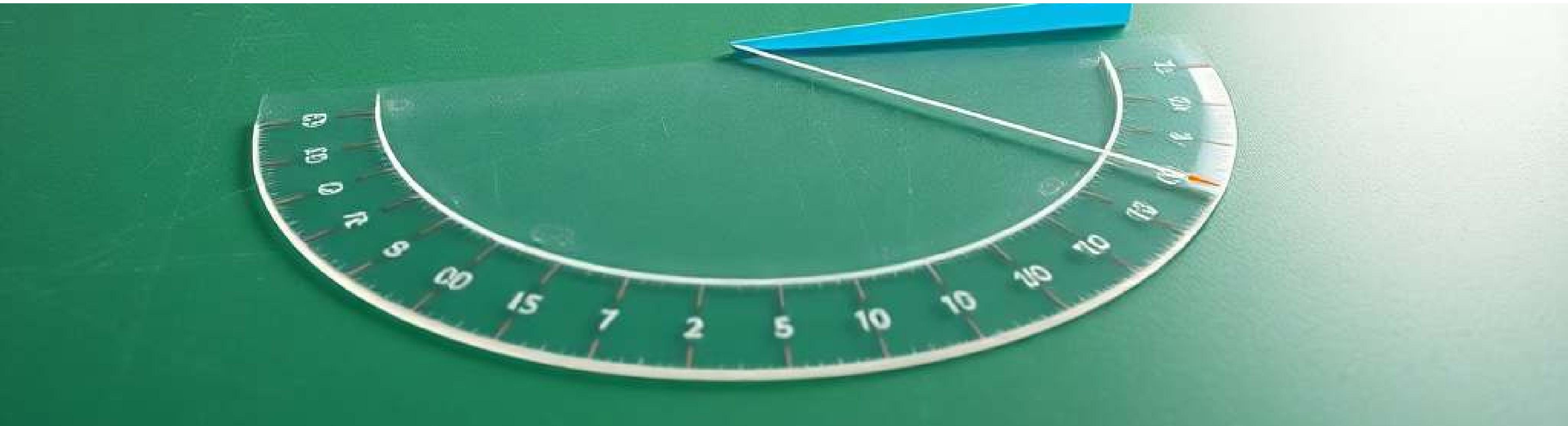


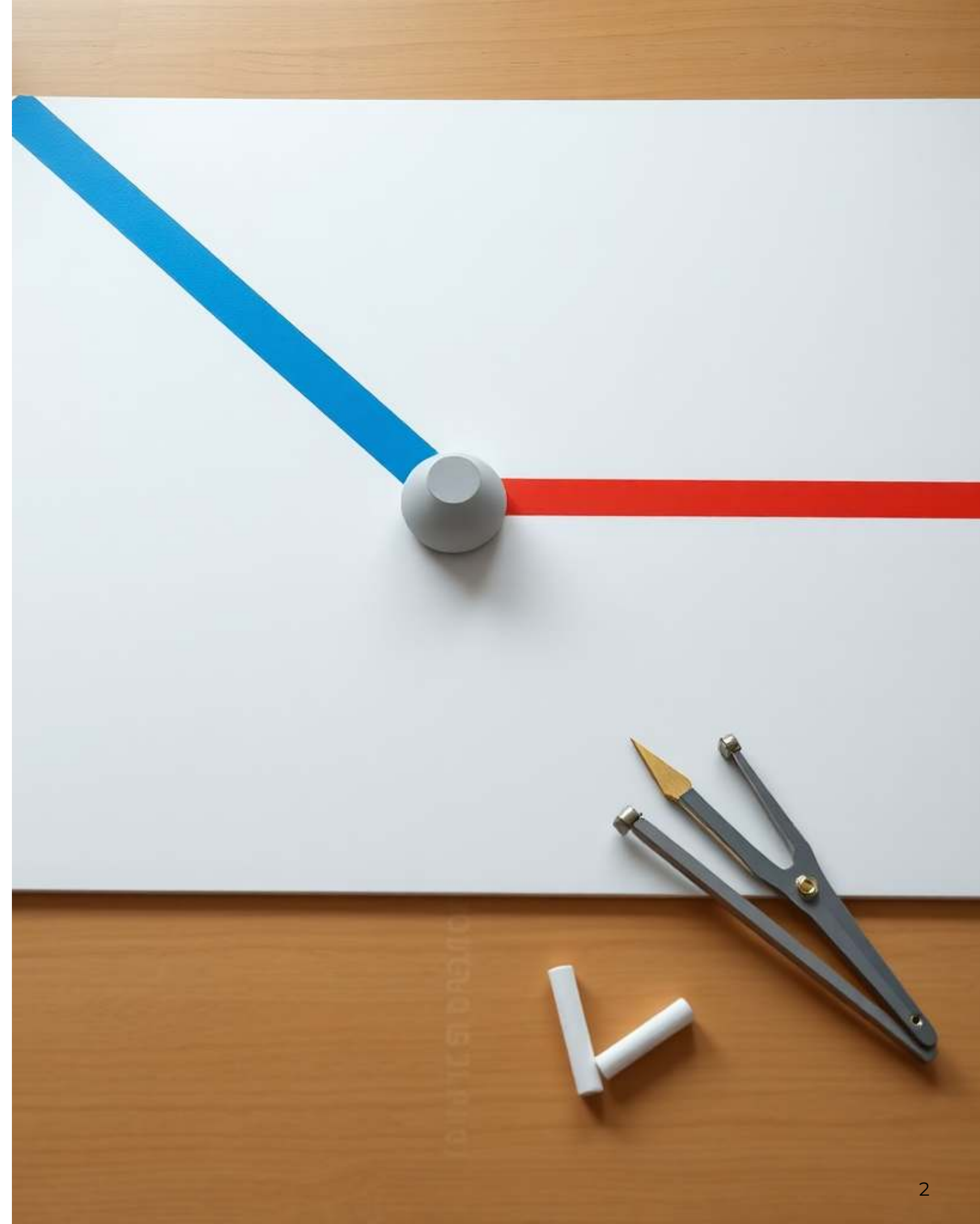
Тригонометрические функции направленного угла

