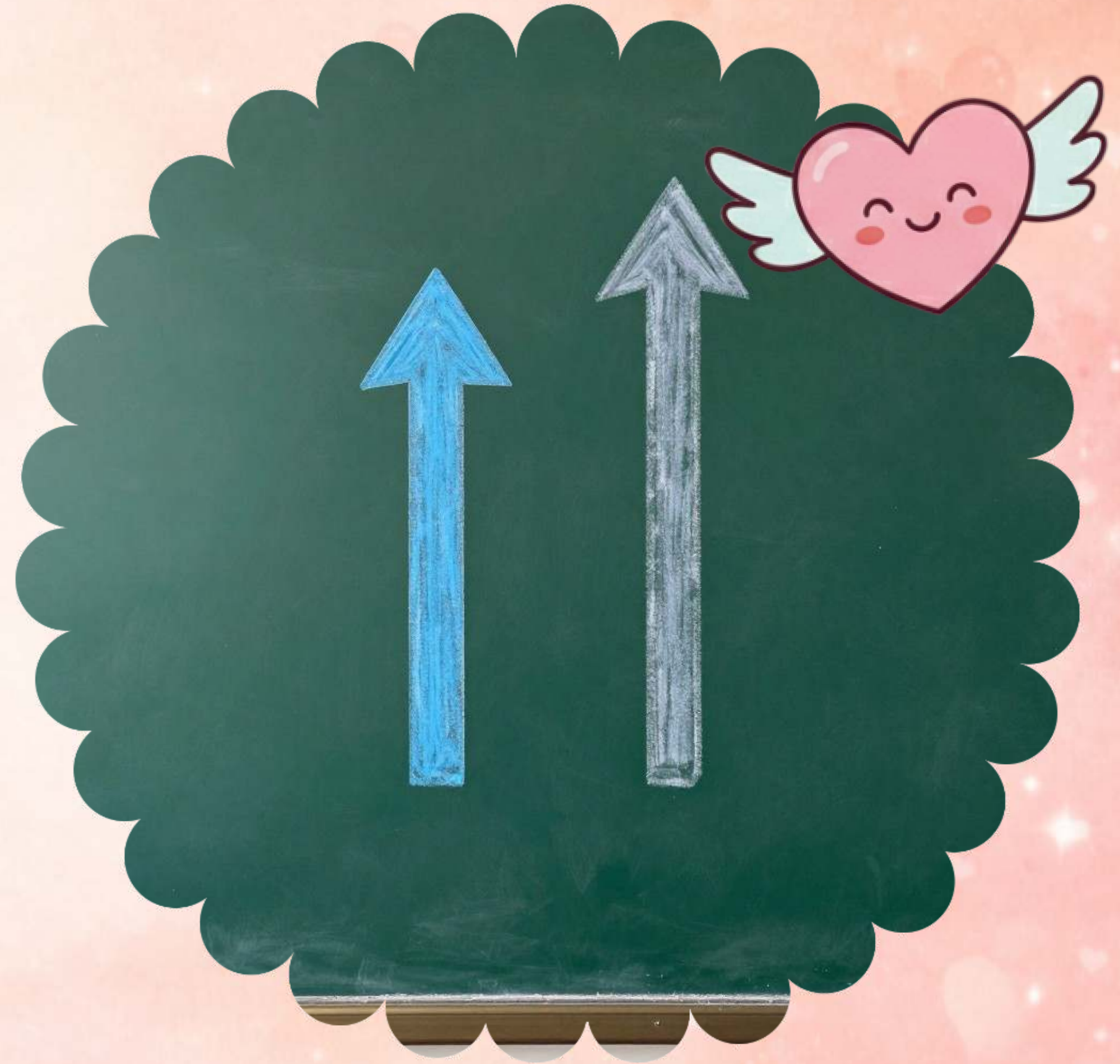


Умножение вектора на число: базовая операция векторной алгебры

Разберём, как число меняет длину,
направление и координаты вектора.





Почему эта операция так важна в геометрии

Умножение управляет масштабом вектора и при отрицательном коэффициенте разворачивает его. Это базовое действие наряду со сложением и вычитанием: оно помогает формулировать параллельность, подобие, деление отрезка и задавать прямую параметрически.



Определение произведения вектора на число

Для любого вектора a и числа k вектор ka считается произведением. Он остаётся коллинеарным a , а его длина вычисляется как $|k| \cdot |a|$, то есть растёт или убывает пропорционально модулю коэффициента.

