

Основные тождества для квадратных корней



Учимся применять свойства корней
без ошибок и лишних вычислений.



Зачем нужны квадратные корни



Квадратные корни встречаются в уравнениях, геометрии и при упрощении выражений. В 8 классе важно не только находить корень, но и правильно преобразовывать записи, опираясь на область допустимых значений и неотрицательность результата.

Что такое квадратный корень

01

Определение

Квадратный корень из числа a — это неотрицательное число, квадрат которого равен a . Обозначение $\sqrt{a}$. В действительных числах корень существует только для неотрицательных значений.

02

Примеры

Если $\sqrt{49}$, то ответ 7, потому что $7^2 = 49$. Аналогично $\sqrt{0} = 0$, так как $0^2 = 0$. Такие примеры помогают увидеть смысл определения на простых числах.

03

Когда корень не определён

Для отрицательных чисел, например $\sqrt{-9}$, в курсе действительных чисел значение не определено. Это связано с тем, что никакое действительное число в квадрате не даёт отрицательный результат.

Тождество $(\sqrt{a})^2 = a$

Основная идея

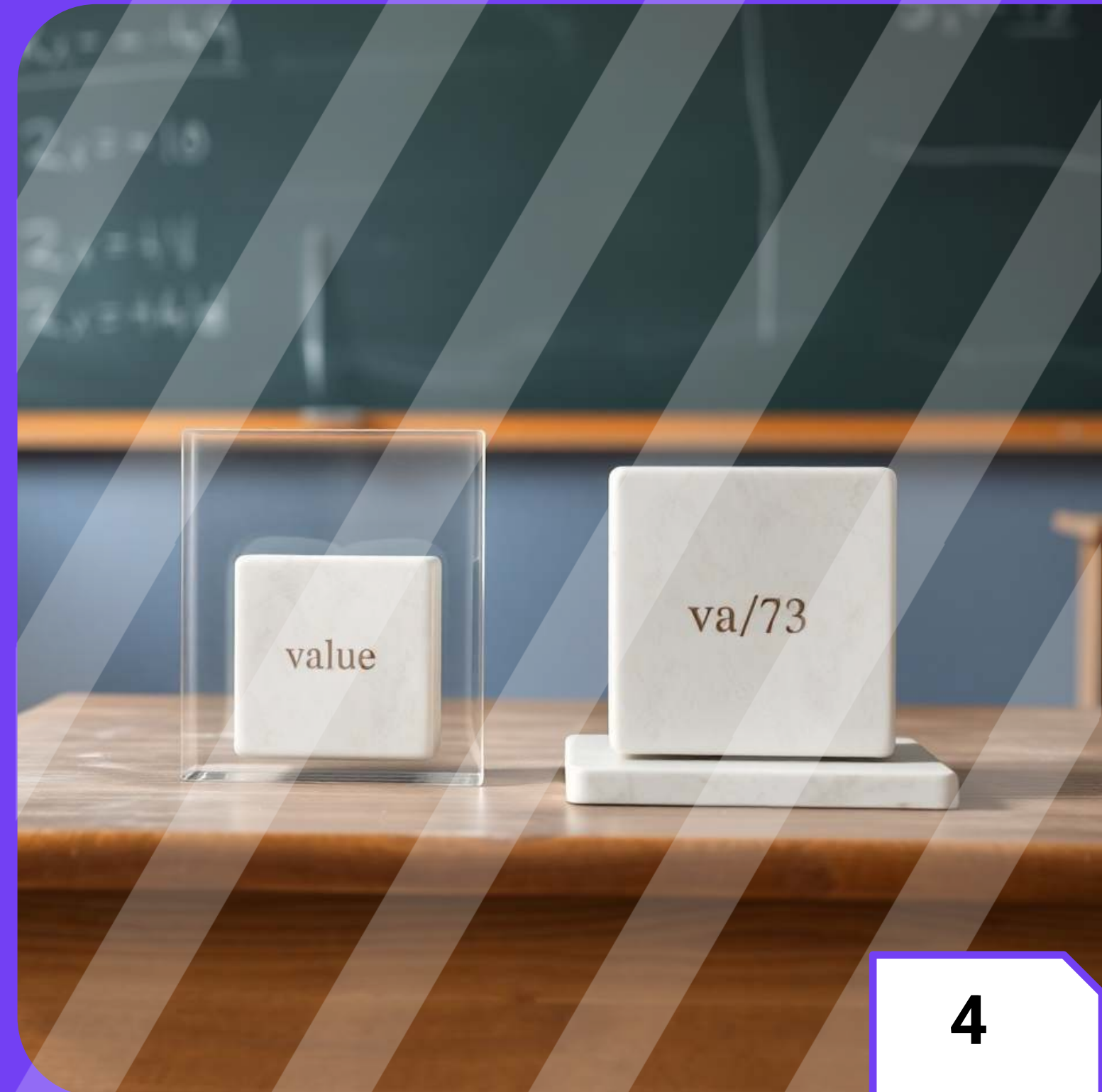
Если a неотрицательно, то возведение $\sqrt{a}$ в квадрат возвращает исходное число. Это тождество удобно использовать, когда нужно убрать корень и получить более простую запись.