Поворот на плоскости и числа: синус, косинус, тангенс, котангенс.



Как углы начинают «работать» на плоскости

В 8 классе направленный угол помогает считать не только величину поворота, но и его направление. Так удобно описывать вращение, отрицательные углы и положение точки на окружности.



360°

**— это полный оборот,
после которого луч
снова занимает
исходное положение.**

Один луч задаёт бесконечно много сонаправленных углов: 30° , 390° и -330° указывают на одно направление конечной стороны.

Свойства направленных углов в школьной геометрии

Единичная окружность как модель угла

Главная идея

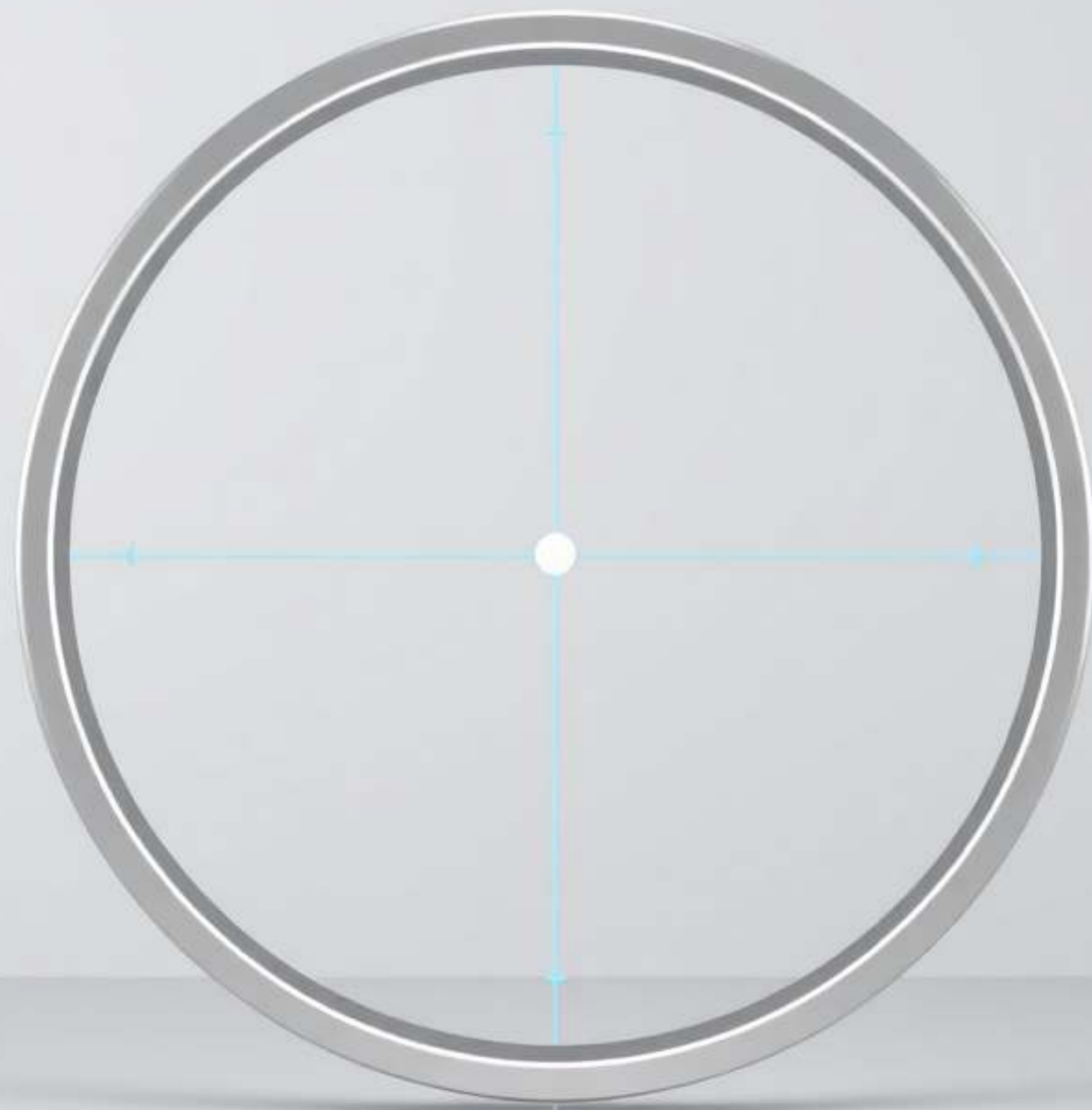
Единичная окружность помогает перевести поворот в координаты точки. Её центр находится в начале координат, а радиус равен единице, поэтому вычисления становятся наглядными и удобными.