Если $k > 0$, направление результирующего вектора совпадает с направлением исходного a . Тогда геометрически коэффициент играет роль увеличителя масштаба: вектор «тянется» в ту же сторону.

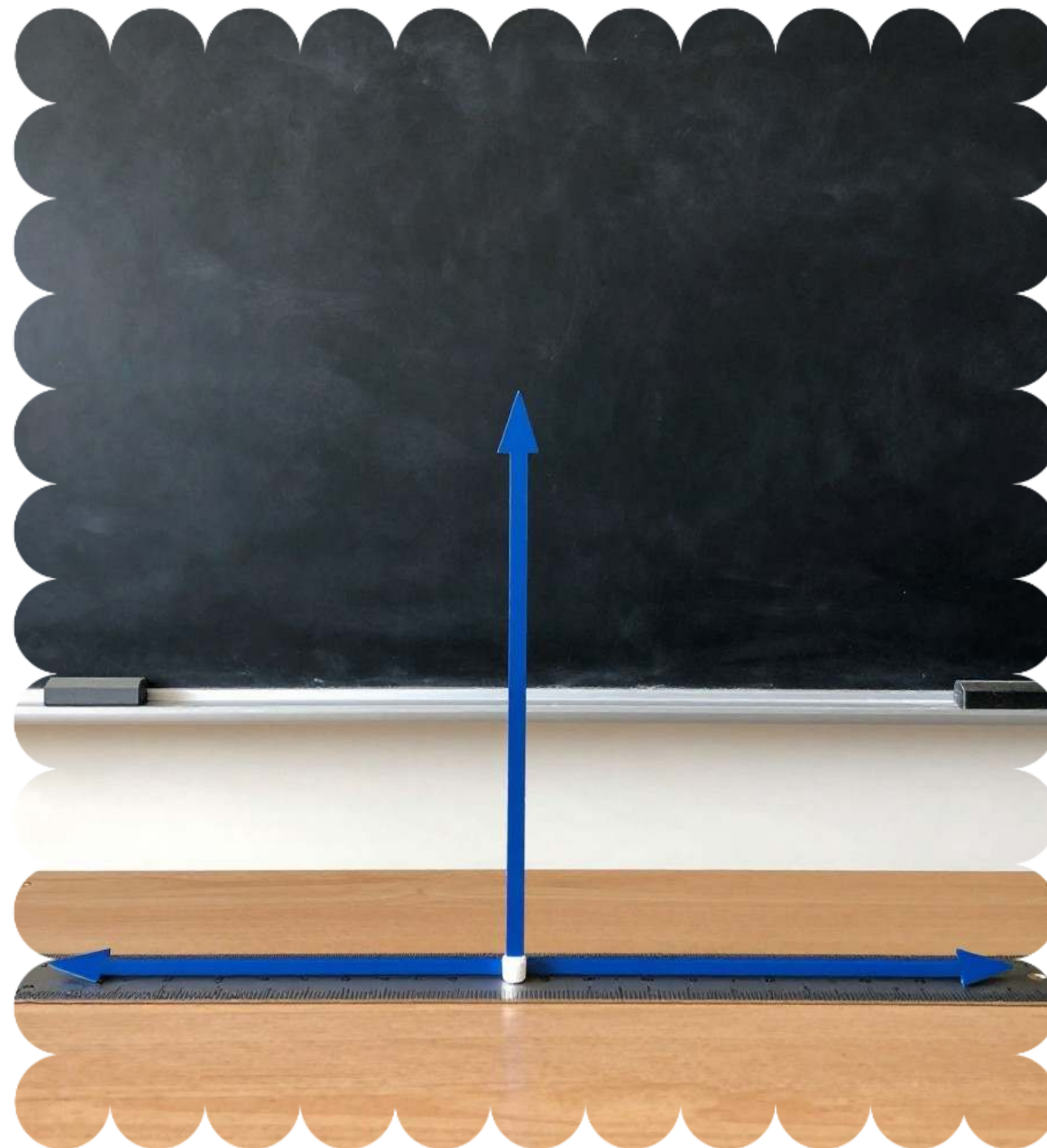
Если $k < 0$, направление вектора ka становится противоположным направлению a . При этом длина остаётся той же, что соответствует увеличению на $|k|$, только ориентация меняется на обратную.

