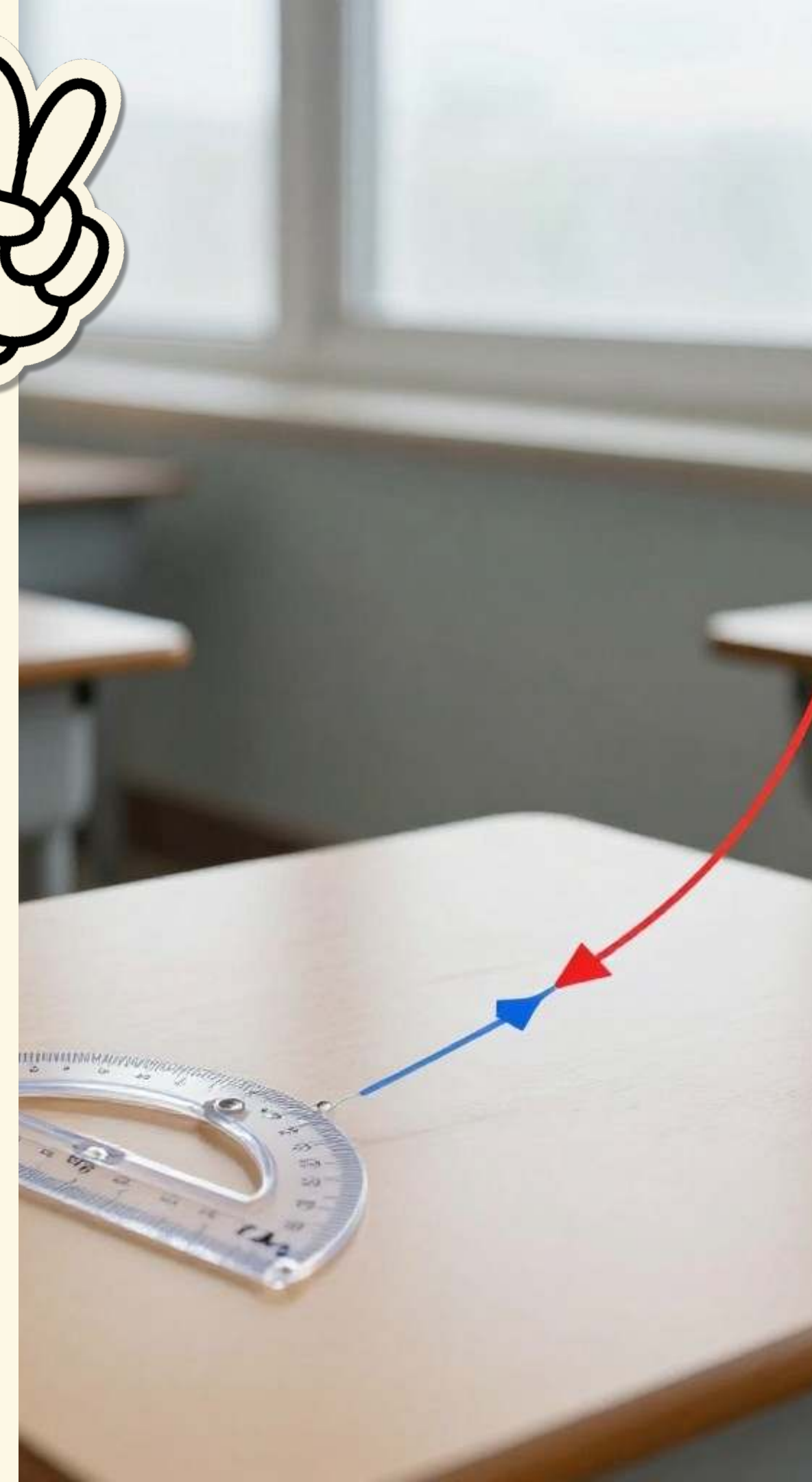


Векторы

Векторы помогают описывать движение, силу и смещение точно и наглядно.