Координаты точки

Точка на окружности, соответствующая углу α , имеет координаты $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Значит, по положению точки можно сразу определить две основные тригонометрические функции.

Почему это важно

Такая модель связывает угол, движение луча и координатную плоскость. Именно она позволяет изучать знаки функций, четверти и дальнейшие свойства тригонометрических выражений.



Как связаны функции и координаты точки

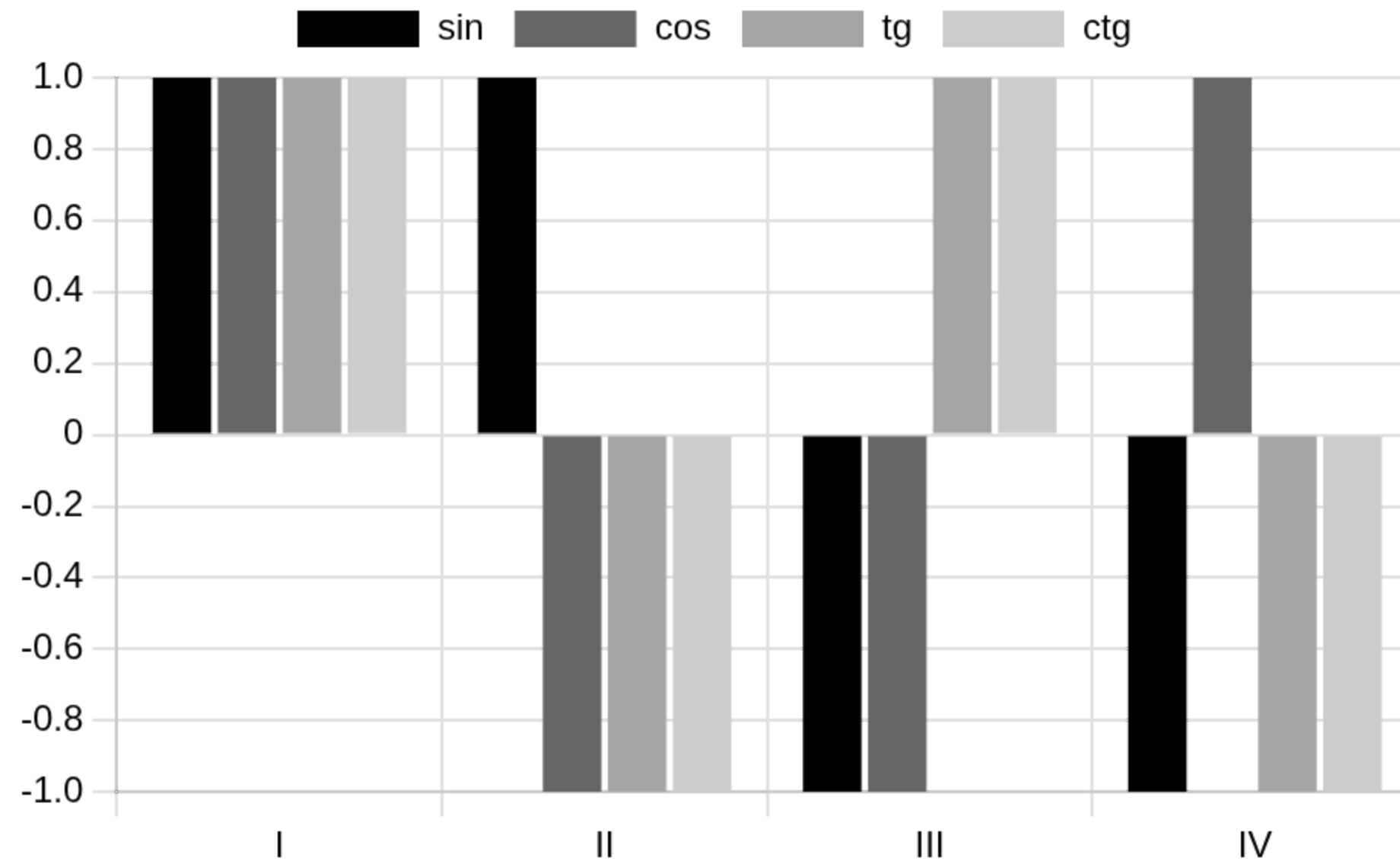
Все четыре функции выражаются через одну и ту же точку на единичной окружности.

