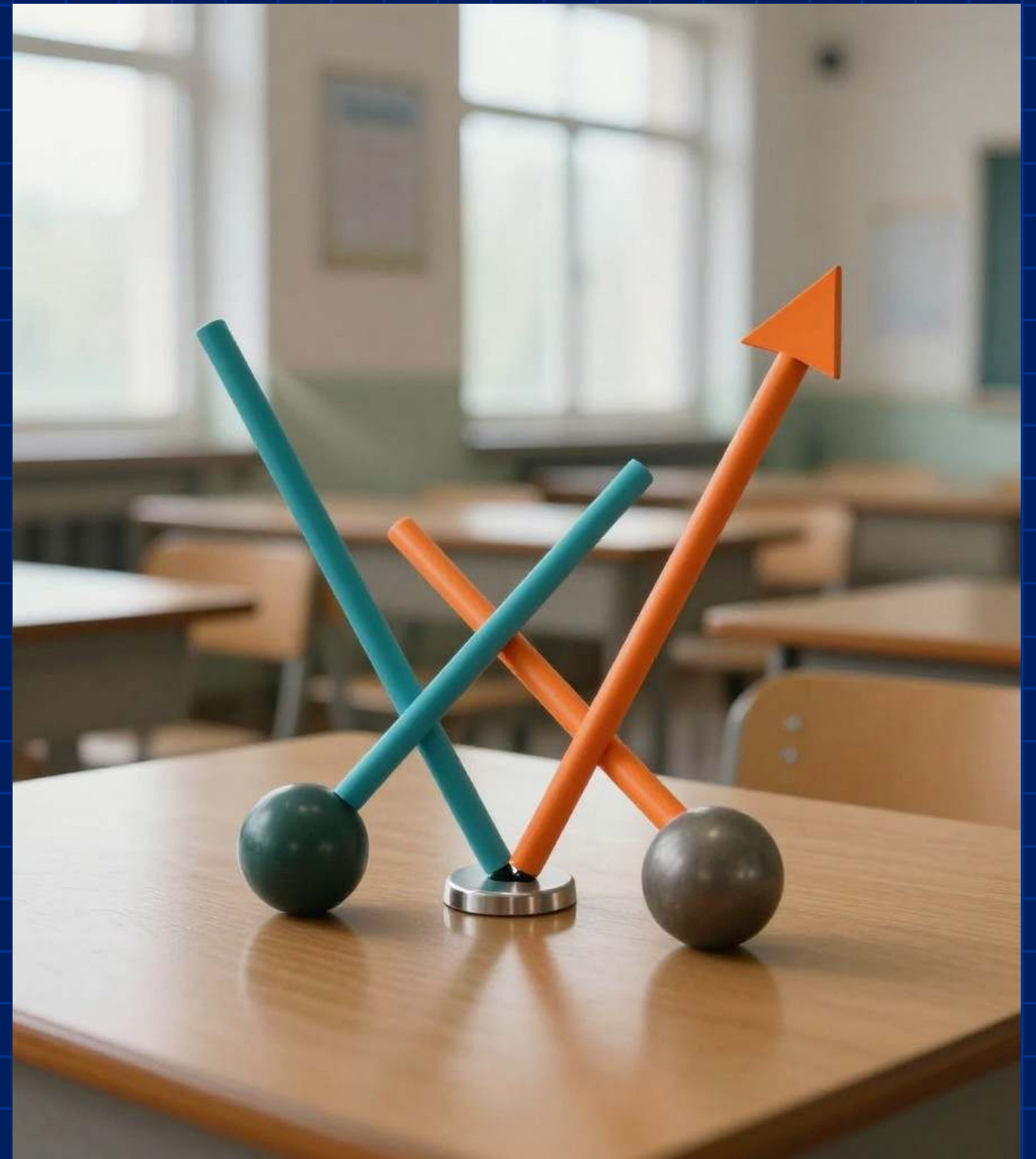


Скалярное произведение векторов: основная идея, формулы и применение в геометрии

Связывает длины и угол между векторами; помогает вычислять, проверять перпендикулярность и находить углы.