При $k = 0$ получается нулевой вектор: его длина равна нулю. Поэтому направление теряет смысл, а произведение ka считается равным вектору, который «ничего не выражает» по длине.

Геометрический смысл на одной прямой

Кратные на одной линии: растяжение или сжатие

На одной прямой исходный вектор a и все его кратные ka лежат в одном и том же направлении или в противоположном. Поэтому операция воспринимается как растяжение при $|k| > 1$ или сжатие при $0 < |k| < 1$.



Знак меняет ориентацию, а ноль — сводит к точке

Например, $2a$ вдвое длиннее a и направлен так же, как исходный вектор. Вектор $-3a$ в три раза длиннее a , но ориентирован в противоположную сторону; при $k=0$ все кратные сходятся к нулевому вектору.



Как получить ka из вектора a и числа k

Логика вычисления: сначала определяем коэффициент, затем учитываем знак и модуль.

Координатная запись операции

01

Если $a = (x; y)$, то при умножении на число k получаем $ka = (kx; ky)$. Умножается каждая координата на одно и то же число, поэтому связь между координатами результата и коэффициентом остаётся линейной.

02

Например, для $a = (-2; 5)$ и $k = 3$ имеем $ka = (-6; 15)$. Это прямо показывает, что масштабирование одинаково применяется к обеим координатам одновременно.

03

Для того же вектора при $k = -1,5$ получаем $(3; -7,5)$. Важно: знак коэффициента влияет на ориентацию, а пространственный случай действует аналогично: если $a = (x; y; z)$, то $ka = (kx; ky; kz)$.



Примеры вычислений в координатах

а	к	ка	Вывод
(1; 2)	2	(2; 4)	$k > 0$: направление сохраняется
(1; 2)	-2	(-2; -4)	$k < 0$: направление меняется
(3; -1)	0,5	(1,5; -0,5)	$ k < 1$: длина уменьшается
(3; -1)	0	(0; 0)	$k = 0$: нулевой вектор
—	—	—	Знак k задаёт направление, $ k $ — длину

В таблице показано, как исходные координаты меняются после умножения на k ; отдельно подчёркнут смысл знака и модуля коэффициента.

Во всех примерах координаты результата получаются одинаковым умножением на k , а направление и длина согласуются с формулами через знак и модуль коэффициента.

Собственные вычисления по формуле $ka = (kx; ky)$.