Синус и косинус читаются напрямую из координат, а тангенс и котангенс — как их отношения; при нуле в знаменателе функция не существует.

Функция	Связь	Условие
$\sin \alpha$	y	—
$\cos \alpha$	x	—
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin/\cos$	$\cos \neq 0$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos/\sin$	$\sin \neq 0$

Определения тригонометрических функций на единичной окружности

Знаки тригонометрических функций по четвертям



Знаки функций в четвертях координатной плоскости

Здесь 1 обозначает положительный знак, а -1 — отрицательный. Такая схема быстро показывает, какой результат должен получиться в ответе.

Знак функции определяется четвертью угла, поэтому схема помогает проверять решения без лишних вычислений.

Симметрия и значения при противоположных углах

Синус меняет знак

При переходе от угла α к $-\alpha$ точка на окружности отражается относительно оси Ох. Поэтому синус меняет знак, потому что меняется вертикальная координата точки.

Косинус сохраняется

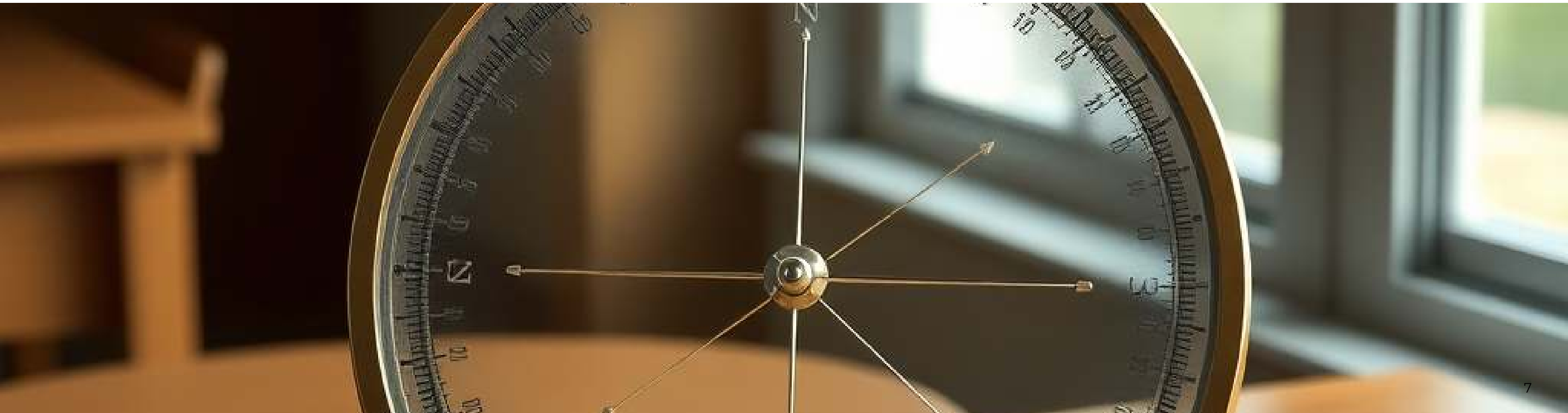
Косинус зависит от горизонтальной координаты, а при отражении относительно оси Ох она не меняется. Поэтому $\cos(-\alpha)$ остаётся таким же, как $\cos \alpha$.

Тангенс и котангенс

Тангенс и котангенс тоже меняют знак, потому что они выражаются через отношение координат. Это позволяет быстро находить значения для отрицательных углов.

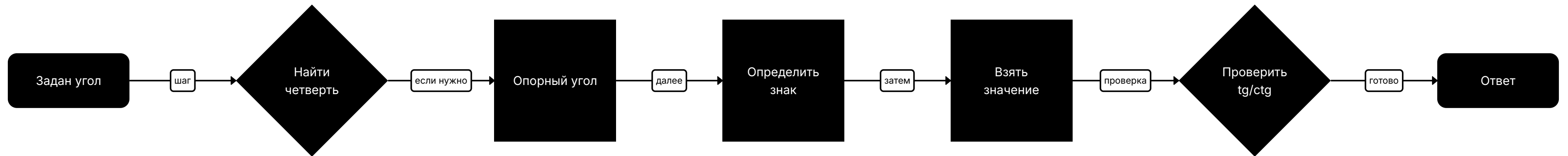
Практический плюс

Эти формулы экономят время: не нужно заново строить угол на окружности. Достаточно вспомнить, как меняются координаты точки при симметрии.