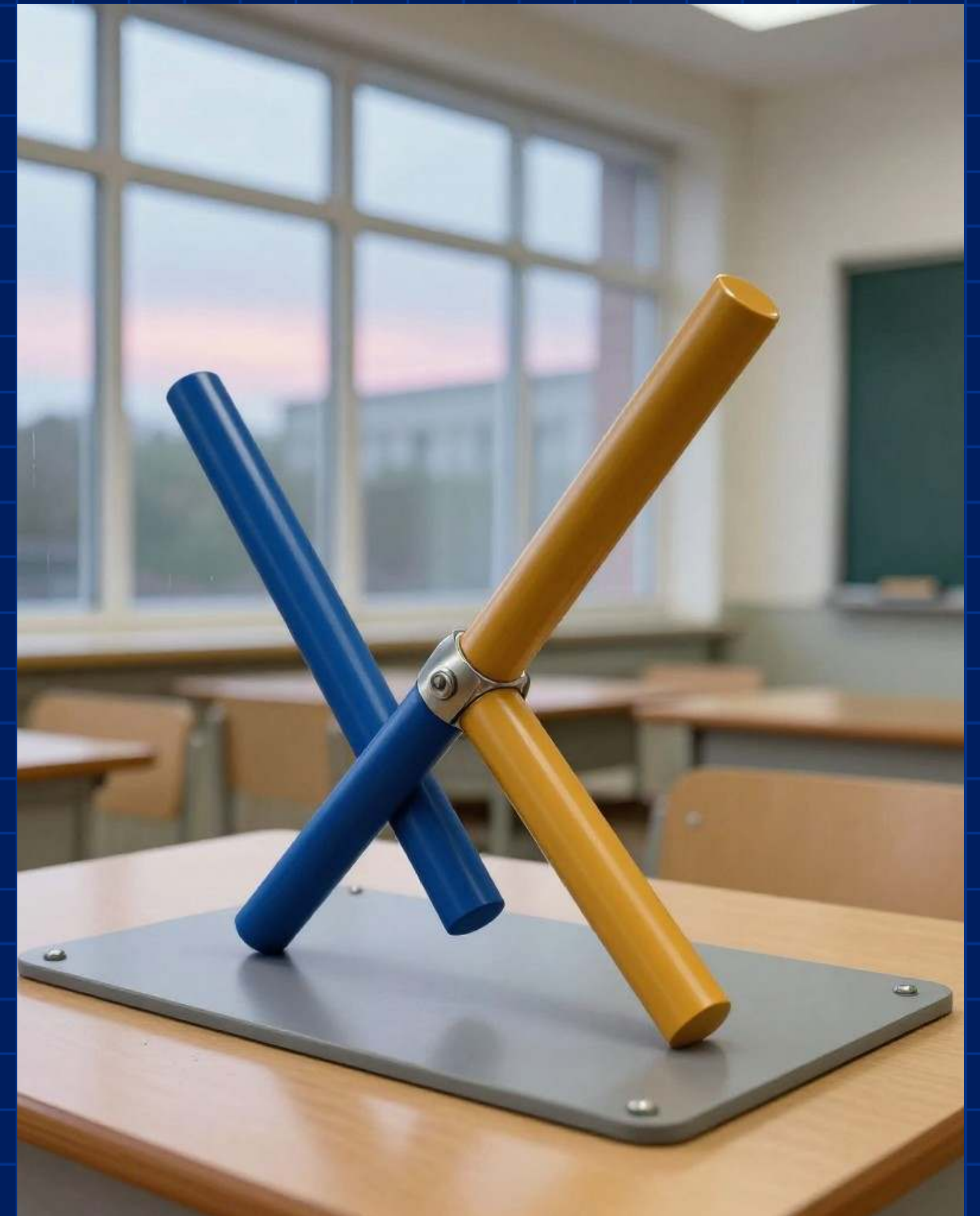
1 ÷ 2

log

8

Зачем в школьной геометрии нужно скалярное произведение

Это базовая операция аналитической геометрии: она переводит рисунок взаимного расположения векторов в точное число. Через неё изучают координаты, углы, перпендикулярность и проекции. Также на ней держатся многие физические формулы, включая работу силы.