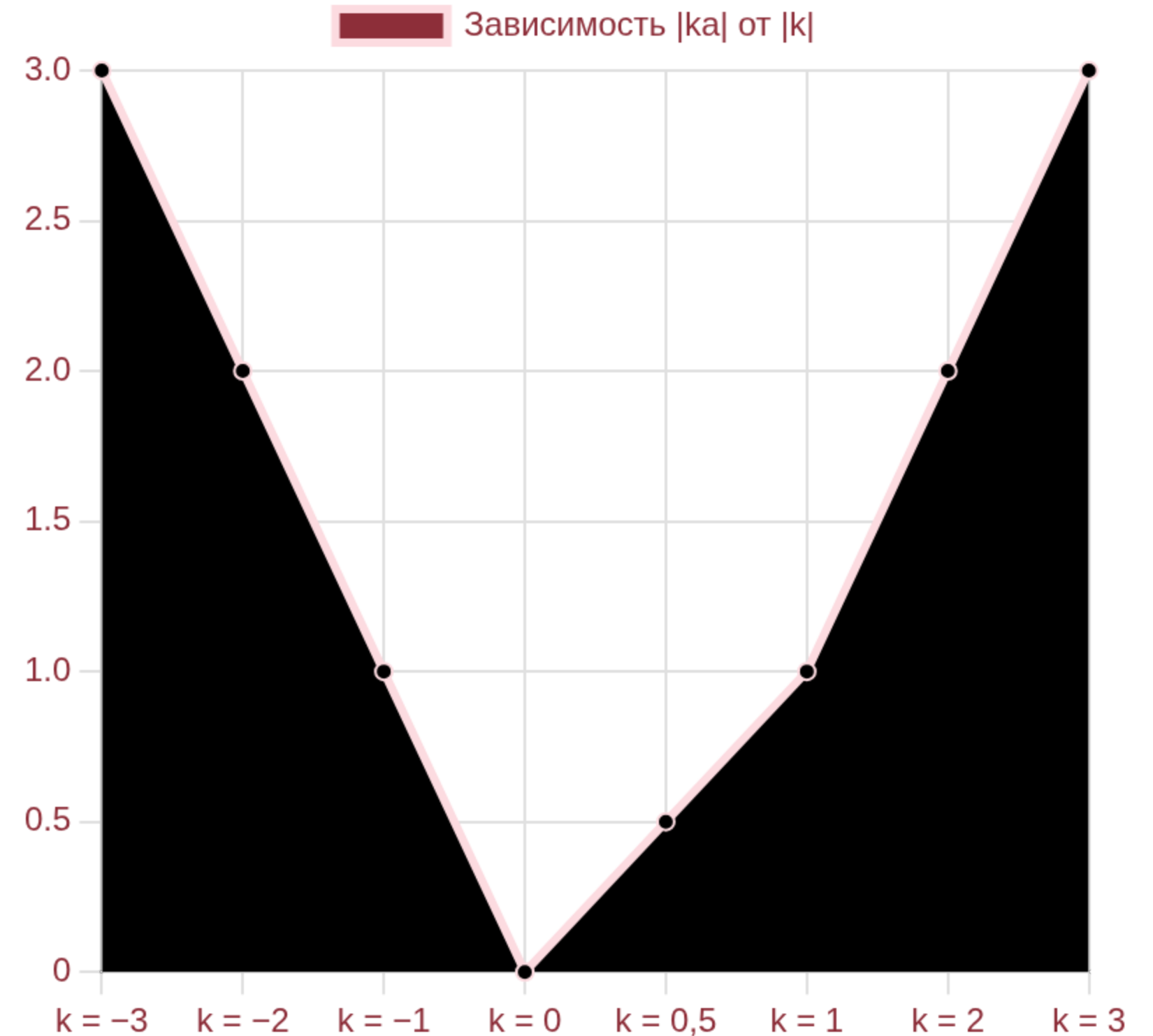
Как длина результата зависит от коэффициента



Для фиксированного a график показывает: меняется именно модуль коэффициента, а знак влияет только на направление.

Линейность $|ka|$ относительно $|k|$ подтверждает формулу $|ka| = |k| \cdot |a|$: одинаковые по модулю коэффициенты дают одинаковые длины.

Построение по значениям $k = -3, -2, -1, 0, 0,5, 1, 2, 3$ для одного и того же исходного вектора.



Основные свойства операции



Коллинеарность

Вектор ka всегда лежит на одной прямой с исходным a : результат не «уходит» в другую ориентацию, меняется только масштаб и, при отрицательном k , направление.



Зависимость длины от модуля

Длина результата определяется формулой $|ka| = |k| \cdot |a|$. Поэтому при равных $|k|$ (например, 2 и -2) получаются одинаковые по длине векторы.



Распределительные свойства

Операция согласуется со сложением: $k(a+b) = ka + kb$ и $(k+m)a = ka + ma$. Благодаря этому векторы можно разбивать на части и суммировать результаты.



Проверка знаком

Если $k > 0$, направление сохраняется; при $k < 0$ оно меняется на противоположное. Это правило помогает быстро контролировать смысл результата, а не только вычисления.



Ассоциативность с числом

Справедливо равенство $a(km) = k(ma)$: умножение на два числа можно выполнять в любом порядке. Это упрощает преобразования выражений перед подстановкой в координаты.

Умножение вектора на число: как оно «масштабирует» направление



Когда «прибавляешь масштаба»

Представьте, что вектор a — это стрелка с заданной ориентацией. Если умножить его на $k > 1$, стрелка становится длиннее в одинаковое число раз и сохраняет направление. Так обычно выглядит равномерное увеличение масштаба вдоль одной прямой.



Отражение при отрицательном коэффициенте

Если коэффициент отрицательный, вектор меняет ориентацию: он отражается относительно начала координат, оставаясь по длине таким, каким его делает $|k|$. На рисунке это выглядит как поворот стрелки «в другую сторону» при том же масштабе по модулю.

Алгоритм вычисления по координатам

Запись координат исходного вектора → выбор коэффициента k → умножение координат на k → проверка знака и приведение дробей/десятичных чисел

Особые случаи: нулевой, единичный и отрицательный коэффициент



Если $k=0$, то любой вектор ka обращается в нулевой: длина становится 0, а направления как такового нет — нулевой вектор не задаёт ориентацию в пространстве или на плоскости.