Примеры

$\sqrt{16^2} = 16$ и $\sqrt{0,81^2} = 0,81$. В обоих случаях корень и квадрат взаимно уничтожают друг друга, если подкоренное выражение неотрицательно.

Важное условие

Запись работает только при $a \geq 0$. Под знаком корня не может стоять отрицательное число, поэтому перед применением формулы всегда проверяют область допустимых значений.



Тождество $\sqrt{x^2}=|x|$



○ Почему нужен модуль

После извлечения корня получается не само x , а его модуль. Это связано с тем, что квадрат любого числа неотрицателен, а квадратный корень по определению тоже неотрицателен.

○ Примеры

$\sqrt{(-5)^2} = 5$, $\sqrt{8^2} = 8$, $\sqrt{0^2} = 0$.
В каждом случае результат не может быть отрицательным, даже если исходное число было меньше нуля.

○ Главный вывод

Формулу $\sqrt{x^2}=|x|$ нужно помнить особенно внимательно. Если написать просто x , можно получить неверный ответ при отрицательных значениях переменной.



Тождество $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

01

Когда применяют

Если оба множителя неотрицательны, корень из произведения можно заменить произведением корней. Это удобно, когда подкоренное число раскладывается на множители, среди которых есть полный квадрат.

02

Примеры преобразования

$\sqrt{36} = \sqrt{(9 \cdot 4)} = 3 \cdot 2 = 6$. Другой пример: $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = 6\sqrt{2}$. Такой способ делает выражение короче и удобнее для дальнейших действий.

03

Условия формулы

Формула верна только при $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Если хотя бы один множитель отрицателен, применять это тождество нельзя, потому что подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Тождество $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$



□ Для дробей под корнем

Если числитель неотрицателен, а знаменатель положителен, корень из дроби можно представить как дробь из корней. Это помогает упростить запись и быстрее получить ответ.

□ Примеры

$\sqrt{49/64} = 7/8$, а $\sqrt{100/25} = 10/5 = 2$. В обоих случаях удобно отдельно находить корень числителя и знаменателя.

