгоритм помогает не пропустить члены и не ошибиться со знаками.



Геометрический смысл квадрата суммы

Квадрат со стороной $a+b$

Если взять квадрат со стороной $a+b$, его площадь можно разложить на несколько частей. Это наглядно показывает, почему при раскрытии скобок появляются отдельные слагаемые, а не только один большой результат.

Четыре части одной фигуры

Внутри большого квадрата легко увидеть квадрат $a \times a$, квадрат $b \times b$ и два одинаковых прямоугольника $a \times b$. Именно эти две одинаковые прямоугольные области дают член $2ab$.

Сумма площадей совпадает

Когда площади всех частей складываются, получается площадь всего квадрата со стороной $a+b$. Такая модель помогает не запоминать формулу вслепую, а понимать, откуда берётся каждый её член.



Как меняется знак среднего члена



Диаграмма помогает быстро увидеть, где знак меняется, а где коэффициент остаётся тем же.

У разности знак среднего члена становится противоположным, но числовой коэффициент сохраняется.

Формулы сокращённого умножения для квадрата и куба суммы и разности.

Куб суммы: структура формулы

1

Три одинаковых скобки

Запись $(a+b)^3$ означает произведение трёх одинаковых скобок: $(a+b)(a+b)(a+b)$. Из-за повторения одних и тех же множителей в результате возникают группы одинакового вида.

2

Первый и последний члены

Крайние члены формулы — это a^3 и b^3 . Они показывают, что куб строится от первого и второго слагаемого так же, как квадрат строится от их квадратов.

3

Средние коэффициенты

Между крайними членами появляются $3a^2b$ и $3ab^2$. Число 3 связано с тем, сколько раз одинаковые комбинации возникают при перемножении трёх скобок.

4

Связь с Паскалем

Коэффициенты 1, 3, 3, 1 совпадают со строкой треугольника Паскаля для третьей степени. Это удобная подсказка, когда нужно быстро восстановить формулу без ошибок.

Куб разности: особенности знаков

Крайние члены

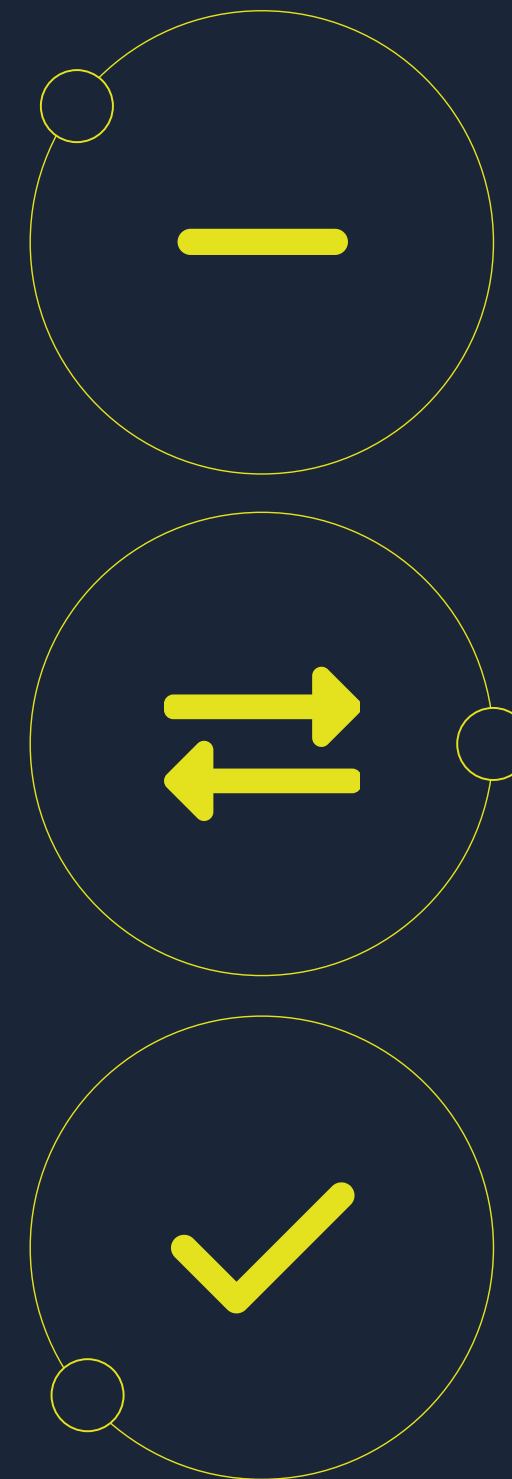
В формуле $(a-b)^3$ крайние члены остаются a^3 и $-b^3$. Они задают начало и конец записи, поэтому их удобно проверять первыми при решении примеров.

