



Выпуклый многоугольник: от образа к формулам

Покажем, как увидеть фигуру, проверить её свойства и вывести основные формулы.

Почему это важно



Выпуклые многоугольники помогают быстро оценивать форму, находить углы и считать диагонали. Эти идеи полезны в черчении, орнаментах, плитке, графике и заданиях ЕГЭ.

Основные идеи о многоугольнике



Замкнутая фигура

Многоугольник образован отрезками, которые соединяются в замкнутую линию. Благодаря этому у фигуры есть чёткая граница, удобная для измерений и построений.



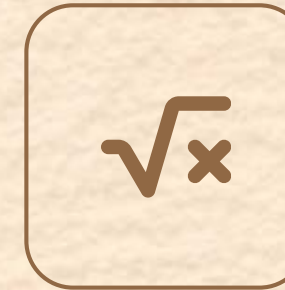
Вершины и стороны

Точки, где отрезки встречаются, называются вершинами. Отрезки между соседними вершинами образуют стороны, по которым удобно считать число элементов фигуры.



Признак выпуклости

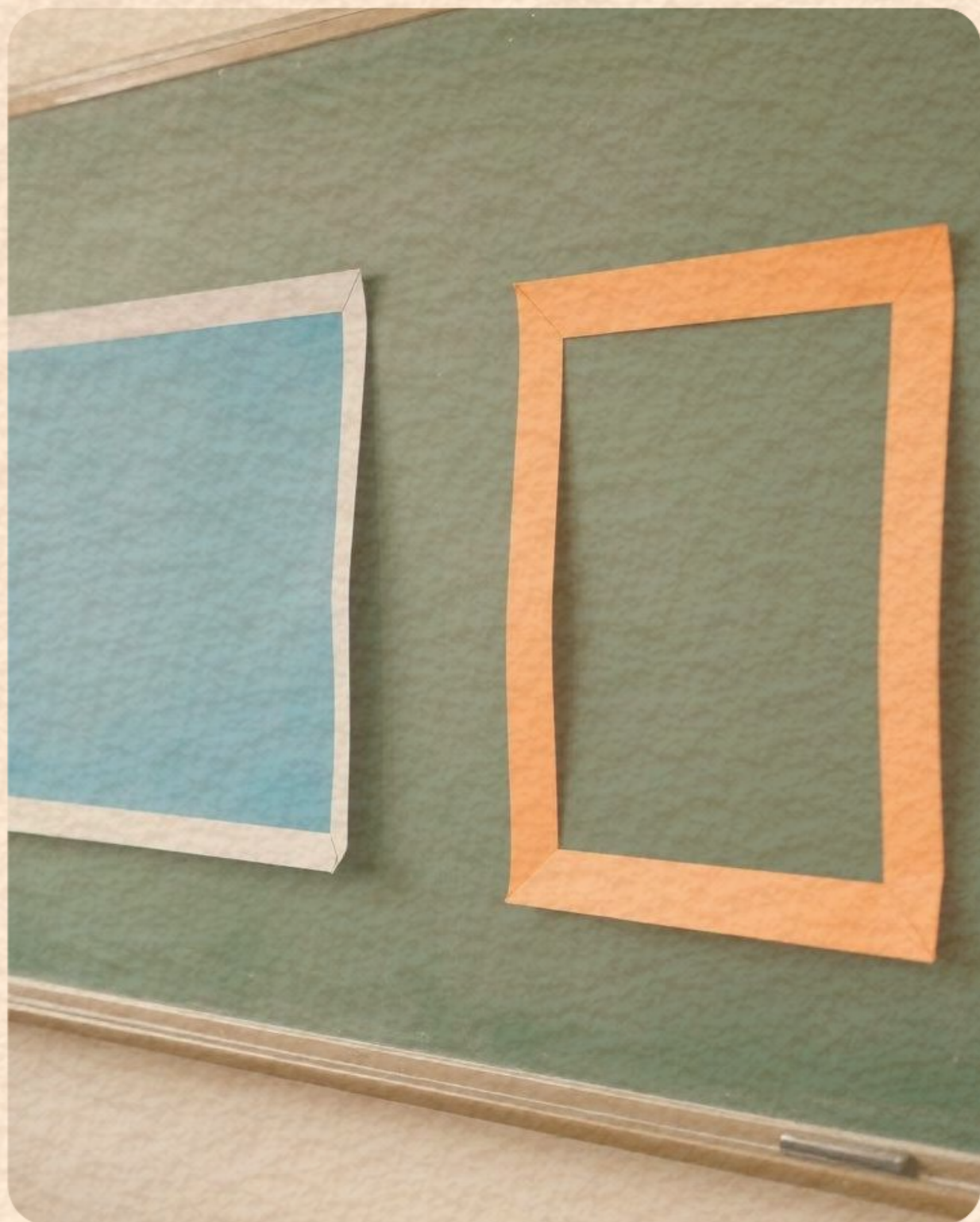
Если фигура выпуклая, её форма выглядит «ровной»: без заметных впадин и резких углублений. Это помогает отличать её от невыпуклых фигур.