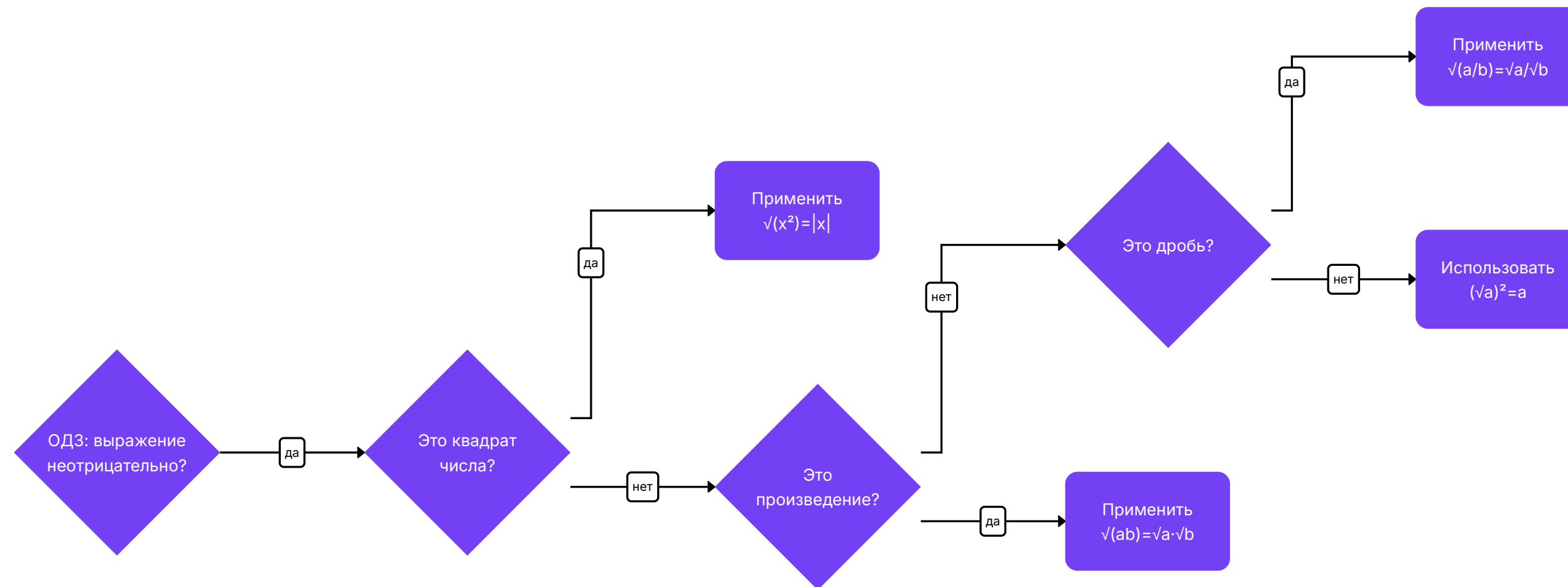
□ Почему нужен знаменатель

Условие $b \neq 0$ обязательно, потому что деление на ноль невозможно. Поэтому перед преобразованием дроби всегда проверяют, что знаменатель действительно положителен.



Выбор тождества для выражения с корнем

Последовательность выбора формулы зависит от вида подкоренного выражения и его допустимых значений.