Чередование знаков

Средние члены имеют коэффициент 3, но их знаки различаются: $-3a^2b$ и $+3ab^2$. Такое чередование помогает заметить, где в ответе должна быть смена знака.

Быстрая самопроверка

Если ответ записан верно, знаки идут по правилу формулы, а коэффициенты не теряются. Эта проверка особенно полезна, когда выражение содержит числа и буквы одновременно.



Примеры с одночленами и числами

Формулы сокращённого умножения; учебные примеры по алгебре 7 класса

Выражение	Результат	Особенность
$(x+3)^2$	x^2+6x+9	число входит в $2ab$
$(2a-5)^2$	$4a^2-20a+25$	средний член отрицательный
$(y+2)^3$	$y^3+6y^2+12y+8$	коэффициенты 1,3,3,1
$(m-1)^3$	m^3-3m^2+3m-1	знаки чередуются

В таблице показано, как формулы работают с буквами и числами: средний член зависит от коэффициента, а знак меняется при разности.

Во всех примерах число из скобок определяет средние члены, а при разности особенно важно не ошибиться со знаком.

Типичные ошибки при раскрытии скобок

Пропуск среднего члена

Часто забывают, что в квадрате суммы и разности обязательно есть средний член. Если записать только первые и последние слагаемые, ответ получится неполным и неверным.

Неверный знак

При разности знак среднего члена меняется на противоположный, но это правило нередко нарушают. Особенно важно проверять его в выражениях вида $(a-b)^2$ и $(a-b)^3$.

Путаница коэффициентов

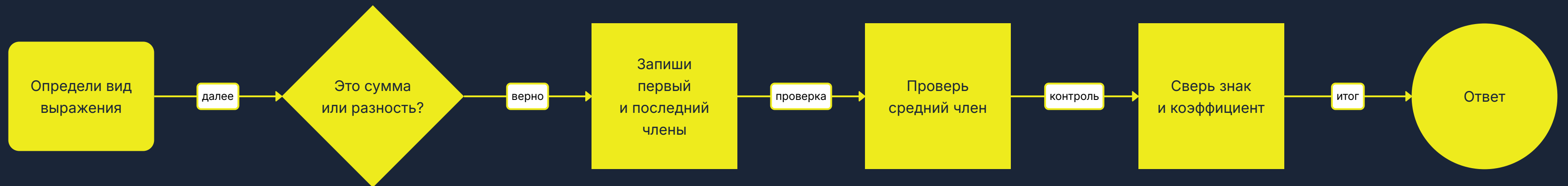
Коэффициент 2 относится к квадрату, а коэффициент 3 — к кубу. Если перепутать их, формула сразу теряет правильный вид, даже когда буквы и степени записаны верно.

Возведение не всей скобки

Ещё одна ошибка — возводить в степень только первое слагаемое. Нужно помнить, что степень относится ко всей скобке целиком, а не к отдельной части выражения.

Проверка полученного ответа

Пошаговый контроль помогает убедиться, что формула выбрана верно, а знаки и коэффициенты записаны без ошибок.