Зачем знать элементы

Понимание этих элементов нужно не только для распознавания фигур, но и для формул углов, диагоналей и свойств правильных многоугольников.

Выпуклый и невыпуклый: главное различие



Выпуклая фигура

У выпуклого многоугольника нет впадин: все вершины расположены так, что граница как будто «обтягивает» фигуру снаружи. Любой отрезок между точками внутри остаётся внутри.

Невыпуклая фигура

У невыпуклого многоугольника есть хотя бы одна вогнутая часть. Из-за неё отрезок между двумя точками фигуры может частично выйти за пределы.

Как распознать выпуклость

1 1. Углы меньше 180°

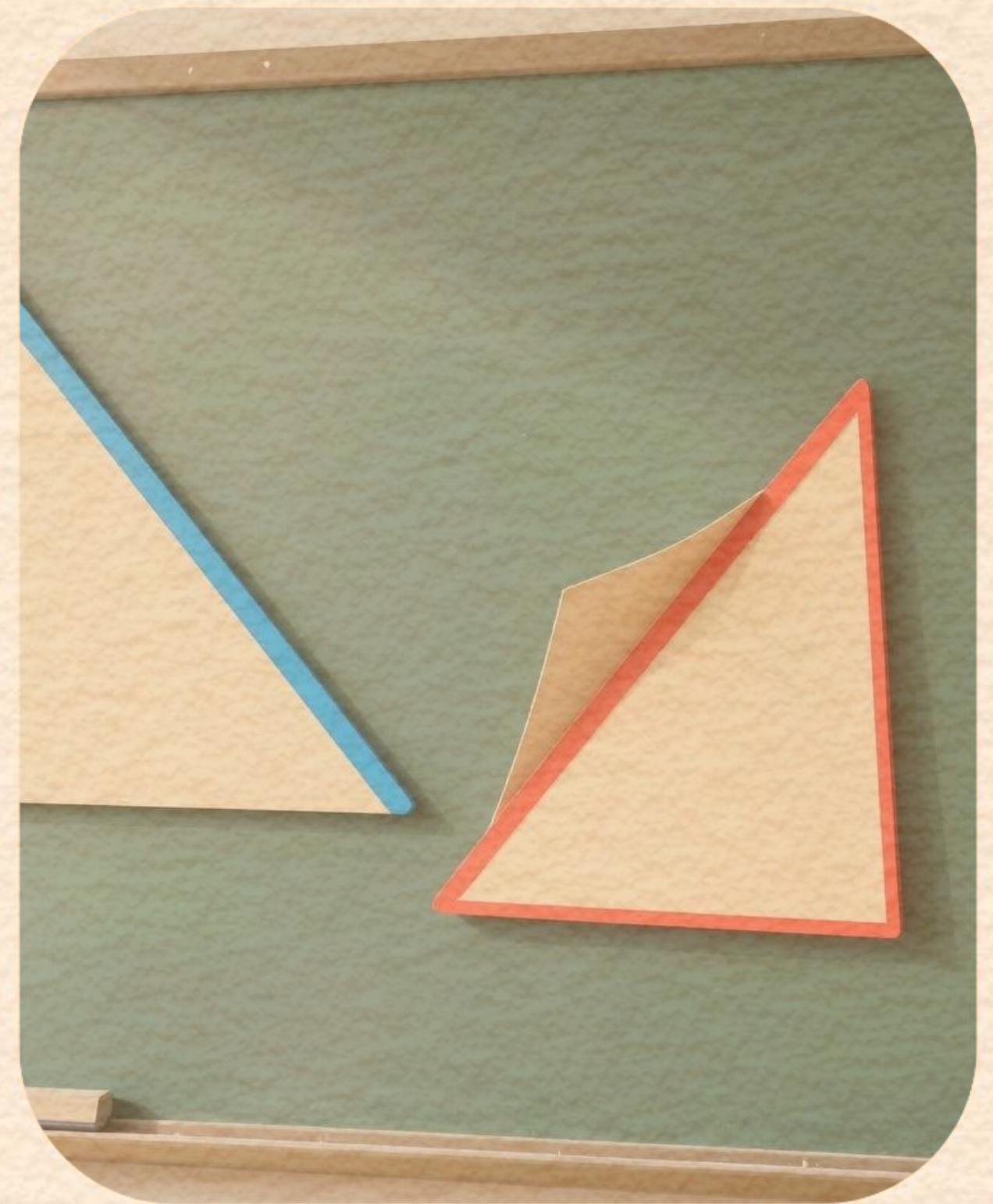
Проверь внутренние углы: у выпуклого многоугольника каждый из них меньше 180° . Если хотя бы один угол развёрнут сильнее, фигура уже не выпуклая.