Если $k=1$, то умножение ничего не меняет: ka совпадает с исходным вектором a , потому что длина сохраняется, а направление остаётся тем же.



Если $k=-1$, то длина сохраняется, но направление меняется на противоположное. Этот случай удобно использовать для быстрой проверки знака и коллинеарности результата.

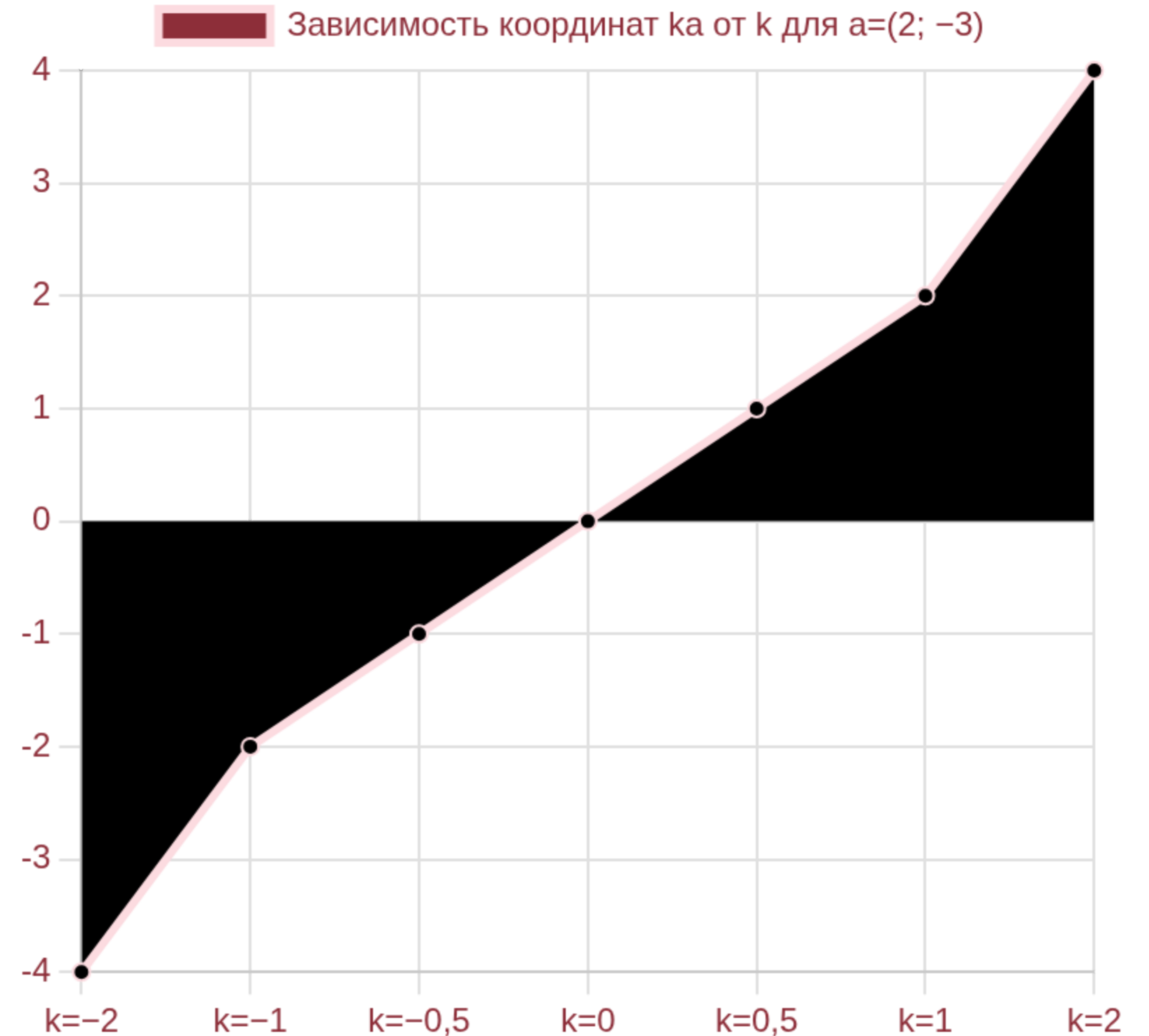
Зависимость координат результата от коэффициента



Поскольку $ka = (2k; -3k)$, координата x зависит только от k , а координата y — пропорционально тому же k с противоположным знаком.

