

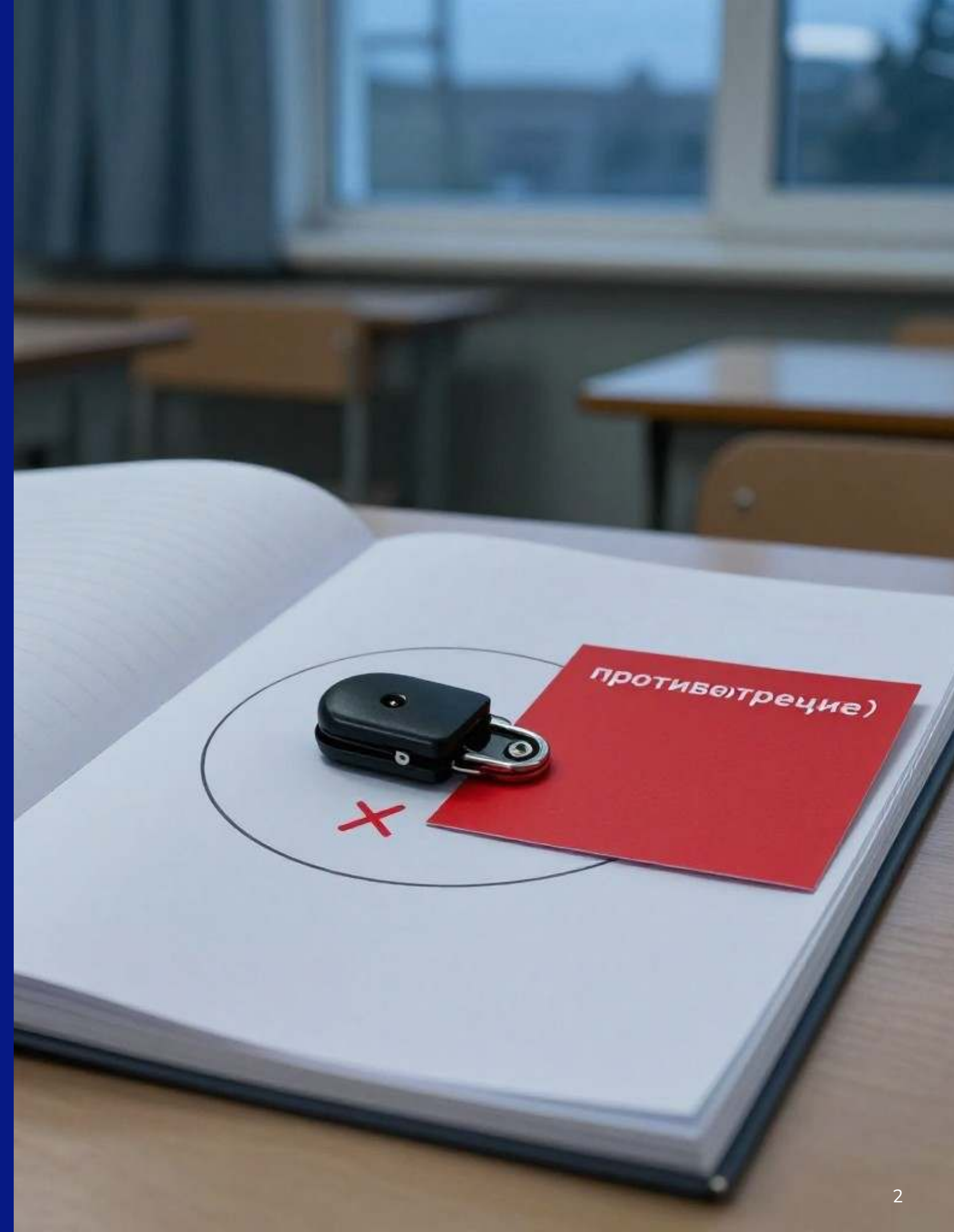
Доказательство от противного



Проверим, как невозможное становится доказательством.