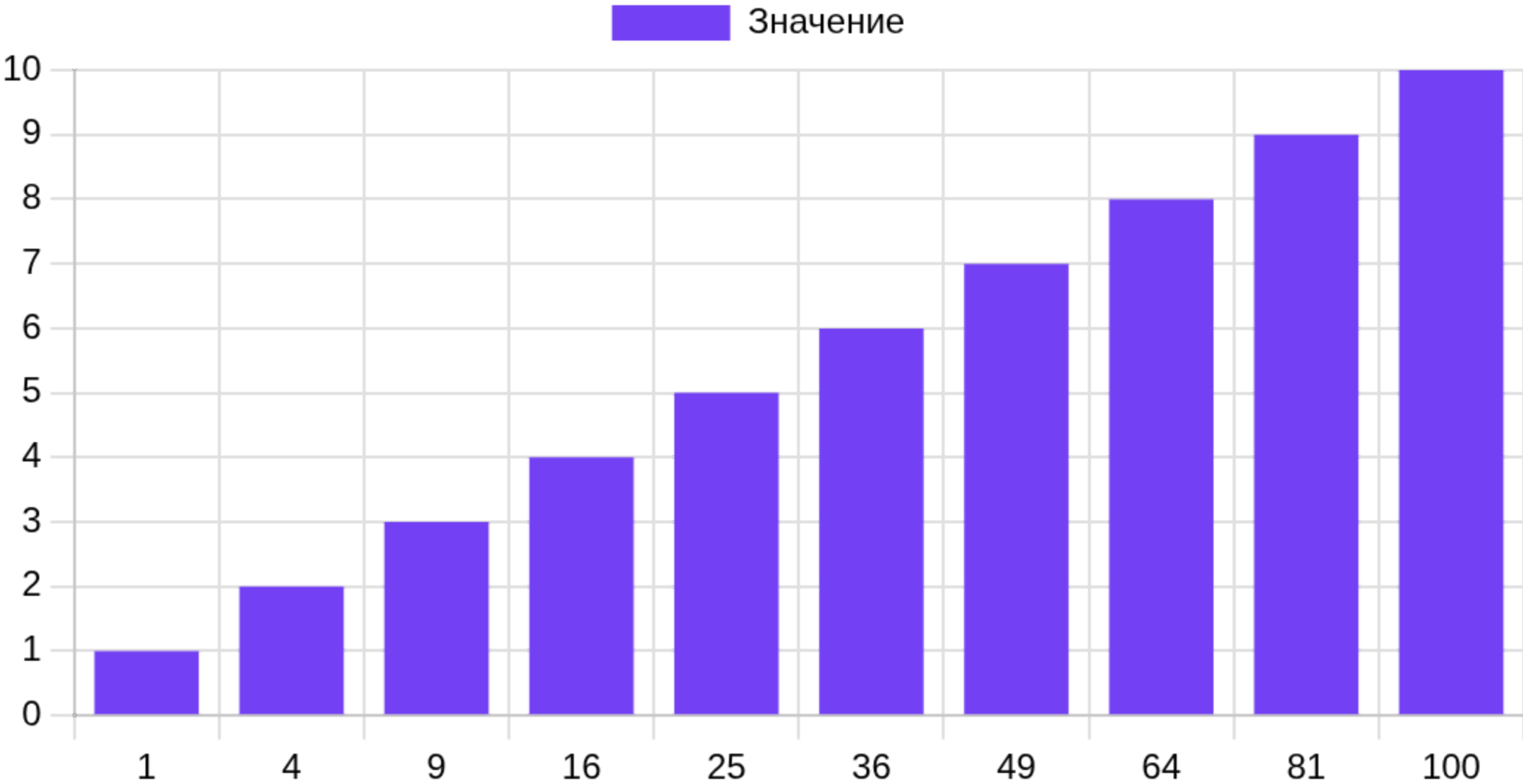


Квадраты чисел и соответствующие корни



Таблица опорных значений
помогает быстро оценивать
ответы и замечать ошибки
без вычисления десятичных
приближений.

Школьные опорные значения квадратов чисел
и их корней



Чем больше квадрат числа, тем больше его
корень; эти пары удобно запоминать
для проверки вычислений.

Квадратный корень и площадь квадрата



○ Смысл корня

Если площадь квадрата известна, можно найти длину его стороны с помощью квадратного корня. Это показывает, что корень — действие, обратное возведению в квадрат.

○ Примеры из геометрии

У квадрата со стороной 7 см площадь равна 49 см^2 , поэтому $\sqrt{49} = 7$. Если сторона 5 см, площадь равна 25 см^2 , значит $\sqrt{25} = 5$.

○ Почему это удобно

Такие задачи помогают увидеть, как формулы работают в реальной геометрии. Изображение квадрата со стороной и площадью делает связь между числом и фигурой наглядной.



Сводная таблица основных тождеств



Школьный курс алгебры, 8 класс: свойства квадратного корня и тождества



Краткая сводка формул, условий применения и типичных результатов. Таблица помогает быстро выбрать нужное тождество и не нарушить область допустимых значений.