Алгоритм нахождения значений тригонометрических функций

Последовательность действий для типовых школьных задач с углами и единичной окружностью.



Опорные углы и точные значения



0°

Это начало отсчёта на единичной окружности. Здесь $\sin$ равен 0, $\cos$ равен 1, а tg равен 0, поэтому угол удобно использовать как отправную точку.



30°

Для этого угла особенно важно запомнить точные значения: $\sin$ равен $\frac{1}{2}$, $\cos$ равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а tg равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Они часто встречаются в задачах без калькулятора.



45°

Угол 45° связан с симметрией квадрата и даёт одинаковые значения синуса и косинуса: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тангенс в этом случае равен 1.



60°

Этот угол дополняет набор базовых значений. Здесь $\sin$ равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos$ равен $\frac{1}{2}$, а tg равен $\sqrt{3}$. По ним удобно проверять вычисления.



90°

На вершине четверти $\cos$ равен 0, $\sin$ равен 1, поэтому tg не определён. Этот случай показывает, что у функций есть область определения.

Таблица точных значений для основных углов

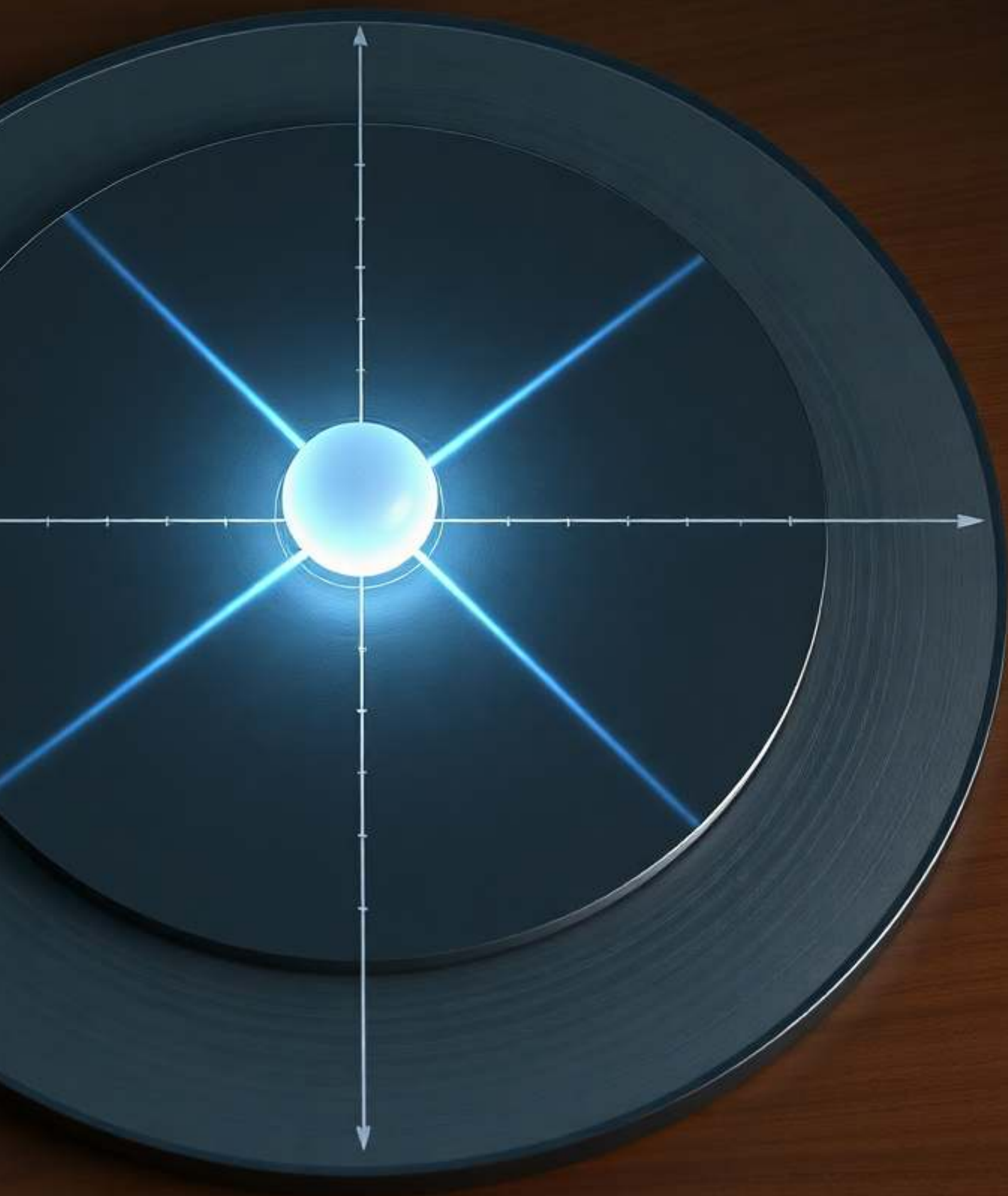
Угол	sin	cos	tg
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	не опр.