Как работает косвенное доказательство

Это способ доказательства, при котором мы временно допускаем обратное утверждение и проверяем, не приводит ли оно к невозможности. Если возникает конфликт, исходное утверждение считается верным.



Когда нужно доказывать через невозможность

1. Прямой путь сложен

Когда прямой путь получается длинным или запутанным, удобнее проверить, может ли неверный вариант вообще существовать. Если нет, задача решается почти сама собой.

2. Лишние варианты легко убрать

Метод особенно полезен, если нужно отсеять лишние случаи: нечетность, делимость, равенство, ограничение на целые числа или несовместимость двух свойств.

3. Остается один ответ

В логических задачах такой прием помогает оставить единственный возможный ответ. Все остальные предположения по очереди приводят к противоречию и исчезают.

Идея метода в одной цепочке

Формулировка цели

Сначала четко формулируют, что именно нужно доказать, чтобы не потерять цель рассуждения. Без этого легко проверить не то утверждение и сделать неверный вывод.

Противоположное предположение

Затем временно принимают противоположное утверждение и работают с ним как с настоящим. Это не ошибка, а рабочий шаг, который нужен для поиска конфликта.

Поиск противоречия

Дальше выводят следствия и ищут невозможность: нарушение условия, определения, свойства числа или очевидного ограничения. Найденный конфликт закрывает доказательство.



Когда этот метод особенно полезен

Четность и делимость

В задачах на четность и делимость этот метод часто короче прямого доказательства. Достаточно показать, что противоположный случай ломает правило деления или знак остатка.

Несовместимые свойства

Он удобен, если нужно доказать невозможность одновременного выполнения двух свойств. Например, число не может одновременно быть четным и нечетным, целым и дробным.

Сравнение и оценки

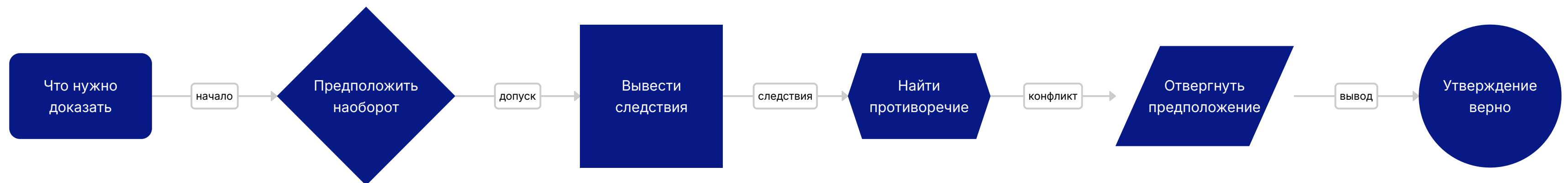
Метод помогает в оценках и сравнениях, когда достаточно обнаружить нарушение неравенства. Так легче заметить, что выбранный вариант не может быть наименьшим или наибольшим.

Единственный ответ

Иногда он самый быстрый путь к единственности ответа. Если все альтернативы приводят к конфликту, остается один допустимый случай, и его уже не нужно долго искать.

Алгоритм доказательства от противного

Переход от предположения к конфликту и затем к выводу



Какие бывают противоречия

Противоречие с условием

Самый частый конфликт возникает с условием задачи. Если из предположения получается то, что прямо запрещено условием, дальнейшие рассуждения уже не нужны.

Противоречие с фактом

Иногда вывод сталкивается с уже известным фактом или определением. Тогда логика задачи нарушается, потому что два утверждения не могут быть истинными одновременно.

Невозможное свойство

Бывает и числовой конфликт: целое число не может стать дробным, длина не бывает отрицательной, а число не может быть сразу четным и нечетным.

Нужна невозможность

Важно не просто заметить странность, а показать именно невозможность. Только тогда рассуждение завершено правильно и исходное утверждение получает доказательство.