Формула	Условие и пример	Результат
$(\sqrt{a})^2=a$	$a\geq 0$; $\sqrt{16}$	16
$\sqrt{x^2}= x $	любой x ; $\sqrt{(-5)^2}$	5
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$a, b\geq 0$; $\sqrt{36\cdot 2}$	$6\sqrt{2}$
$\sqrt{a/b}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$	$a\geq 0, b>0$; $\sqrt{49/64}$	$7/8$

Каждая формула верна только при своих условиях; именно они определяют, можно ли применять тождество без ошибки.



Типичные ошибки при работе с корнями



Заменять модуль обычной записью

Ошибка возникает, когда пишут $\sqrt{x^2}=x$. На самом деле результатом всегда является неотрицательное число, поэтому правильно записывать $\sqrt{x^2}=|x|$, особенно если x может быть отрицательным.



Игнорировать область определения

Нельзя считать, что $\sqrt{(-8)^2}=-8$. Сначала вычисляют квадрат: получается 64, а затем корень из 64 равен 8. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным.



Применять формулу без условий

Формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ нельзя использовать, если один из множителей отрицателен. Перед преобразованием всегда проверяют, что оба множителя или оба члена дроби допустимы.

Упрощение выражений с корнями

Выделите полный квадрат

Сначала ищите множитель, который является полным квадратом. В примере $\sqrt{45}$ удобно представить 45 как $9 \cdot 5$, после чего получаем $3\sqrt{5}$ и сокращаем запись.

1

Разложите число на удобные множители

Если под корнем есть составное число, разложите его так, чтобы один множитель был точным квадратом. Поэтому $\sqrt{80}$ превращается в $\sqrt{16 \cdot 5}$, а затем в $4\sqrt{5}$.

2

Проверьте результат

После преобразования полезно убедиться, что ответ не изменил значение выражения. Например, $\sqrt{(18/2)}$ сначала становится $\sqrt{9}$, а затем даёт 3, что легко проверить в уме.

3

Сравнение значений без вычислений



▮ Сравните подкоренные числа

Если оба выражения неотрицательны, то большему числу под корнем соответствует больший корень. Поэтому $\sqrt{5}$ меньше $\sqrt{7}$, потому что 5 меньше 7.

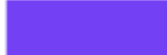
▮ Используйте известные квадраты

Когда числа легко распознаются как квадраты, сравнение становится ещё проще. Например, $\sqrt{36}$ больше $\sqrt{25}$, потому что 36 больше 25, а значит и корень больше.

Как часто используются разные тождества на уроках



Диаграмма показывает примерное распределение приёмов в заданиях на преобразование выражений с корнями. Значения отражают учебную модель, а не статистику всего курса.

 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$  $(\sqrt{a})^2=a$  $\sqrt{x^2}=|x|$  $\sqrt{a/b}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$



Учебная модель распределения приёмов по заданиям по теме «Квадратные корни», 8 класс

Чаще всего нужны разложение на множители и аккуратная запись результата через корень или модуль.

Проверка ответа с помощью обратного действия

01

Возведите результат в квадрат

Если после преобразования получено выражение с корнем, проверьте его обратным действием. Например, для $6\sqrt{2}$ квадрат равен 72, потому что $(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2$.

02

Сравните с исходным числом

Проверка особенно полезна, когда ответ должен дать исходное подкоренное значение. Если после возведения в квадрат получилось то же число, преобразование выполнено верно.

03

Не забывайте про модуль

При выражениях вида $\sqrt{x^2}$ проверка помогает заметить, что результатом является $|x|$, а не x . Это важно, если переменная может быть отрицательной.