Определение скалярного произведения

Скалярное произведение векторов a и b задаётся формулой $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между ними. Итог — число, а не вектор, поэтому с ним удобно работать в вычислениях.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то произведение равно 0. Это согласуется с формулой: длина нулевого вектора равна нулю, и весь множитель обращается в ноль.

Значение $a \cdot b$ определяется одновременно длиной каждого вектора и их взаимным направлением. При одном и том же угле изменение длины меняет результат, а при равных длинах важнее становится именно угол.



Геометрический смысл формулы $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$

Если векторы сонаправлены, угол $\varphi = 0^\circ$, $\cos \varphi = 1$, и скалярное произведение принимает наибольшее положительное значение. Это отражает «максимальную согласованность направлений».

При перпендикулярности угол равен 90° , $\cos \varphi = 0$, поэтому $a \cdot b = 0$. Так скалярное произведение превращается в удобный признак ортогональности.

При тупом угле $\cos \varphi$ отрицателен, и скалярное произведение становится отрицательным. Знак показывает, что направления векторов частично «противоречат» друг другу.

Таким образом, по знаку и величине результата можно судить о взаимной ориентации: положительный – векторы направлены «в одну сторону», отрицательный – «в противоположные».

Зависимость знака скалярного произведения от угла между векторами

Угол φ	$\cos \varphi$	Знак $a \cdot b$
0°	1	положительное
60°	$1/2$	положительное
90°	0	равно 0
120°	$-1/2$	отрицательное
180°	-1	отрицательное (минимальное)

По определению $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ и стандартным значениям $\cos \varphi$.

Сравните углы φ , значения $\cos \varphi$ и знак скалярного произведения при фиксированных длинах векторов.

Ключевой вывод: знак $a \cdot b$ определяется величиной угла. Острый угол даёт положительный результат, прямой — нулевой, тупой — отрицательный.

Координатная формула скалярного произведения

1 Если векторы заданы на плоскости координатами $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$, то $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$. Это позволяет вычислять скалярное произведение без обращения к рисунку.

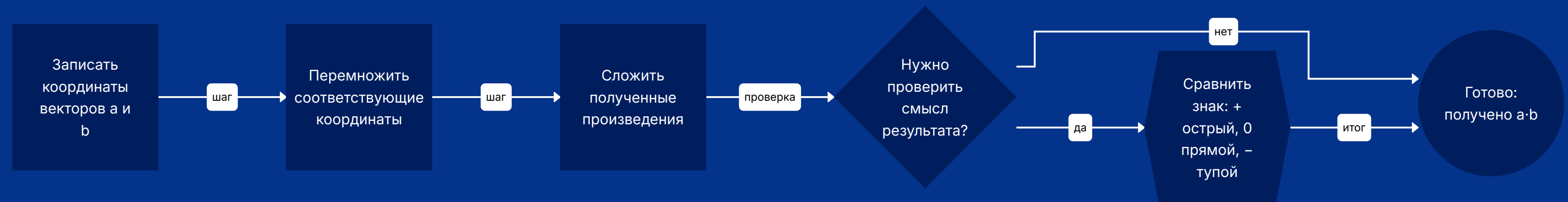
2 В пространстве для $a = (x_1, y_1, z_1)$ и $b = (x_2, y_2, z_2)$ используется формула $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Она особенно удобна в задачах про отрезки и диагонали.

3 Координатная запись помогает работать «в лоб»: формула сразу выражает результат через числа. Поэтому при решении задач можно избежать лишних шагов с вычислением длин и углов по отдельности.

4

Вычисляем скалярное произведение по координатам

Алгоритм подходит и для плоскости, и для пространства – меняется лишь набор координат.



Свойства скалярного произведения

1

Скалярное произведение коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$. Это полезно, когда выражение получается «в неудобном порядке», и нужно аккуратно переставить множители для дальнейших преобразований.