Где встречаются векторы

Векторы встречаются в геометрии, физике, навигации и компьютерной графике. Они помогают описывать направление и величину без лишних слов.



Зачем нужны векторы

Скорость

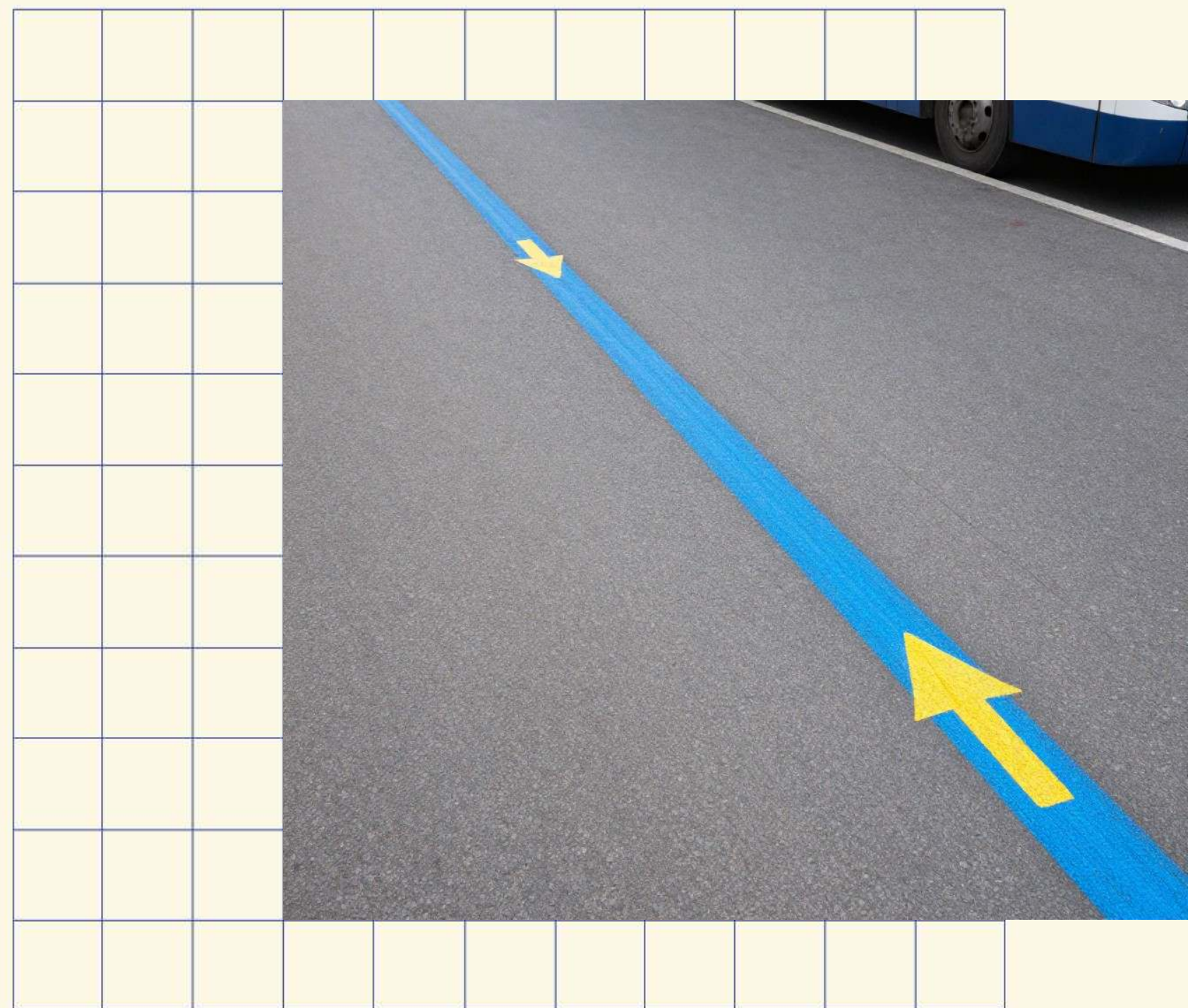
Скорость показывает, куда движется объект и насколько быстро. Поэтому она естественно описывается вектором, а не только обычным числом.