2 2. Диагонали не выходят наружу

Посмотри на диагонали: в выпуклой фигуре все они проходят внутри или по границе. Если какая-то диагональ выходит наружу, есть вогнутость.

3 3. Нет вогнутых частей

Обрати внимание на форму границы: у выпуклой фигуры нет «зубцов» и резких впадин. Нарушение любого из этих признаков означает невыпуклость.



Вершины, стороны, диагонали и углы



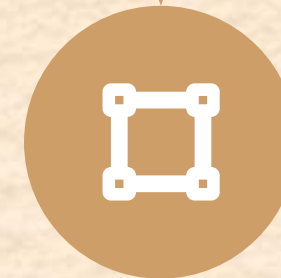
Вершины

Вершины — это точки, где стороны соединяются между собой. Именно по вершинам обычно считают число сторон и обозначают многоугольник буквой n .



Стороны

Стороны — это отрезки границы, соединяющие соседние вершины. Они образуют контур фигуры и определяют её размер и форму.



Диагонали

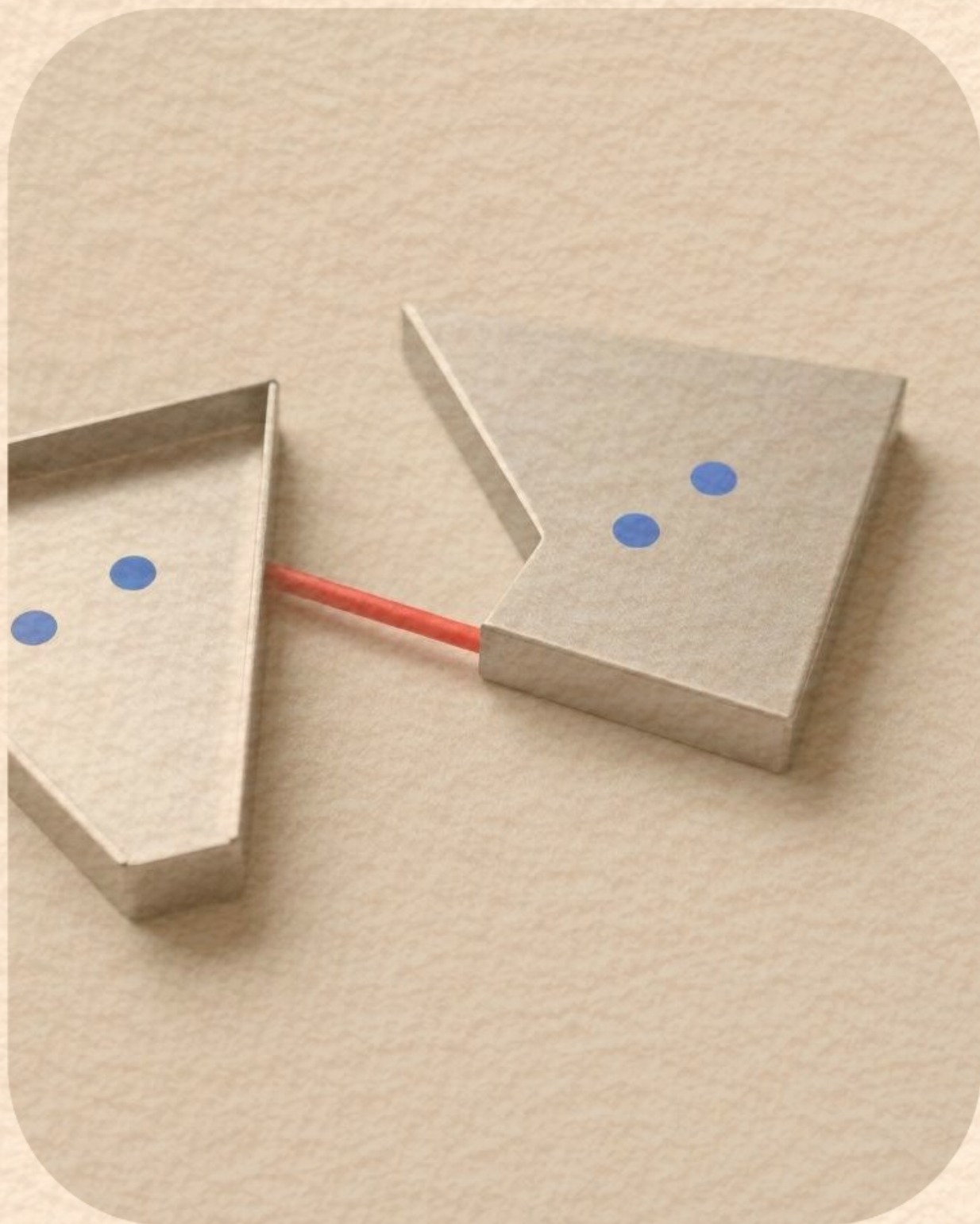
Диагональ соединяет две несоседние вершины. В отличие от стороны, она проходит внутри фигуры и помогает разбирать многоугольник на части.



Углы

Внутренний угол лежит внутри фигуры, а внешний появляется, если продолжить одну из сторон. Эти углы тесно связаны между собой.

Отрезок внутри фигуры



Связь точек внутри

Если обе точки лежат внутри выпуклой фигуры, соединяющий их отрезок не пересекает границу. Это один из самых удобных способов проверить выпуклость.