8

2

Оно дистрибутивно относительно сложения: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Благодаря этому сложные выражения с несколькими векторами можно разложить на более простые части.

5

3

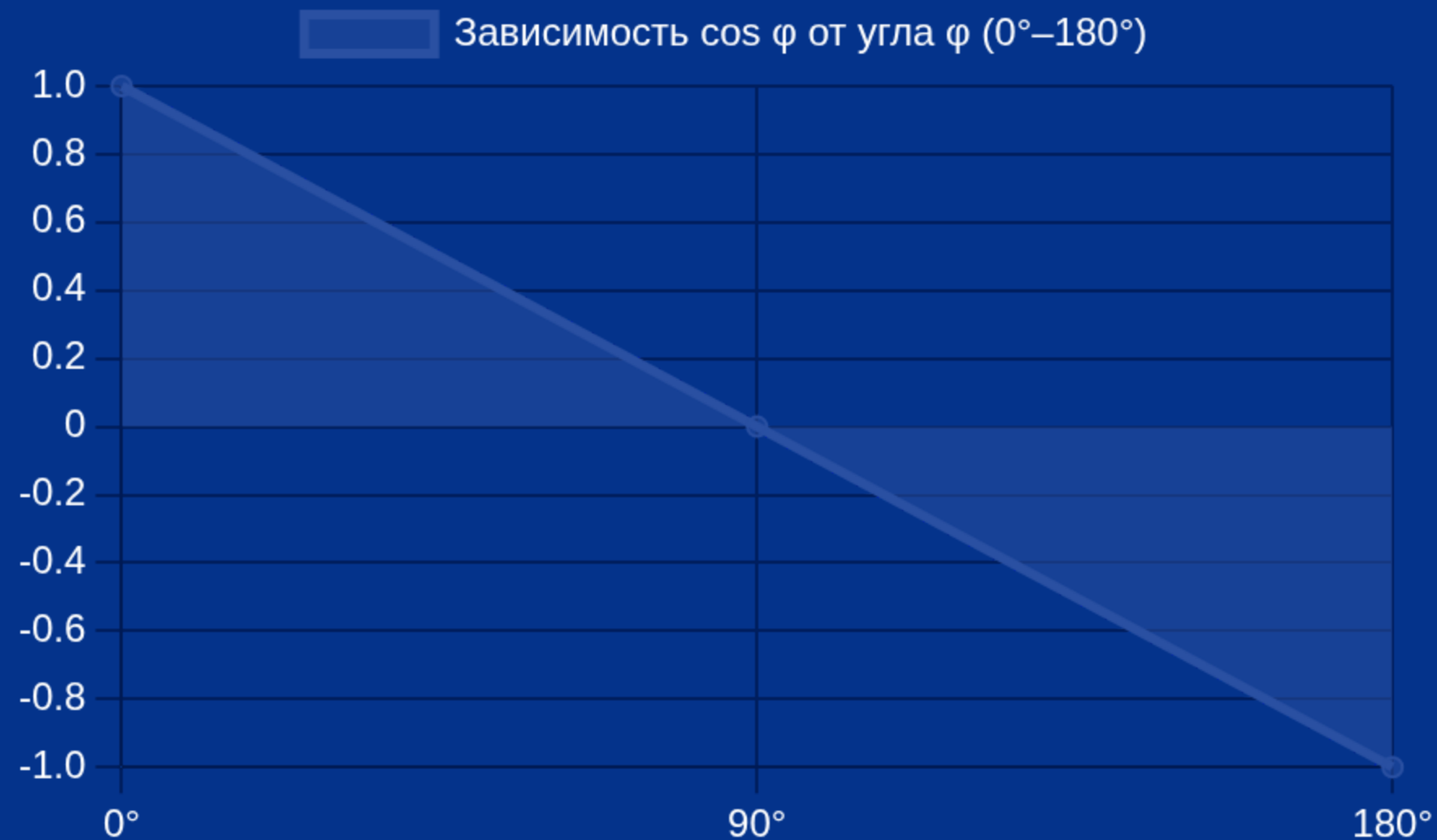
При умножении вектора на число работает правило $(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$. Такие преобразования помогают упрощать формулы и собирать общие множители без потери смысла.