Пошаговые примеры преобразований

Примеры для закрепления темы «Основные тождества для квадратных корней»

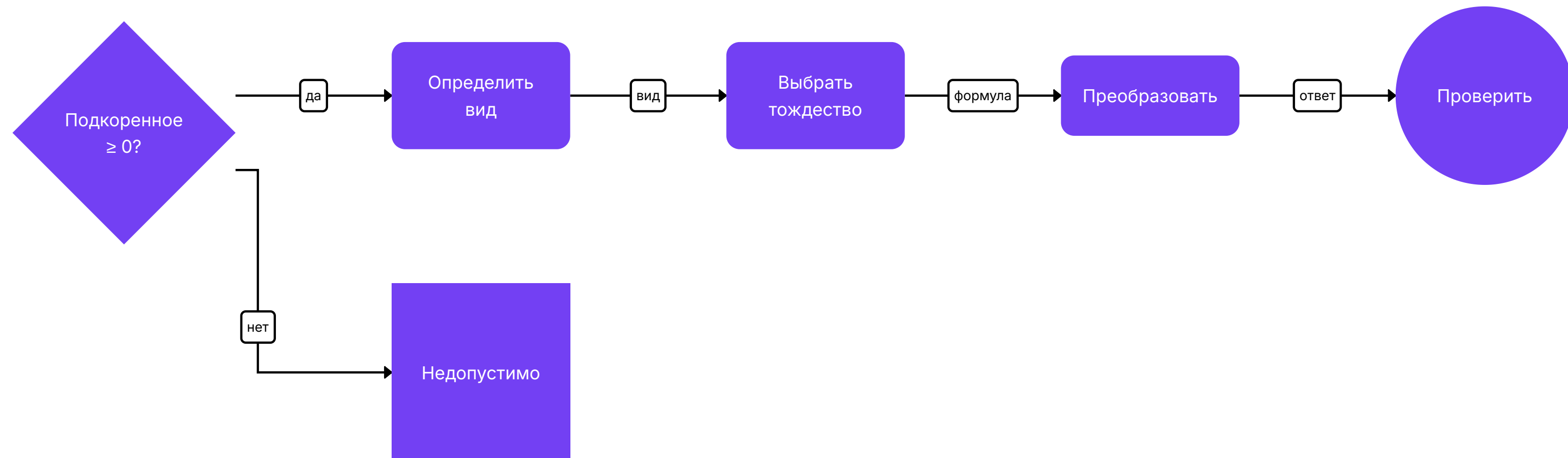
Выражение	Тождество	Ответ
$\sqrt{72}$	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$6\sqrt{2}$
$\sqrt{81/9}$	$\sqrt{a/b}=\sqrt{a}/\sqrt{b}$	3
$\sqrt{x^2}$	$\sqrt{x^2}= x $	$ x $
$\sqrt{16a^2}$	$(\sqrt{a})^2=a$	$4 a $

В таблице показано, какое тождество применяется в каждом случае и какой ответ получается после упрощения выражения.

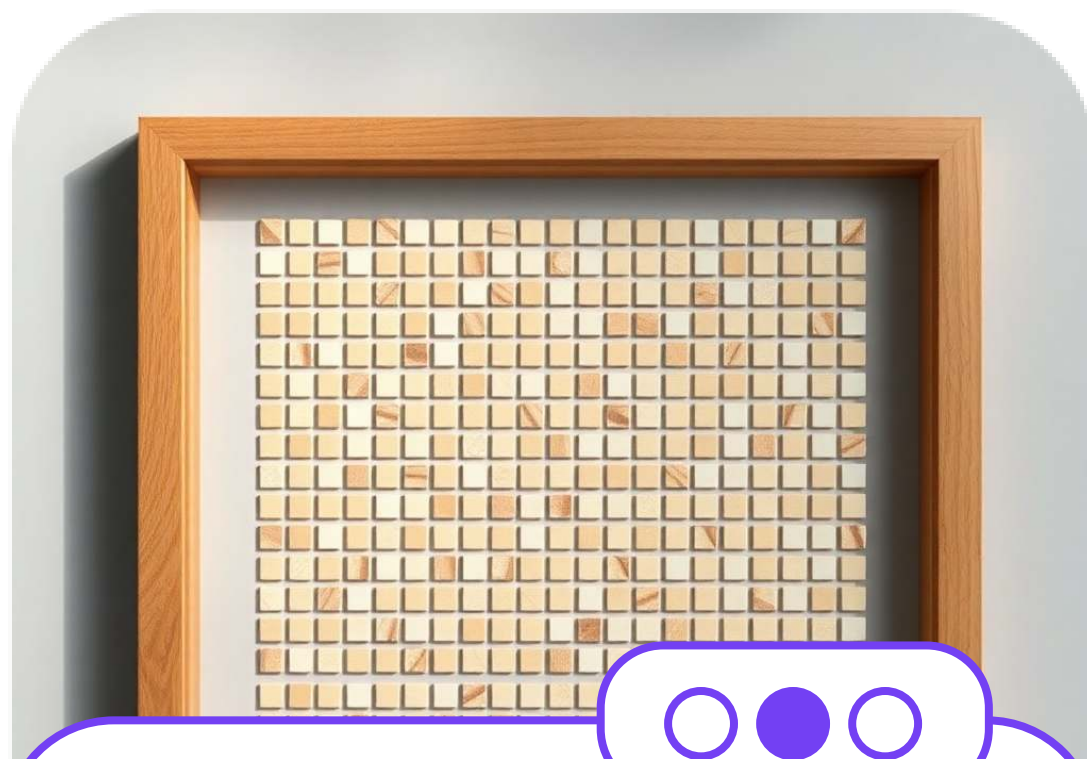
Во всех примерах сначала выделяют удобную структуру выражения, а затем применяют подходящее тождество с учётом условий.