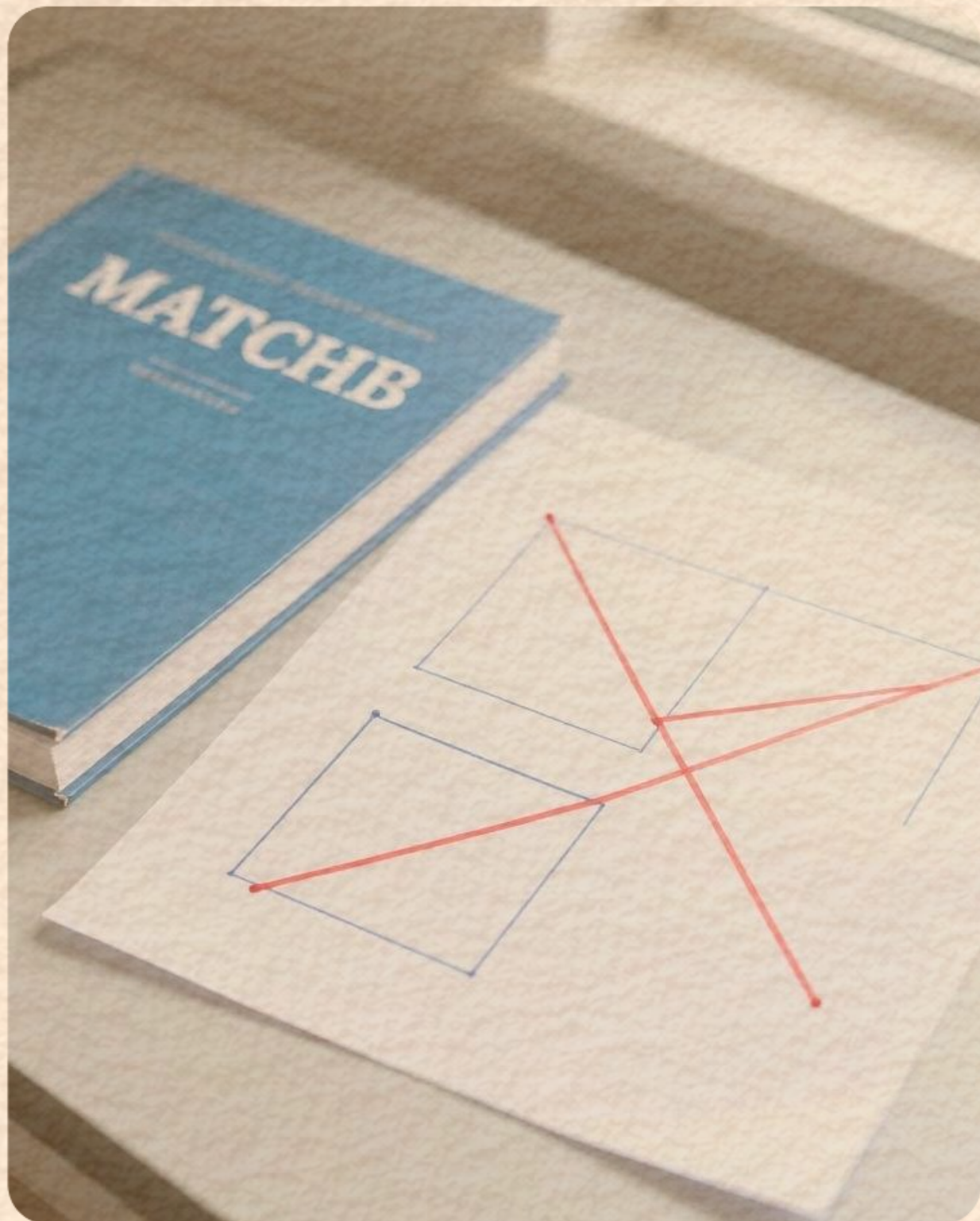
Нет выхода за границу

У выпуклого многоугольника нет участков, которые «заворачиваются» внутрь. Поэтому любые внутренние связи остаются в пределах фигуры и не выходят наружу.

Признак невыпуклости

Если хотя бы один внутренний отрезок покидает фигуру, перед нами невыпуклый многоугольник. Такой пример легко заметить на рисунке со впадиной.