Графики получаются прямыми через начало координат: линейность проявляется в том, что при изменении k в одинаковой пропорции меняется каждая координата.

Школьный курс: вычисление $ka = (kx; ky)$ для $a = (2; -3)$, значения k : $-2, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 2$.



Типичные ошибки при умножении вектора на число

01 Самая частая ошибка — умножить только одну координату, например получить $(kx; y)$ вместо $(kx; ky)$. В результате нарушается правило пропорциональности и вектор перестаёт быть кратным исходному.

02 Нередко игнорируют знак коэффициента. Тогда при отрицательном k направление считают сохранённым, хотя на самом деле оно должно стать противоположным исходному вектору, а длина — сохраниться по модулю.

03 Ещё одна ловушка — при $k=0$ получить вектор с не нулевыми координатами или «забыть» нули. Это особенно проявляется при работе с дробями и отрицательными числами, где теряются знаки.

Сравнение исходного и полученного вектора

Вектор a	k	$ ka $	Направление	ka (координаты)
(1;2)	2	$2\sqrt{5}$	как у a	(2;4)
(1;2)	-2	$2\sqrt{5}$	противоположное	(-2;-4)
(3;-1)	0,5	$0,5\sqrt{10}$	как у a	(1,5;-0,5)
(3;-1)	0	0	нет направления	(0;0)
(3;-1)	-1	$\sqrt{10}$	противоположное	(-3;1)

Собственные вычисления по формуле $ka=(kx; ky)$ и свойству $|ka|=|k|\cdot|a|$.

Модуль результата определяется $|k|$, а направление – знаком коэффициента. Таблица помогает быстро увидеть, как меняются длина, ориентация и координаты.

Для всех примеров видно: при одинаковых $|k|$ длины равны, а изменение знака k отвечает за противоположность направления.

Применение в физике и задачах на движение



Силы и коэффициенты

Если в условии сила меняется в заданное число раз, её можно записать как умножение вектора: $F' = kF$. Знак k отражает, насколько изменилось направление действия силы.



Скорость и масштаб времени

В задачах на движение скорость часто связывают с параметрами процесса. Если требуется масштабировать скорость, используют k : $v' = kv$. Так удобно описывать ускорение, не перегружая формулами.



Ускорение и смена ориентации

Отрицательный коэффициент естественно отражает разворот направления ускорения относительно исходного вектора. Это позволяет сразу согласовать геометрию с физическим смыслом направления изменения скорости.



Перемещение как векторная величина

Перемещение описывают как вектор. Когда оно меняется по модулю при сохранении прямой ориентации, умножение на число даёт кратность: $s' = ks$. Это помогает решать задачи с пропорциями.

Применение в геометрических построениях



Умножение вектора на число используют, когда нужно получить параллельный вектор нужной длины: построенная «копия» лежит на той же прямой. Так удобно выполнять удвоение, утроение или сжатие вдоль заданного направления.



В координатных задачах это позволяет вычислять точки, лежащие на одной прямой с заданным направляющим вектором: если точка A смещается на ka , то её координаты находятся простым умножением каждой координаты на k .