9

4

Для любого вектора a верно $a \cdot a = |a|^2$: скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины. Это связывает операцию с геометрической величиной напрямую.

Как меняется $\cos \varphi$ при увеличении угла между векторами



Графическая зависимость $\cos \varphi$ по формуле $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ и свойствам тригонометрии.

Кривая показывает непрерывную смену знака: при переходе через 90° $\cos \varphi$ перестаёт быть положительным. Отсюда меняется и знак $a \cdot b$.

Чем больше угол между векторами, тем меньше согласованность их направлений. Острое – усиливает, прямое – «обнуляет», тупое – делает результат отрицательным.

Перпендикулярность векторов как частный случай



orthogonality in space:
checking by coordinates



Прямая подсказка: когда $a \cdot b = 0$

Представьте два вектора, образующие прямой угол в плоскости. Их скалярное произведение становится нулевым: $a \cdot b = 0$. Именно это используют в задачах как быстрый признак перпендикулярности, не требующий дополнительных построений.

Ортогональность в пространстве: проверка «по координатам»

В трёхмерных задачах прямой угол между направлениями часто задают координатами векторов. Если после вычислений получилось $a \cdot b = 0$ и оба вектора ненулевые, значит они перпендикулярны. Так геометрическое условие превращается в проверяемое уравнение.

Проекция вектора на направление другого вектора

1



Проекция как «доля вдоль направления»

Скалярное произведение связывает угол и длины: $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$. Проекция показывает, какая часть вектора a направлена вдоль заданной прямой направления b .



Единичный вектор упрощает смысл

Если b — единичный вектор ($|b| = 1$), то $a \cdot b = |a| \cos \varphi$ становится числовой проекцией вектора a на направление b . Благодаря этому вычисления читаются геометрически.