Сила

Сила толчка или тяги важна не сама по себе, а с направлением. Вектор сразу показывает, в какую сторону действует воздействие.

Смещение

При движении по карте вектор удобно задаёт смещение от старой точки к новой. Это делает маршрут понятным и легко проверяемым.



Что такое вектор

1 Направленный отрезок

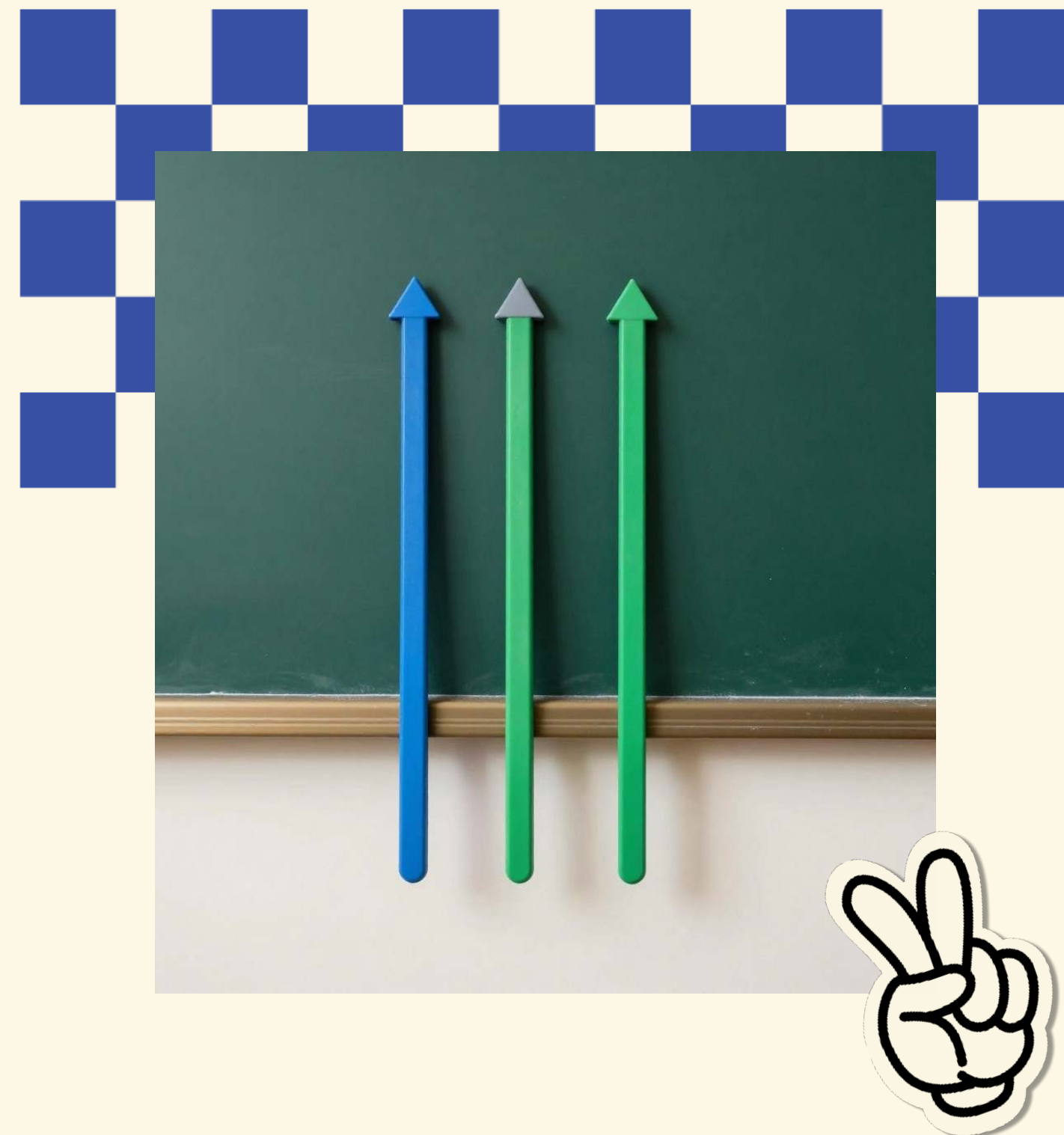
Вектор изображают направленным отрезком. У него есть начало, конец и стрелка, которая показывает, в какую сторону он направлен.