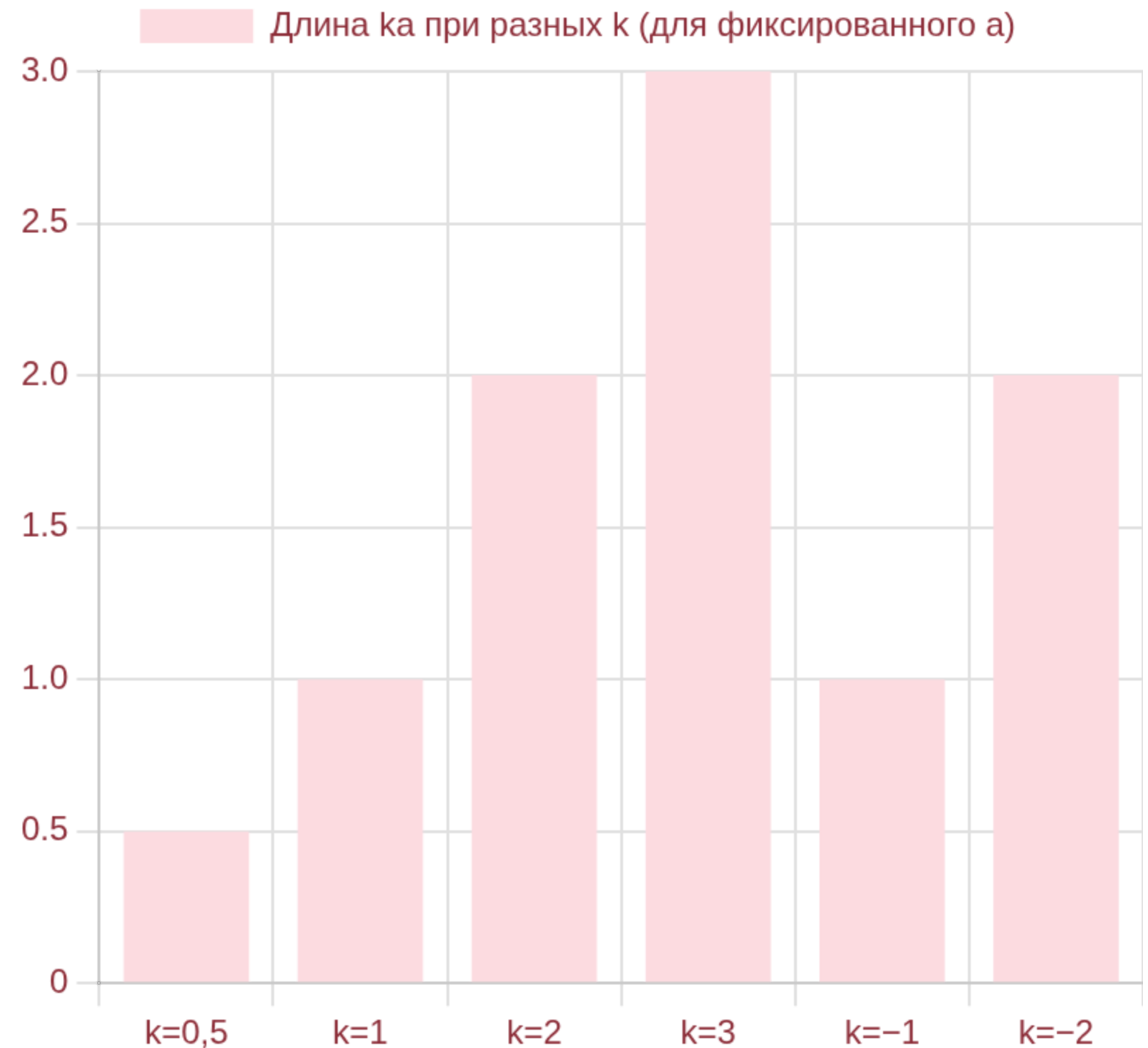
Сравнение длин при разных значениях коэффициента



Если длину исходного вектора считать равной $|a|$, то длина результата равна $|ka| = |k| \cdot |a|$. Поэтому на графике показаны значения относительно $|a|$.

Бар-чарты подтверждают, что знак коэффициента влияет только на направление, а длина определяется модулем $|k|$: точки $k=2$ и $k=-2$ совпадают.

Построение по формуле $|ka| = |k| \cdot |a|$ при $k=0,5; 1; 2; 3; -1; -2$ (относительные значения к $|a|$).



Связь с аналитической геометрией

Векторная форма уравнения прямой часто записывается через направляющий вектор и умножение на параметр: именно поэтому операция ka становится естественным «механизмом» описания точек прямой.

Параметрические записи возникают прямо из идеи кратности: если точка перемещается на k раз направляющий вектор, то её координаты выражаются через произведения k с координатами этого вектора.

При разложении вектора по базису умножение на число работает как масштабирование базисных направлений: координаты при этом меняются пропорционально выбранным коэффициентам.

Практическая польза в задачах о коллинеарности, параллельности и расстояниях: сравнивая коэффициенты и учёт знака, можно быстро понять, лежат ли векторы на одной прямой и как соотносятся их длины.



Умножение вектора на число – инструмент масштаба и ориентации

Умножение вектора на число меняет его длину по закону $|ka| = |k| \cdot |a|$ и, при отрицательном k , разворачивает направление на противоположное. В координатах оно действует покомпонентно: $ka = (kx; ky; \dots)$. Эти идеи объединяют геометрию 11 класса, физику и аналитические методы решения.