Алгоритм работы с выражениями с корнями

Последовательность действий при преобразовании выражений по правилам квадратного корня.

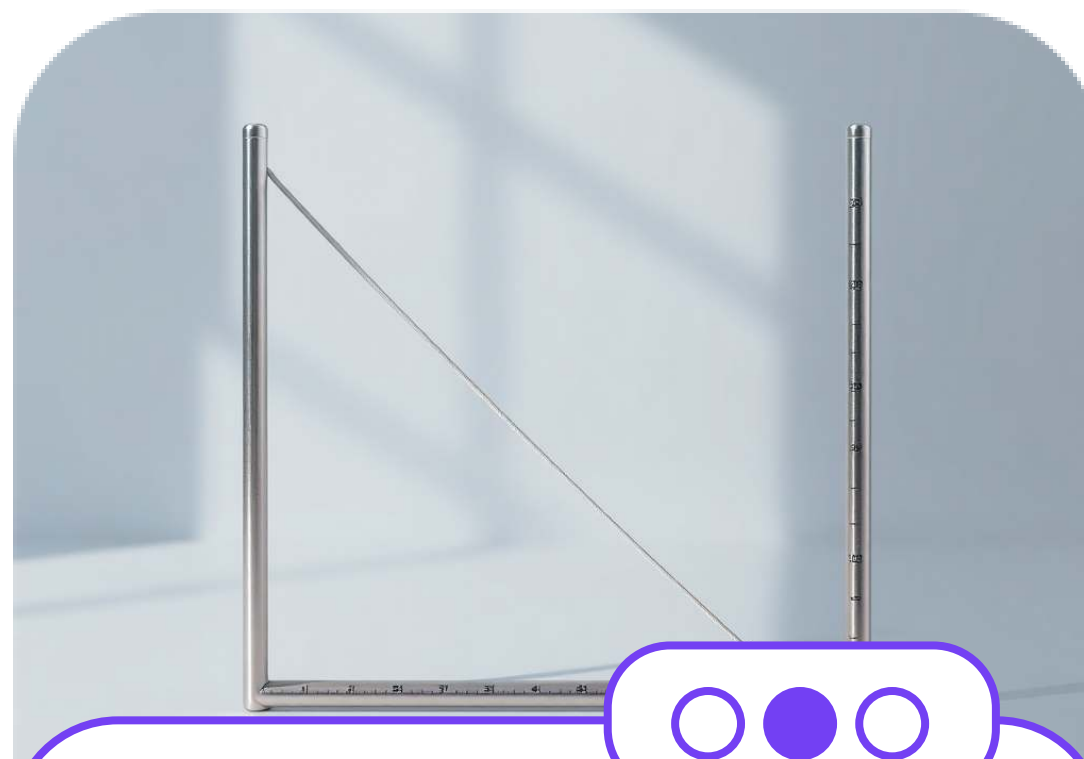


Квадратные корни в реальных задачах



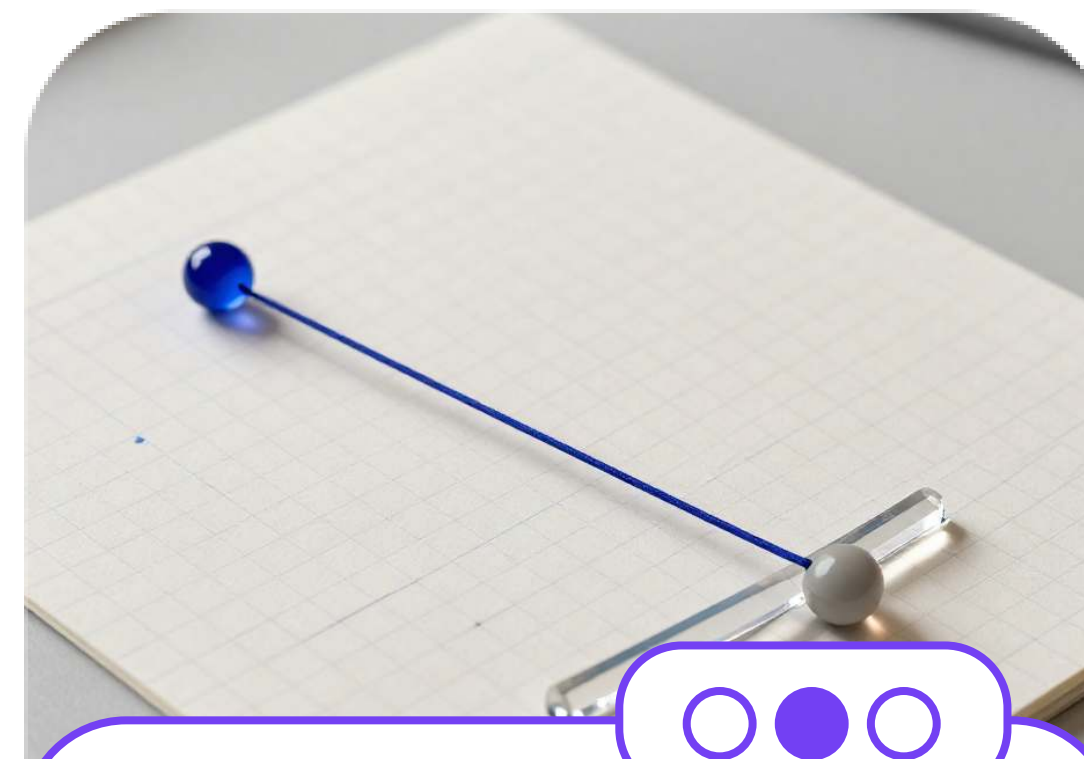
Площадь и сторона квадрата

Если известна площадь квадрата, квадратный корень помогает найти длину его стороны. Например, площадь 49 см^2 означает сторону 7 см . Так математика связывает одно измерение с другим и делает вычисления наглядными.



Диагональ на чертеже

В геометрии корни часто появляются при нахождении диагонали. У квадрата со стороной 5 см диагональ равна $5\sqrt{2}$, поэтому ответ записывают точно, без округления. Это удобно в чертежах и при сравнении размеров.



Расстояние на координатной плоскости

На клетчатой бумаге и в координатной плоскости длины отрезков нередко выражаются через корни. Такой ответ показывает расстояние точно, а не приблизительно, поэтому его можно использовать дальше в решении без потери точности.



Главное о тождествах с квадратными корнями



Квадратные корни удобно преобразовывать, если помнить условия: подкоренное выражение неотрицательно, а результат корня тоже неотрицателен. Правильный выбор тождества помогает упростить выражение и проверить ответ.