Треугольник Паскаля и коэффициенты

1 Строка 1, 3, 3, 1

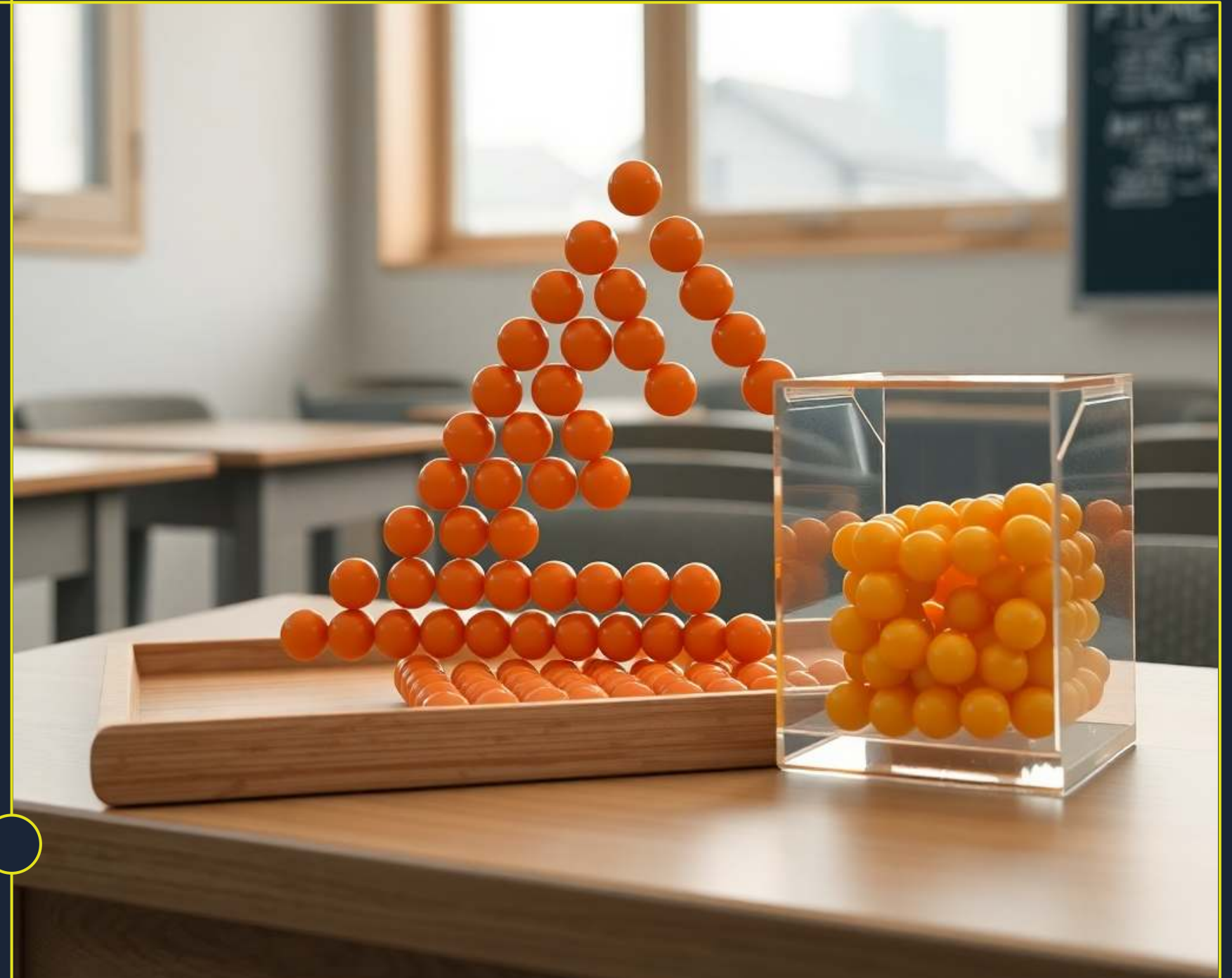
Коэффициенты в формулах куба совпадают с третьей строкой треугольника Паскаля: 1, 3, 3, 1. Эта последовательность показывает, почему в раскрытии скобок появляются именно тройки.