Точные значения по единичной окружности

Точные значения удобно запоминать по единичной окружности и использовать в вычислениях без калькулятора.

Основные углы образуют базовую таблицу: по ней быстро находят значения и замечают, где тангенс не существует.

Координатная плоскость и смысл $\sin$ и $\cos$



Поворот луча

Если луч повернуть на угол α , его конечное положение задаёт точку на единичной окружности. По её координатам сразу видно, как изменяются синус и косинус.

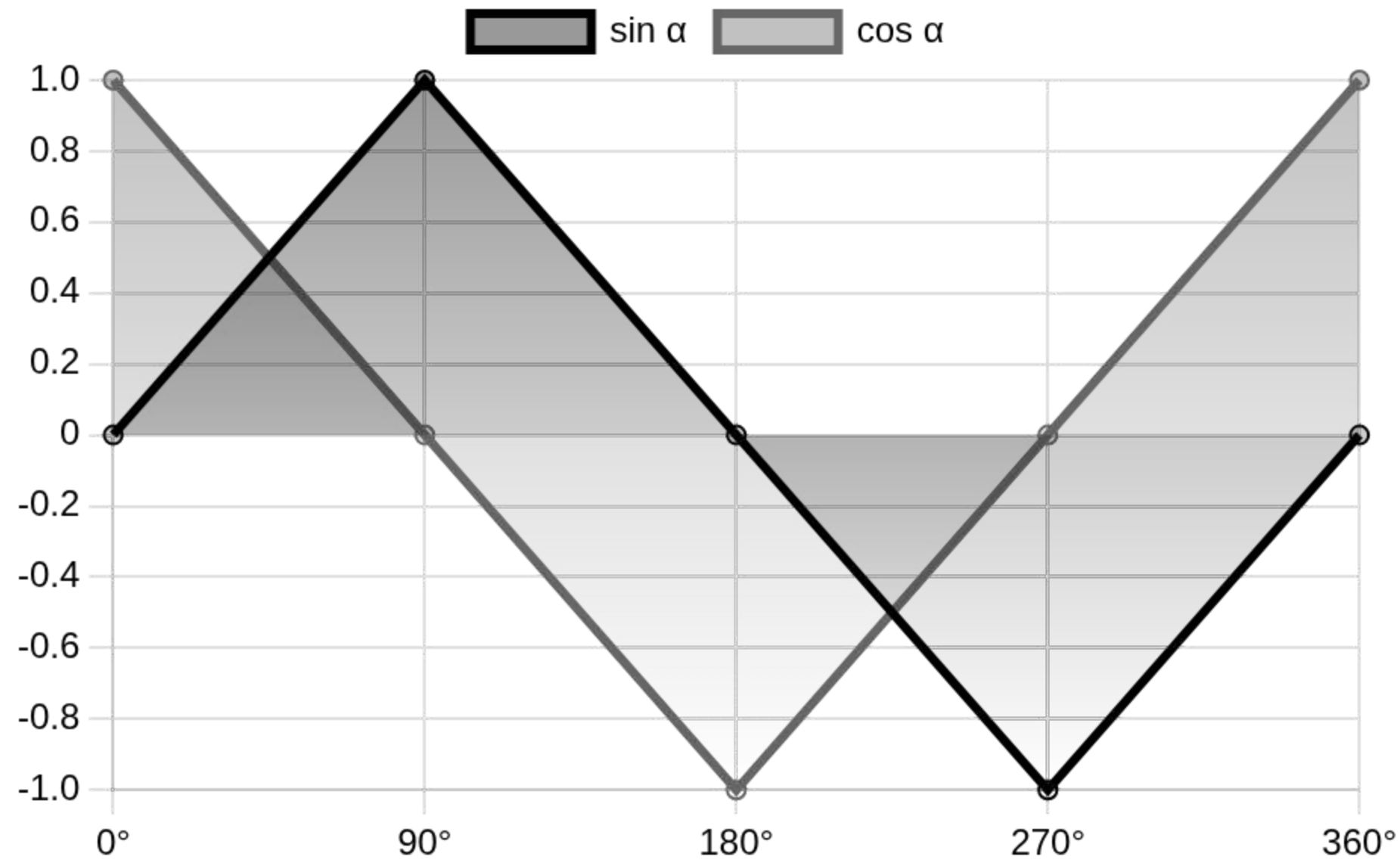
Координаты точки

Абсцисса этой точки равна $\cos \alpha$, а ордината — $\sin \alpha$. Поэтому значения функций можно читать прямо с координатной плоскости, не строя отдельные вычисления.