Разбор очень простого примера

1. Поставим цель

Нужно доказать, что 7 не является четным числом. Для этого сначала временно допускаем противоположное и проверяем, к чему приведет такое предположение.

2. Сделаем допущение

Предположим, что 7 четное. Тогда оно делится на 2 без остатка, а значит должно иметь вид $2k$ для некоторого целого k .

3. Получаем конфликт

Но при делении 7 на 2 получается остаток 1. Это не совпадает с определением четного числа, поэтому предположение оказалось неверным.

4. Делаем вывод

Следовательно, число 7 нечетное. Мы не просто увидели пример, а доказали невозможность противоположного варианта.

Пример 1: четность и квадрат числа

1. Что нужно доказать

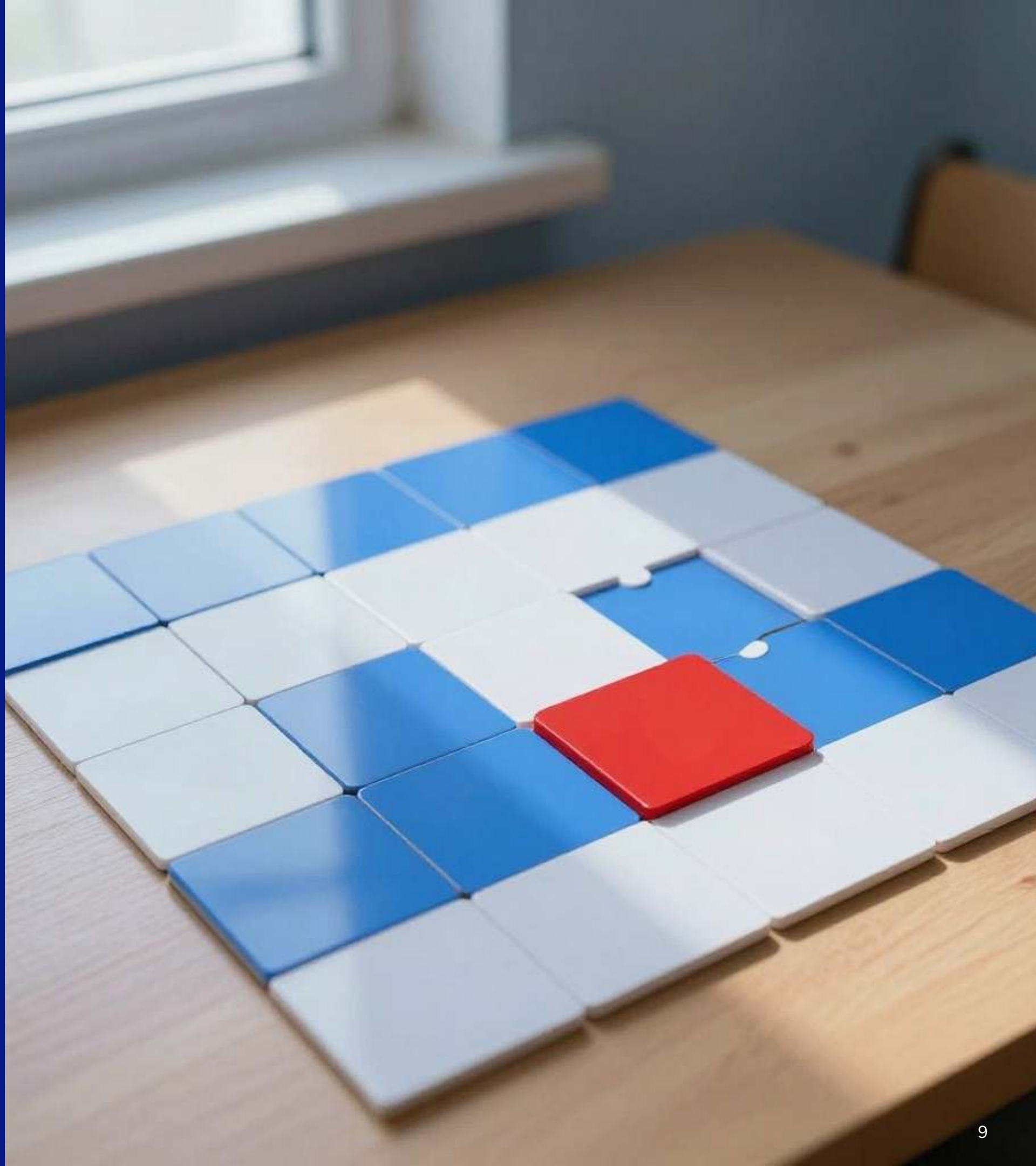
Докажем утверждение: если квадрат числа четный, то само число тоже четное. Начнем с противоположного случая и посмотрим, что из него получится.