2 Обозначение и модуль

Вектор обозначают как $\vec{AB}$ или маленькой буквой a . Его длину называют модулем, а направление — его основной характеристикой.

3 Равенство и ноль

Если два вектора одинаковы по длине и направлению, они равны. Нулевой вектор не имеет направления и имеет длину 0.



Геометрический смысл

Стрелка на рисунке

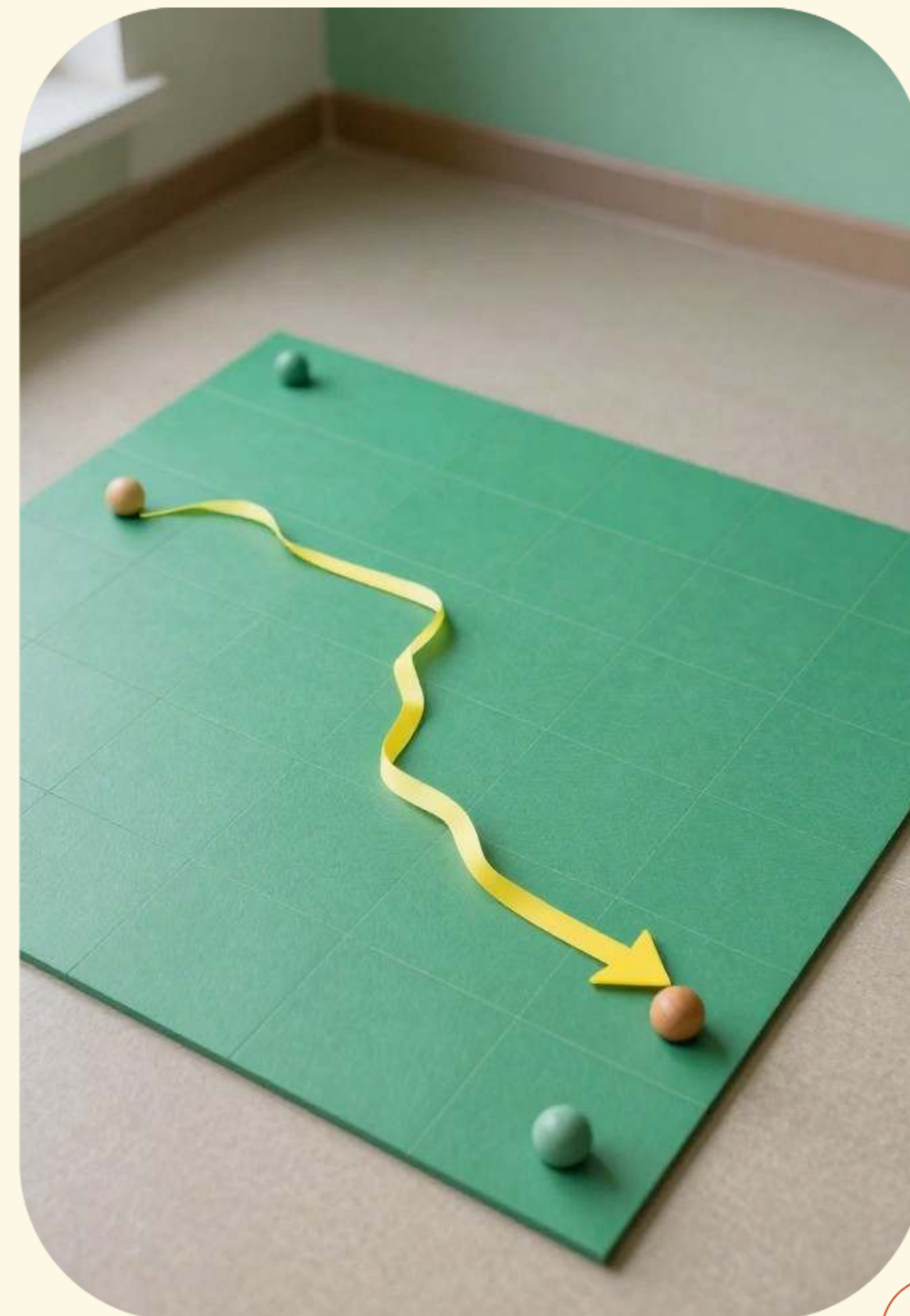
На рисунке вектор читается как стрелка: откуда началось движение, где оно закончилось и в какую сторону оно направлено.