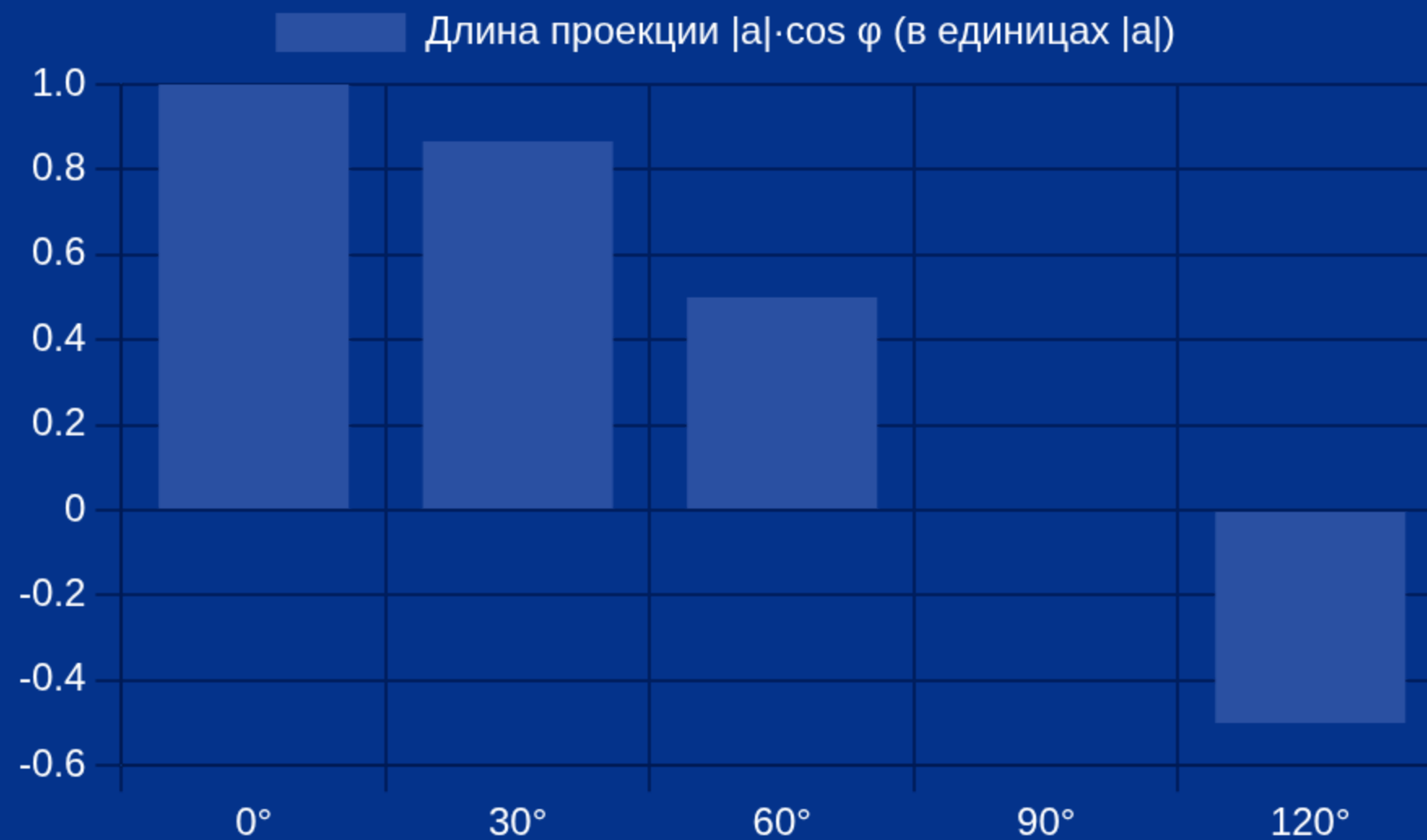
Практика: оси, движение и силы

Проекции используют при разложении вектора по координатным осям: удобнее отделять «сильную» и «малую» составляющие. В задачах о движении и силе учитывают вклад вдоль перемещения.

2

x

Сравнение длины вектора и его проекции при разных углах



Расчёт по значениям $\cos \varphi$: 0° , 30° , 60° , 90° , 120° .

Столбцы показывают не абсолютные величины, а результат умножения $|a|$ на $\cos \varphi$: знак появляется автоматически при угле больше 90° .

По диаграмме видно: с ростом угла проекция убывает от максимальной до нуля, а затем меняет знак, отражая противоположное направление.

Применение скалярного произведения в физике: работа силы

Работа постоянной силы выражается так: $A = F \cdot s = |F| \cdot |s| \cdot \cos \varphi$, где φ — угол между вектором силы и перемещением. Это именно скалярное произведение в физическом контексте.

Когда $\varphi = 0^\circ$, сила направлена вдоль движения, и $\cos \varphi = 1$, поэтому работа максимальна. При $\varphi = 90^\circ$ получаем $A = 0$: сила не продвигает тело в направлении перемещения.

Если φ — тупой, $\cos \varphi$ отрицателен, значит $A < 0$: сила действует против движения. Такой сценарий типичен, например, для трения, тормозящего перемещение.

$$x^2 + 4x - 8$$

Использование скалярного произведения в задачах по геометрии

Скалярное произведение помогает находить углы между прямыми и векторами: через $\cos \varphi$ можно перейти от вычислений к геометрическому выводу. Это работает как на плоскости, так и в пространстве.

Условие перпендикулярности формулируется кратко: при ненулевых векторах $a \cdot b = 0$ угол равен 90° . Поэтому проверка прямого угла сводится к вычислению суммы произведений координат.

В задачах на длины и диагонали часто используют связку $a \cdot a = |a|^2$. Тогда длина отрезка или диагонали получается через скалярное произведение, без отдельного поиска расстояний.

Когда фигуры заданы координатами, скалярное произведение упрощает работу с уравнениями прямых и плоскостей. Оно также позволяет формулировать условия равенства и параллельности через векторы.