Проекции и ориентир

Проекции точки на оси помогают понять, откуда берутся знаки функций. На рисунке удобно видеть радиус-вектор, дугу поворота и положение точки в нужной четверти.

Периодичность тригонометрических функций



Учебный материал по алгебре 8 класса; иллюстративные значения для единичной окружности

На одном и том же наборе углов видно, как значения повторяются после полного оборота. Это делает графики предсказуемыми и удобными для сравнения.

$\sin$ и $\cos$ повторяются через полный оборот, поэтому одинаковые значения встречаются бесконечно много раз; именно это и называют периодичностью.

Основное тождество тригонометрии

1. Связь с окружностью

Точка на единичной окружности имеет координаты, которые удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.
Если заменить x на $\cos \alpha$, а y на $\sin \alpha$, получается нужное равенство.

2. Формула для проверки

Главное тождество записывают так: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
Оно помогает быстро проверить, не допущена ли ошибка при вычислении значений тригонометрических функций.

3. Как использовать

Если известно одно значение, можно найти другое, не обращаясь к рисунку заново. Для этого подставляют известную функцию в тождество и аккуратно извлекают корень.

2

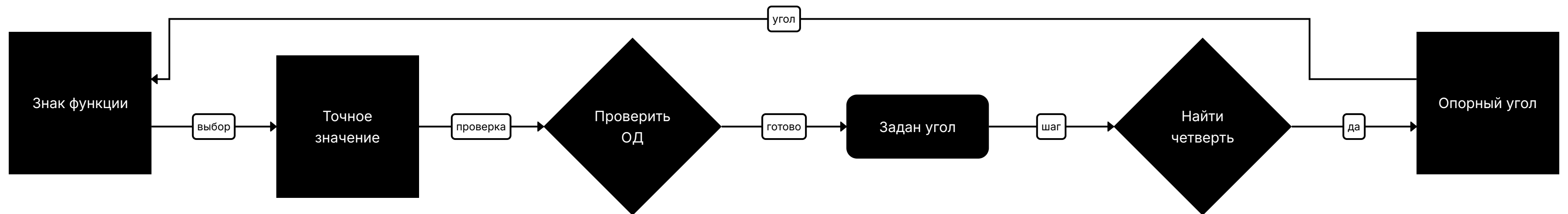
**ОСНОВНЫХ случая важно
помнить: tg теряет
смысл при $\cos \alpha = 0$,
а ctg — при $\sin \alpha = 0$.**

Эти ситуации нужно сразу проверять в задачах и уравнениях, чтобы не подставить недопустимое значение и не получить ошибку в ответе.

Школьный курс алгебры: области определения тригонометрических функций

Алгоритм нахождения значения функции

Последовательность действий при работе с направленным углом и его тригонометрическими функциями



Сравнение функций направленного угла

Таблица показывает, что каждая функция связана с одной и той же точкой на окружности, но описывает её по-своему.

Синус и косинус задают координаты точки, а тангенс и котангенс выражаются через их отношение; именно поэтому важно следить за знаменателем.

Функция	Смысл	Не определена
$\sin \alpha$	вертикаль	$\cos \alpha = 0$
$\cos \alpha$	горизонталь	—
$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin / \cos$	$\cos \alpha = 0$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos / \sin$	$\sin \alpha = 0$

Тригонометрия вокруг нас

Навигация и поворот

На картах и в навигации нужно понимать, куда направлен объект и как меняется его положение после поворота. Тригонометрические функции помогают описывать направление, угол поворота и движение по окружности, когда точка постепенно смещается вдоль заданной траектории.



Строительство и геометрия

При расчёте высоты, длины наклонной линии или угла крыши часто используют синус, косинус и тангенс. Так проще связать чертёж с реальным объектом: от лестницы у стены до наклонной опоры моста или детали конструкции.