Переход между точками

На координатной плоскости точка задаётся парой чисел, а вектор можно представить как переход от одной точки к другой.

Счёт по клеткам

По клеткам легко увидеть, сколько шагов нужно сделать вправо, влево, вверх или вниз. Так вектор становится понятным движением.



Координаты вектора

1 Идея вычитания

Пусть заданы точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда вектор AB показывает, на сколько изменились координаты при переходе от A к B .

2 Правило координат

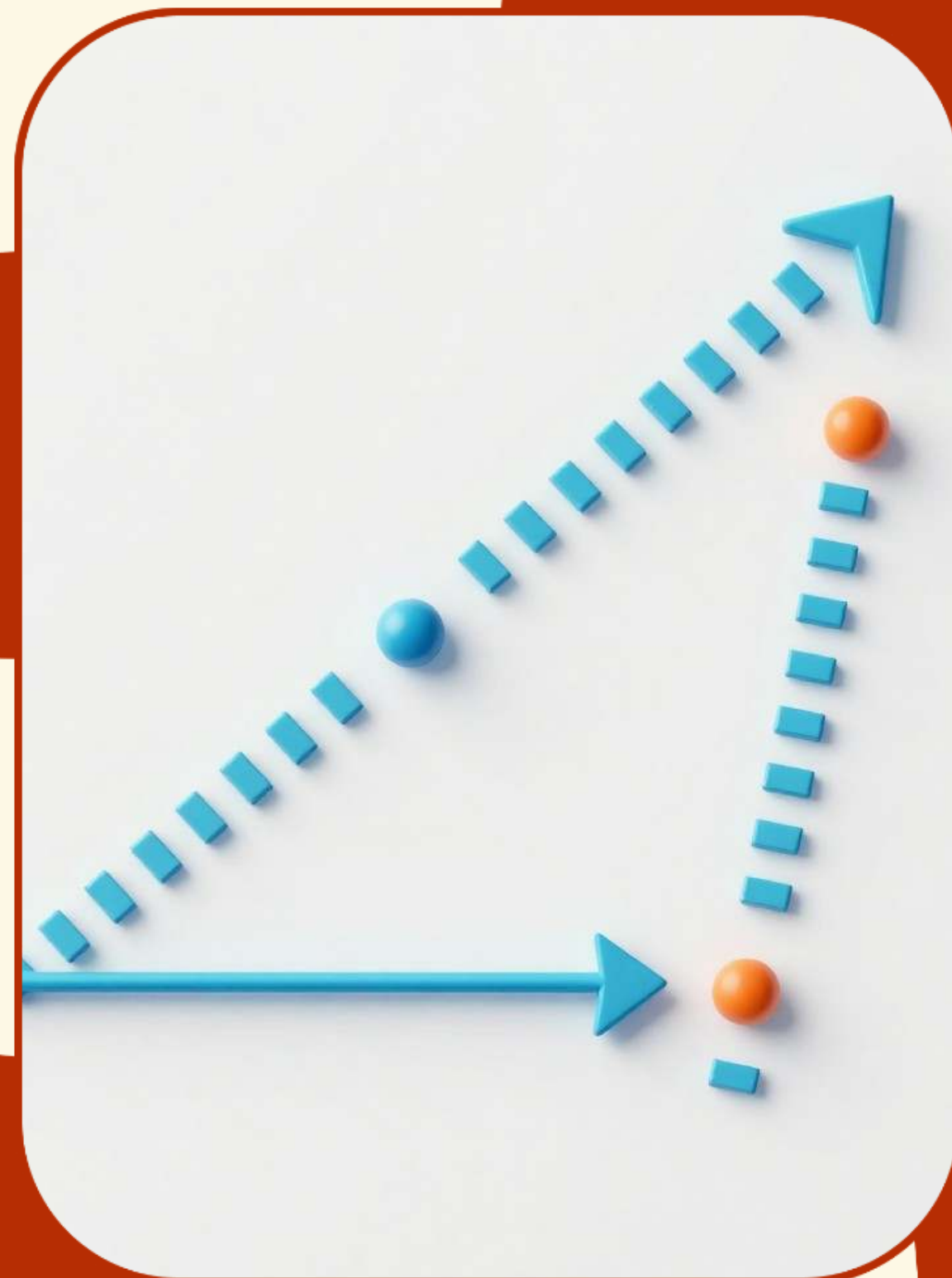
Первая координата находится как $x_2 - x_1$, вторая — как $y_2 - y_1$. Это правило работает для любых двух точек на плоскости.