Типовые задачи по теме и используемые формулы

№	Исходные данные	Нужно найти	Ключевая формула
1	Координаты векторов a и b	Скалярное произведение $a \cdot b$	$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$ (и $+ z_1z_2$ в пространстве)
2	Вектор a	Его длину $ a $	$ a = \sqrt{a \cdot a}$
3	Координаты a и b	Угол φ	$\cos \varphi = (a \cdot b) / (a b)$
4	Два вектора a и b	Перпендикулярность	$a \cdot b = 0$ (при ненулевых векторах)
5	Сила F и перемещение s , φ	Работу A	$A = F \cdot s \cdot \cos \varphi$

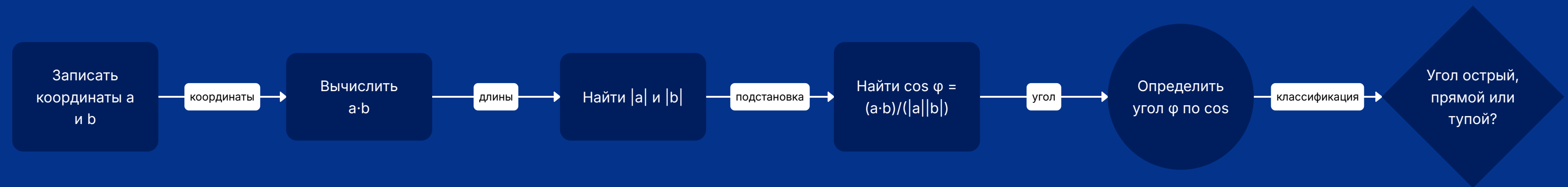
Сводка по школьному курсу аналитической геометрии и введению в физику (работа силы).

В таблице показаны типовые формулировки заданий и «короткий маршрут»: какие величины берут из условия, какую формулу применяют и что получают в результате.

Во всех типах заданий ядро одно: находят $a \cdot b$ и связывают его с углом, длиной или знаком результата. Это делает решение системным и проверяемым.

Алгоритм нахождения угла между двумя векторами

Последовательность опирается на координаты, вычисление $a \cdot b$ и формулу через $\cos \varphi$.