2 Связь с формулой

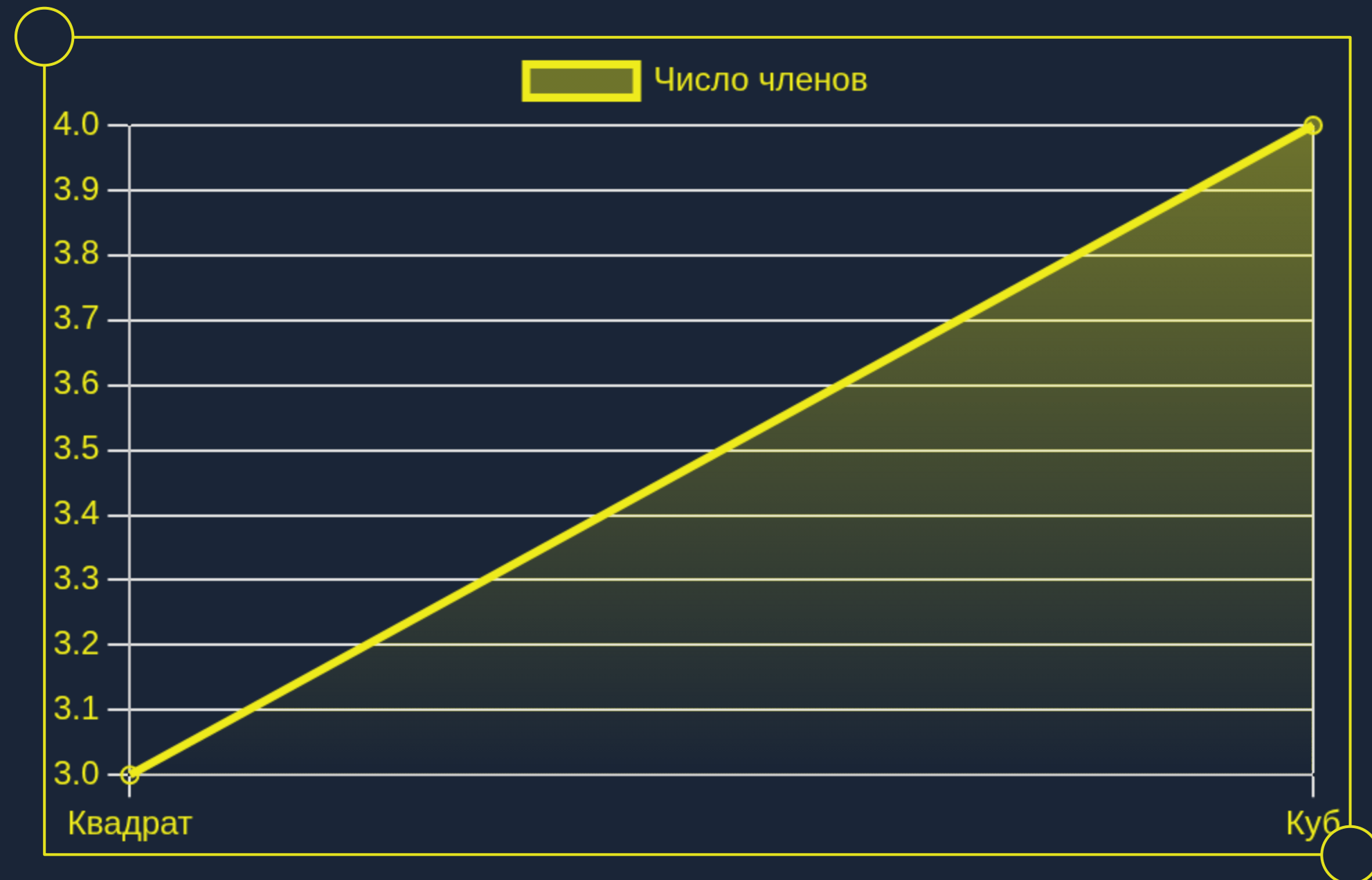
Для куба суммы коэффициенты распределяются как 1, 3, 3, 1, а для куба разности сохраняются те же числа, но меняются знаки. Поэтому треугольник помогает запомнить структуру формулы.