3 Первый пример

Например, $A(1, 2)$ и $B(5, 7)$ дают вектор $(4, 5)$. Значит, нужно сместиться на 4 вправо и на 5 вверх.

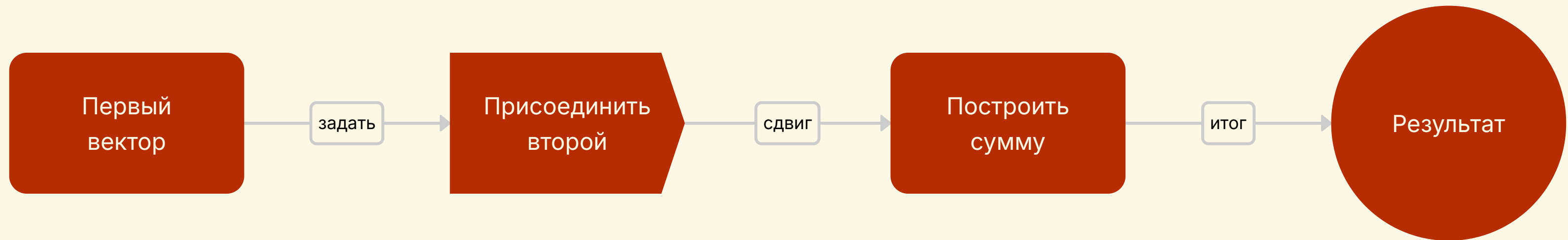
4 Второй пример

Если $A(-2, 3)$, а $B(1, 1)$, получаем $(3, -2)$. Здесь движение идёт вправо и вниз, потому что вторая координата отрицательна.



Как складывают векторы

Последовательное сложение по правилу треугольника и проверка по координатам.