2. Записываем число

Предположим, что n нечетное. Тогда его можно записать как $2k+1$. После возведения в квадрат получаем выражение $4k^2+4k+1$.

3. Находим противоречие

Это выражение нечетное, а значит не может совпадать с условием, что n^2 четное. Получилось противоречие, поэтому n не может быть нечетным.



2

**положительных
слагаемых достаточно,
чтобы сравнение стало
однозначным.**

В таких задачах важна не величина, а логика сравнения: меньшее число не может превосходить сумму двух положительных частей.

Условие примера



Пример 3: уравнение без действительных корней

Неверное предположение

Предполагаем, что существует действительное число x , для которого $x^2 + 1 = 0$. Тогда x^2 должно быть равно -1 , но квадрат действительного числа не бывает отрицательным.

Проверка через оценку

Для любого действительного x верно $x^2 \geq 0$. Значит, $x^2 + 1 \geq 1$, а потому выражение не может стать нулём. Получаем прямой конфликт с уравнением.

Вывод

Раз предположение о существовании действительного решения привело к невозможности, исходное утверждение верно: уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Пример 4: наглядная числовая ситуация

1. Шаг 1

Сначала принимаем противоположное: на полке можно разместить все 12 тетрадей, хотя мест только 11. Это означает, что для каждого предмета найдётся своё место.

2. Шаг 2

Дальше считаем места. Если тетрадей 12, а мест 11, то после размещения останется один лишний предмет. Он не может исчезнуть и не может стоять отдельно.

3. Шаг 3

Полученное несоответствие показывает, что наше предположение неверно. Значит, одновременно поставить 12 одинаковых тетрадей на 11 мест нельзя, и утверждение доказано.



Частые ошибки

Нет явного предположения

Иногда забывают прямо написать, что именно предполагается противоположным. Без этого читателю трудно понять, с чего начинается рассуждение и что именно нужно опровергнуть.

Нет конфликта

Не всякий новый факт является противоречием. Нужно дойти до невозможности: нарушения условия, свойства числа или известного правила, а не просто до очередного равенства.

Ранний вывод

Некоторые делают вывод слишком рано, увидев похожий результат. В доказательстве важно показать, почему полученное утверждение действительно невозможно, а не только неудобно.

Неверное отрицание

Ещё одна ошибка — перепутать отрицание с «плохой версией» утверждения. Нужно брать именно логическое противоположное, иначе рассуждение окажется неточным и неубедительным.

Как оформлять доказательство

1. 1. Предположение

Начните с фразы: «Предположим противное, что ...». Так сразу ясно, какое утверждение вы временно считаете неверным и зачем продолжаете рассуждение.

2. 2. Следствие

Затем запишите: «Тогда ...». На этом шаге используйте определение, формулу или свойство, которое следует из сделанного предположения.

3. 3. Противоречие

После этого укажите: «Но это противоречит ...». Ссылка должна быть точной: на условие задачи, определение, известный факт или уже полученное значение.