3 Польза для проверки

Если ученик помнит строку треугольника Паскаля, ему легче проверить ответ и заметить ошибку в коэффициентах. Это особенно полезно при переходе от квадрата к кубу выражения.



Сколько членов получается в разных степенях



Сравнение помогает увидеть, что при переходе от квадрата к кубу формула становится длиннее и требует более внимательной проверки каждого члена.

Кубические формулы содержат больше слагаемых, поэтому возрастает риск ошибки и необходимость внимательно следить за знаками и коэффициентами.

Формулы сокращённого умножения; учебный анализ для 7 класса

Где используются эти формулы



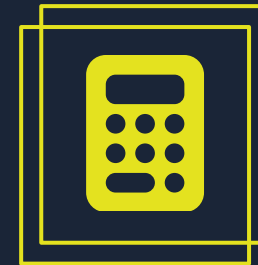
Упрощение выражений

Формулы сокращённого умножения помогают быстро раскрывать скобки и сокращать запись, когда в выражении много одинаковых множителей или повторяющихся частей.



Преобразование многочленов

Их используют, когда нужно привести многочлен к более удобному виду, сгруппировать члены и подготовить выражение к дальнейшим вычислениям.



Вычисление значений

Если буквы заменены числами, формулы позволяют быстрее найти значение выражения без длинного перемножения всех скобок по очереди.



Школьные задачи

Такие приёмы часто встречаются в упражнениях 7 класса: при раскрытии скобок, упрощении дробей и проверке правильности алгебраических преобразований.

Сравнение суммы и разности

Таблица показывает, что структура формул почти одинакова: меняются только знаки, а основные коэффициенты и крайние члены сохраняются.

Главное различие между суммой и разностью — в знаках средних членов; коэффициенты и степени при этом сохраняются.

Формула	1-й член	Средние члены	Последний
$(a+b)^2$	a^2	$+2ab$	b^2
$(a-b)^2$	a^2	$-2ab$	b^2
$(a+b)^3$	a^3	$+3a^2b, +3ab^2$	b^3
$(a-b)^3$	a^3	$-3a^2b, +3ab^2$	$-b^3$

Формулы сокращённого умножения

Короткая памятка для запоминания

1. Квадрат суммы

Сначала возводят в квадрат первое слагаемое, затем добавляют двойное произведение двух частей и в конце — квадрат второго слагаемого.

2. Квадрат разности

Правило то же, но средний член получает минус. Крайние члены остаются положительными, потому что возводятся в квадрат.

3. Куб суммы и разности

Для куба запоминают четыре части: первый куб, два средних члена с коэффициентом 3 и последний куб; у разности знаки распределяются по формуле.

4. Быстрая проверка

Если в ответе не хватает члена, перепутан коэффициент или знак, значит формула применена неверно. Проверка занимает несколько секунд и помогает избежать ошибки.



Какие формулы встречаются чаще



Диаграмма показывает, что простые формулы квадрата используются чаще, потому что они входят в большее число стандартных упражнений.

Чем сложнее формула, тем реже она встречается, но все четыре нужны для разных типов алгебраических преобразований.

Учебная практика по алгебре 7 класса; обобщённая оценка частоты заданий

Главный итог темы

Формулы для квадрата и куба суммы и разности помогают быстро преобразовывать выражения, проверять ответ по числу членов, коэффициентам и знакам, а также уверенно решать задания по алгебре.