Вычитание векторов

Идея разности

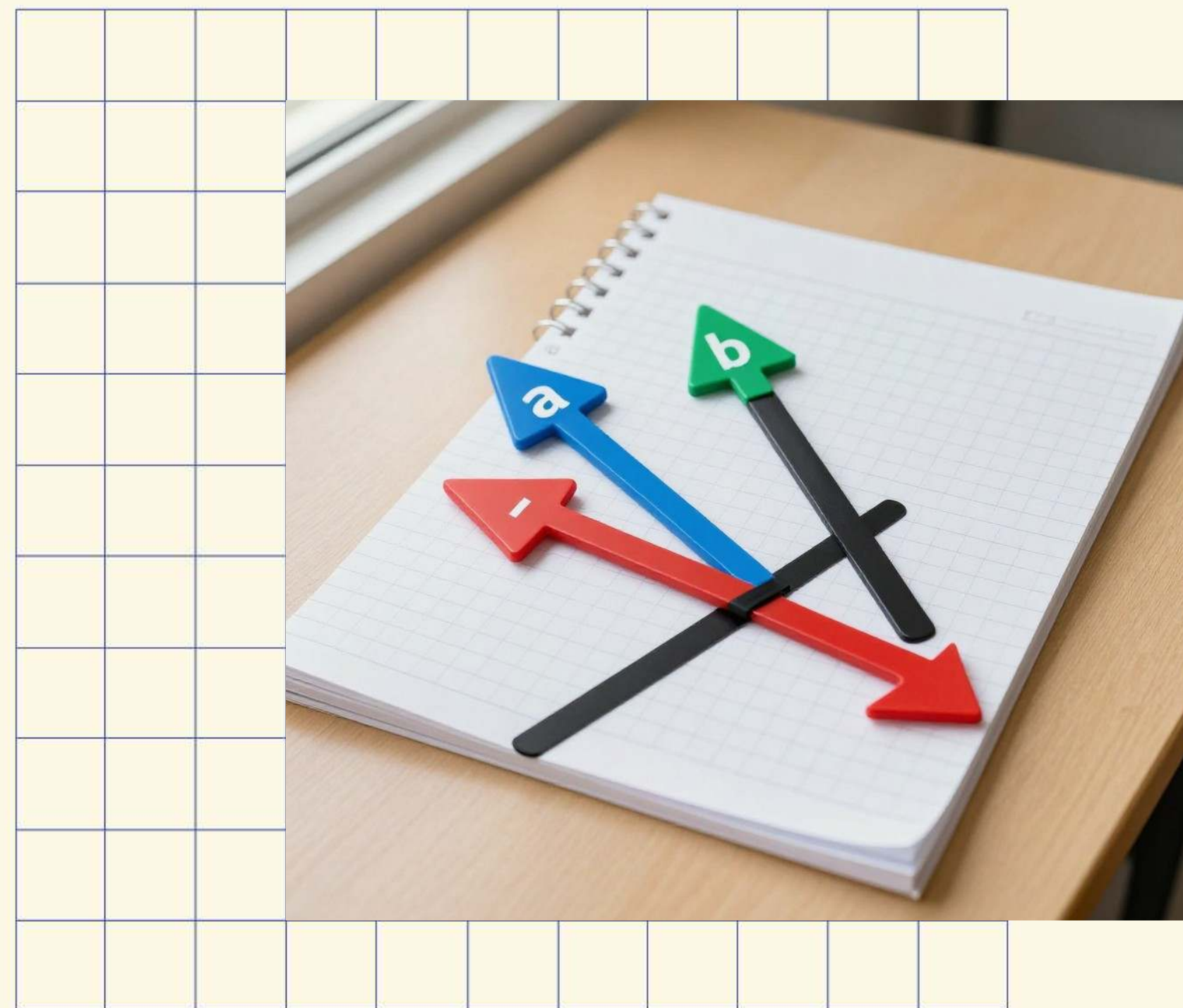
Разность $a-b$ удобно понимать как прибавление противоположного вектора. Сначала меняют направление второго вектора, а затем выполняют обычное сложение.

Противоположный вектор

Если вектор b направлен в одну сторону, то $-b$ такой же по длине, но смотрит в противоположную. Это меняет итоговое смещение.

Пример вычисления

Например, $(4,2)-(1,5)=(3,-3)$. Получается движение вправо и вниз, что легко увидеть и по координатам, и на рисунке.



Умножение вектора на число

1

Изменение длины

При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. Поэтому меняется и длина, и иногда направление.