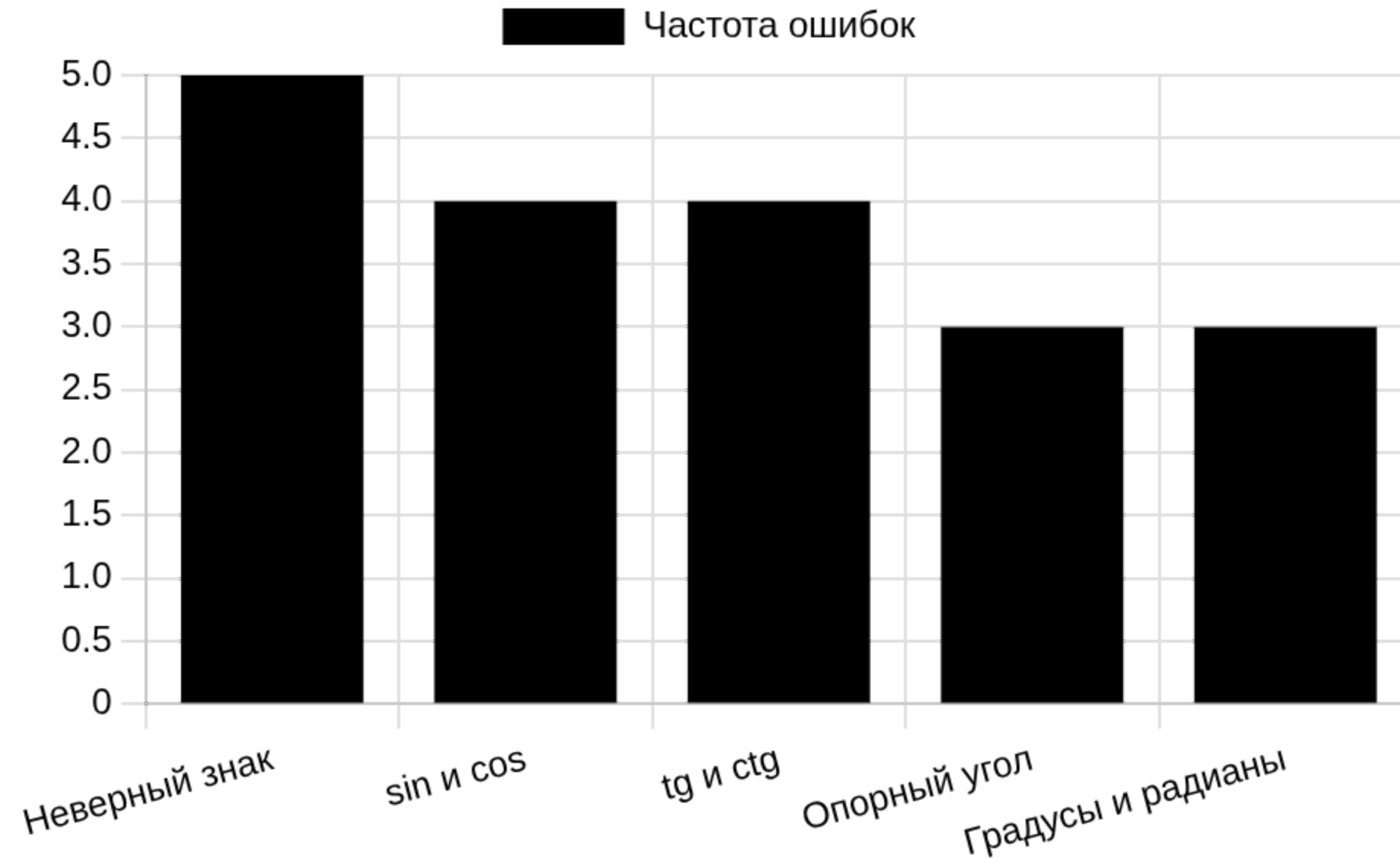


Волны и механизмы

Колебания маятника, вращение колеса и движение стрелки можно изображать как повторяющийся процесс. Поэтому тригонометрические функции удобно применять к волнам, вращающимся деталям и компьютерной графике, где важно точно задать положение точки во времени.



Типичные ошибки при работе с углами



Проверка через $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ помогает заметить несоответствие между найденными значениями и выбранным знаком функции.

Чаще всего ошибки связаны не с вычислением, а с выбором знака, четверти и области определения; значит, алгоритм решения нужно выполнять по шагам.

Обобщение типичных затруднений при изучении темы в 8 классе

Главные выводы по теме

1.

Направленный угол

Угол важен не только величиной, но и направлением поворота. Поэтому один и тот же луч можно получить разными способами, включая отрицательные и большие углы.

2.

Связь с окружностью

Синус и косинус читаются по координатам точки на единичной окружности. Это делает тему наглядной и помогает связывать алгебру с геометрией.

3.

Знаки и повторение

Знак функции зависит от четверти, а значения повторяются через определённый период. Благодаря этому можно быстро находить ответ для многих похожих углов.

4.

Проверка результата

Основное тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ служит удобной проверкой. Оно позволяет замечать ошибки и уверенно переходить к следующим темам тригонометрии.

Почему эта тема важна дальше

Тригонометрические функции направленного угла помогают описывать поворот, движение и форму графиков. Понимание единичной окружности, знаков и точных значений создаёт прочную основу для следующих тем алгебры.