4. 4. Вывод

Завершите выводом: «Следовательно, предположение неверно, значит верно исходное утверждение». Такая концовка показывает, что доказательство завершено и логика не нарушена.

Где искать противоречие

Источник	Что проверять
Условие	Что задано
Определение	Что означает
Свойство	Что должно быть
Факт	Что уже известно

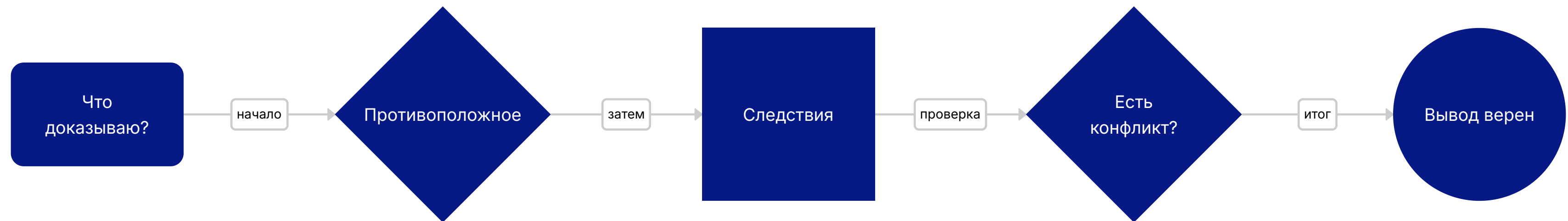
Материал по теме «Доказательство от противного»

Противоречие удобно искать не «в воздухе», а в конкретных источниках: в условии задачи, в определениях, в свойствах чисел и в уже известных фактах.

Если сверять шаги с условием, определением и свойствами, конфликт находится быстрее и доказательство получается точнее.

Чек-лист самопроверки

Проверка рассуждения по шагам помогает не пропустить предположение, конфликт и итоговый вывод.



Тренировочные задачи

1. Задача 1

Сначала предположите, что число 5 делится на 2. Затем примените определение делимости и проверьте остаток. В конце получится, что 5 не может быть чётным числом.

2. Задача 2

Для выражения x^2+2x+1 удобно сначала представить его как $(x+1)^2$. После этого проверьте, может ли квадрат быть отрицательным, и найдите противоречие.

3. Задача 3

В третьем задании подумайте, может ли число 9 одновременно обладать свойством чётности. Используйте определение чётных и нечётных чисел, чтобы вывести невозможность.

Подсказка: с чего начать

1. 1. Отрицание

Сначала запишите отрицание утверждения: именно его вы временно принимаете за верное. Это помогает не перепутать задачу и сразу понять, что нужно опровергнуть.

2. 2. Свойство

Потом подставьте определение или свойство, которое связано с условием: делимость, квадрат, чётность или неравенство. Так рассуждение становится конкретным и коротким.

3. 3. Проверка

После вычислений проверьте, не получилось ли невозможное число, неверное равенство или нарушение правила. Именно этот последний шаг обычно и даёт противоречие.

Скелет решения

1. Начало

Сначала коротко напишите, что именно вы предполагаете противным. Это задаёт направление всему решению и показывает, какое утверждение надо опровергнуть.

2. Переходы

Далее сделайте один-два логичных шага по определению или свойству. Не растягивайте рассуждение: важна не длина, а точность переходов.

3. Конфликт

Затем прямо укажите момент, где появляется невозможность. Формулировка «это противоречит ...» помогает ясно показать место конфликта.

4. Завершение

В конце обязательно сделайте вывод о верности исходного утверждения. Без этого доказательство выглядит незавершённым, даже если противоречие уже найдено.

Итог: как работает метод

Доказательство от противного работает как цепочка: предположение, выводы, конфликт и итог. Этот метод особенно полезен, когда прямое решение слишком длинное, а правильный ответ можно получить через невозможность.