Связь чертежа, проекции и координатной записи

1

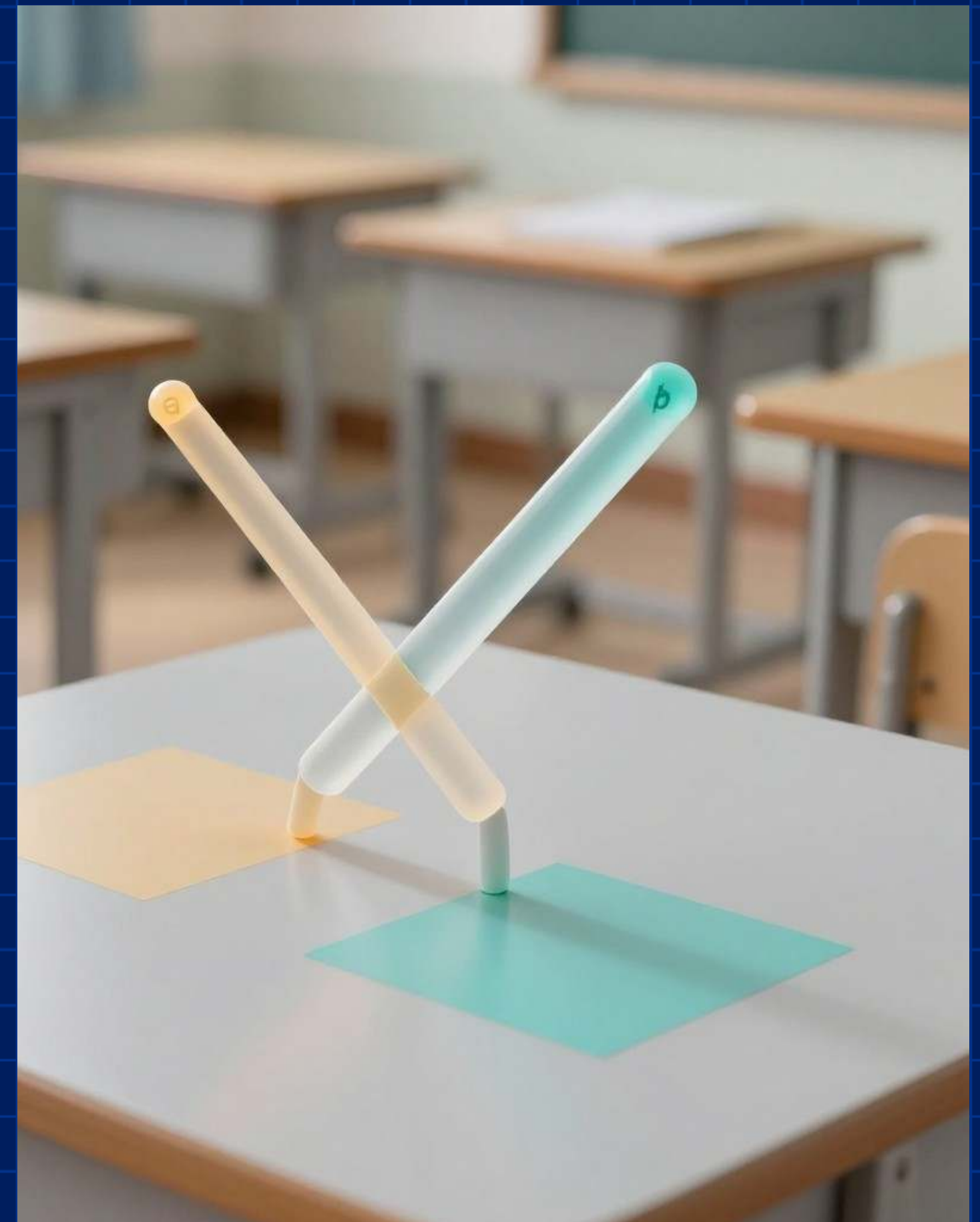
2

Один и тот же смысл в двух языках

На схеме два вектора образуют угол φ , а рядом показывают проекции и длины. Величина $a \cdot b$ читается как геометрическая характеристика взаимного направления: знак и размер связаны с $\cos \varphi$.

От рисунка к формуле и обратно

Ту же величину можно вычислить по координатам: для плоскости $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$, а в пространстве добавляется z_1z_2 . Эта связь помогает решать школьные задачи по единой схеме.



Знак скалярного произведения в разных углах

0°–90° (положительное) 90° (нулевое)
90°–180° (отрицательное)



Логика знака из формулы $a \cdot b = |a||b|\cos \varphi$ (диапазоны по определению углов).

Порог в точности 90° : в правой части сектора $\cos \varphi < 0$, поэтому $a \cdot b$ имеет противоположный знак по отношению к случаю острых углов.

Диаграмма подтверждает правило: знак результата определяется тем, является ли угол острым, прямым или тупым. Это позволяет быстро проверить ответ без длинных вычислений.

Типичные ошибки при работе со скалярным произведением

1

Частая ошибка – путать скалярное и векторное произведение: для скалярного нужен $\cos \varphi$ и знак через угол, а не «направление перпендикуляра». В ответе это сразу отражается на единицах и смысле результата.

2

Нередко теряют знак косинуса: при тупом угле $\cos \varphi$ отрицателен, поэтому $a \cdot b$ должно быть отрицательным. Если забыть про знак, получаются неверные выводы о взаимном расположении.

3

Иногда неправильно вычисляют длины векторов: подставляют координаты без квадрата или берут не ту формулу, забывая $\sqrt{a \cdot a}$. Тогда $\cos \varphi$ выходит «правдоподобным», но численно ошибочным.

4

Ещё одна проблема – считать, что перпендикулярность доказана без проверки ненулевости векторов. Надёжная проверка опирается на формулу $a \cdot b = |a||b|\cos \varphi$, координатную запись и геометрический смысл знака.

8

5

9

Скалярное произведение: формула, смысл и практическая польза

Скалярное произведение соединяет алгебру и геометрию: позволяет находить угол, проверять перпендикулярность, вычислять проекции и работать с длинами. В 11 классе это ключ к переходу от чертежа к координатной записи.



cos

sin

1

tg

ctg