Примеры внутреннего отрезка



1. Треугольник

В треугольнике любая точка внутри связана с другой внутренней точкой отрезком, который остаётся внутри. Это простейший пример выпуклой фигуры.

2. Квадрат

То же происходит в квадрате: внутренний отрезок можно провести как угодно, и он не выйдет за границу. Форма остаётся выпуклой.

3. Фигура с впадиной

У фигуры с вогнутой частью, например у звёздочки, часть внутреннего отрезка легко выходит наружу. Значит, такая фигура не выпуклая.

Формула диагоналей

Диагонали быстро растут с числом сторон: формула показывает это лучше всего. Уже у семиугольника их значительно больше, чем сторон.

Значение растёт по формуле $n(n-3)/2$: у треугольника диагоналей нет, а дальше число быстро увеличивается.

Формула для выпуклого n -угольника;
расчётные значения для $n = 3-8$



Откуда берётся формула углов

1 Берём одну вершину

Если провести диагонали из одной вершины, она соединится со всеми несоседними вершинами. Соседние исключаются, потому что они образуют стороны многоугольника.

2 Считаем разбиение

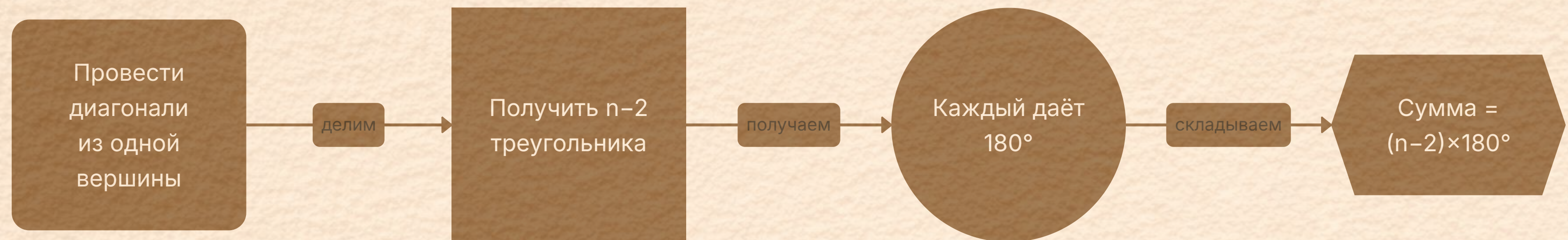
Из одной вершины выпуклого n -угольника можно провести ровно $n-3$ диагонали. Эти отрезки делят фигуру на несколько частей без пересечений внутри.

3 Переходим к сумме углов

Каждая добавленная диагональ создаёт новый треугольник, поэтому всего получается $n-2$ треугольника. Их суммы углов и дают формулу для всего многоугольника.

Как получить сумму внутренних углов

Разбиение выпуклого n -угольника на треугольники из одной вершины помогает вывести формулу суммы внутренних углов.



Проверка формулы на простых фигурах

Базовые примеры удобно проверять по формуле суммы внутренних углов выпуклого многоугольника.

Значение растёт на 180° при добавлении каждой новой стороны: это соответствует разбиению фигуры на новые треугольники.

n	Сумма углов
3	180°
4	360°
5	540°

Формула суммы внутренних углов выпуклого n -угольника: $(n-2) \times 180^\circ$

При полном обходе фигуры направление поворота замыкается в один круг, поэтому результат не зависит от числа сторон.

Свойство суммы внешних углов выпуклого многоугольника при обходе по вершинам

360°

— это постоянная сумма внешних углов выпуклого многоугольника.

Связь внутренних и внешних углов



1 Один развёрнутый угол

В одной вершине внутренний и внешний углы образуют развёрнутый угол. Поэтому их сумма всегда равна 180° , независимо от формы выпуклого многоугольника.

2 Как быстро найти внешний

Если внутренний угол уже известен, внешний находят простым вычитанием из 180° . Например, при 135° внутри снаружи остаётся 45° .

Главные признаки правильной фигуры



Равные стороны

Все стороны равны, поэтому фигура выглядит одинаково по всему периметру и удобно строится по шаблону.



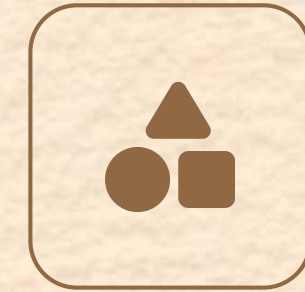
Равные углы

Все углы равны, значит форма не «тянется» в одну сторону и сохраняет одинаковый вид у каждой вершины.



Симметрия

Фигура имеет осевую симметрию: при отражении относительно оси она совпадает сама с собой.



Примеры

К этому типу относятся равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник — самые наглядные примеры.

Углы правильного многоугольника

На графике видно, что внутренний угол растёт вместе с числом сторон, а внешний, наоборот, уменьшается.

У правильного n -угольника два угла связаны одной суммой 180° , поэтому при росте n внутренний угол увеличивается, а внешний уменьшается.

Формулы: внутренний угол $((n-2) \times 180^\circ)/n$,
внешний угол $360^\circ/n$



Проверяем формулы на примерах

Пятиугольник

В правильном пятиугольнике каждый внешний угол равен 72° , поэтому внутренний угол составляет 108° . Это хороший пример для проверки связи 180° между двумя углами.

Угол по дополнению

Если внутренний угол равен 150° , внешний находится как $180^\circ - 150^\circ$ и равен 30° . Такой приём работает для любой вершины выпуклого многоугольника.

Восьмиугольник

У правильного восьмиугольника внутренний угол равен 135° . Его удобно запомнить как пример фигуры, где внешний угол уже заметно меньше 90° .

Короткие задачи на диагонали

Фигура	Результат	Проверка
8-угольник	20 диагоналей	$8 \cdot 5 / 2$
9-угольник	27 диагоналей	$9 \cdot 6 / 2$
$n=6$	4 треугольника	$6 - 2$

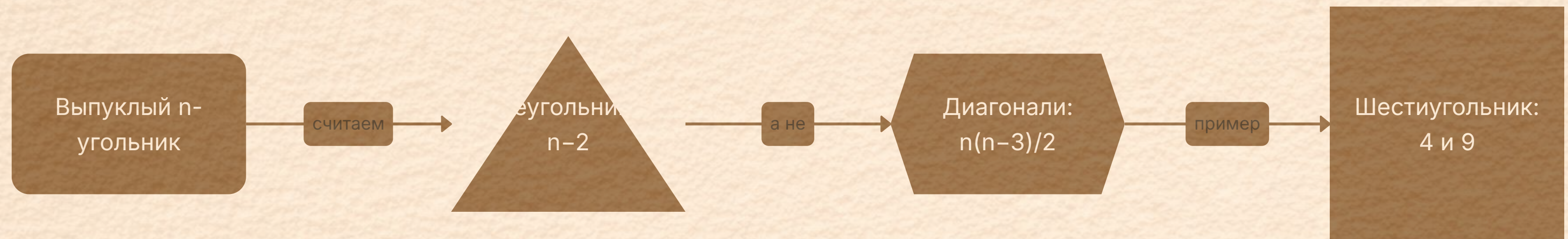
Сравним задачи, где нужно быстро применять формулу числа диагоналей и правило разбиения из одной вершины.

Диагонали и треугольники считаются по разным правилам: число диагоналей зависит квадратично от n , а число треугольников — линейно.

Формулы: диагонали $n(n-3)/2$, треугольники из одной вершины $n-2$

Не путать формулы

Разбиение фигуры даёт два разных результата: количество треугольников и количество диагоналей.



Что важно запомнить

Теперь вы умеете узнавать выпуклую фигуру, считать диагонали и углы, а также проверять себя на простых примерах. Попробуйте вывести формулы ещё раз самостоятельно.