2

Направление

Если число положительное, вектор сохраняет направление. Если число отрицательное, он поворачивается в противоположную сторону.

3

Проверка на примерах

Примеры помогают быстро проверить правило: $2 \cdot (1, 3) = (2, 6)$, а $-3 \cdot (2, -1) = (-6, 3)$.



Свойства операций

В таблице собраны основные свойства операций над векторами и их краткая интерпретация.

Основные операции над векторами подчиняются привычным правилам алгебры.

Школьные свойства операций над векторами

Свойство		Запись		Смысл										
Коммутативность		+		Порядок не важен										
Ассоциативность		+		Скобки не меняют сумму										
Распределительность		$k(a+b)=ka+kb$		Умножение распределяется										

Операции по координатам



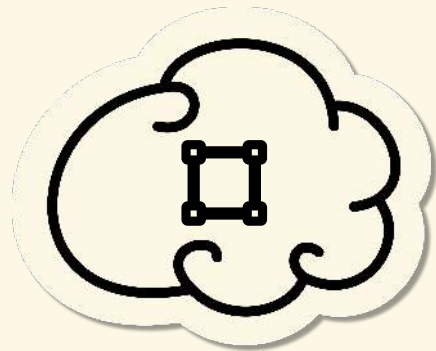
Шаг 1

Записываем координаты каждого вектора и складываем или вычитаем числа по отдельности. Так можно быстро получить ответ, не строя чертёж.

Шаг 2

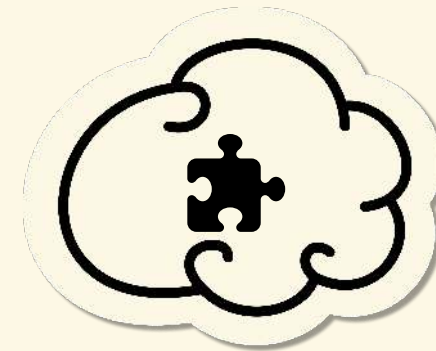
Проверяем результат на примере: $(3, -1) + (2, 4) = (5, 3)$, а $(3, -1) - (2, 4) = (1, -5)$.

Ключевые идеи



Собираем путь

Вектор можно собрать из нескольких простых перемещений, если двигаться по частям. Это удобно, когда путь состоит из горизонтального и вертикального шагов.



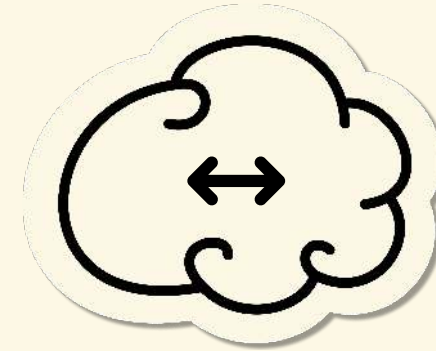
Разложение на части

Запись $(5,3) = (2,0) + (3,3)$ показывает, что один большой вектор разбивается на два более коротких. Сумма частей даёт тот же итог.



Проверка ответа

Такие представления помогают проверять вычисления по координатам и видеть, что разные маршруты могут приводить к одной и той же точке.



Удобный счёт

Если в задаче несколько перемещений, их удобно складывать по очереди. Тогда получается понятная схема движения без лишних построений.

Как измеряют длину



Вектор как гипотенуза

Иногда длину вектора удобно представить как путь по прямоугольному треугольнику. Катеты задают координаты, а сам вектор становится его гипотенузой. По этой схеме легко запомнить формулу и увидеть связь с геометрией.

Классический пример

Для вектора (3,4) длина равна 5. Это классический пример, потому что $3^2 + 4^2 = 25$, а значит, корень из суммы квадратов даёт красивый целый ответ.

Как находят расстояние

1

Найти соединяющий вектор

Сначала определяют, какой вектор соединяет точки А и В. Его координаты получают как разность координат второй точки и первой, поэтому расстояние сводится к вычислению длины этого вектора.

2

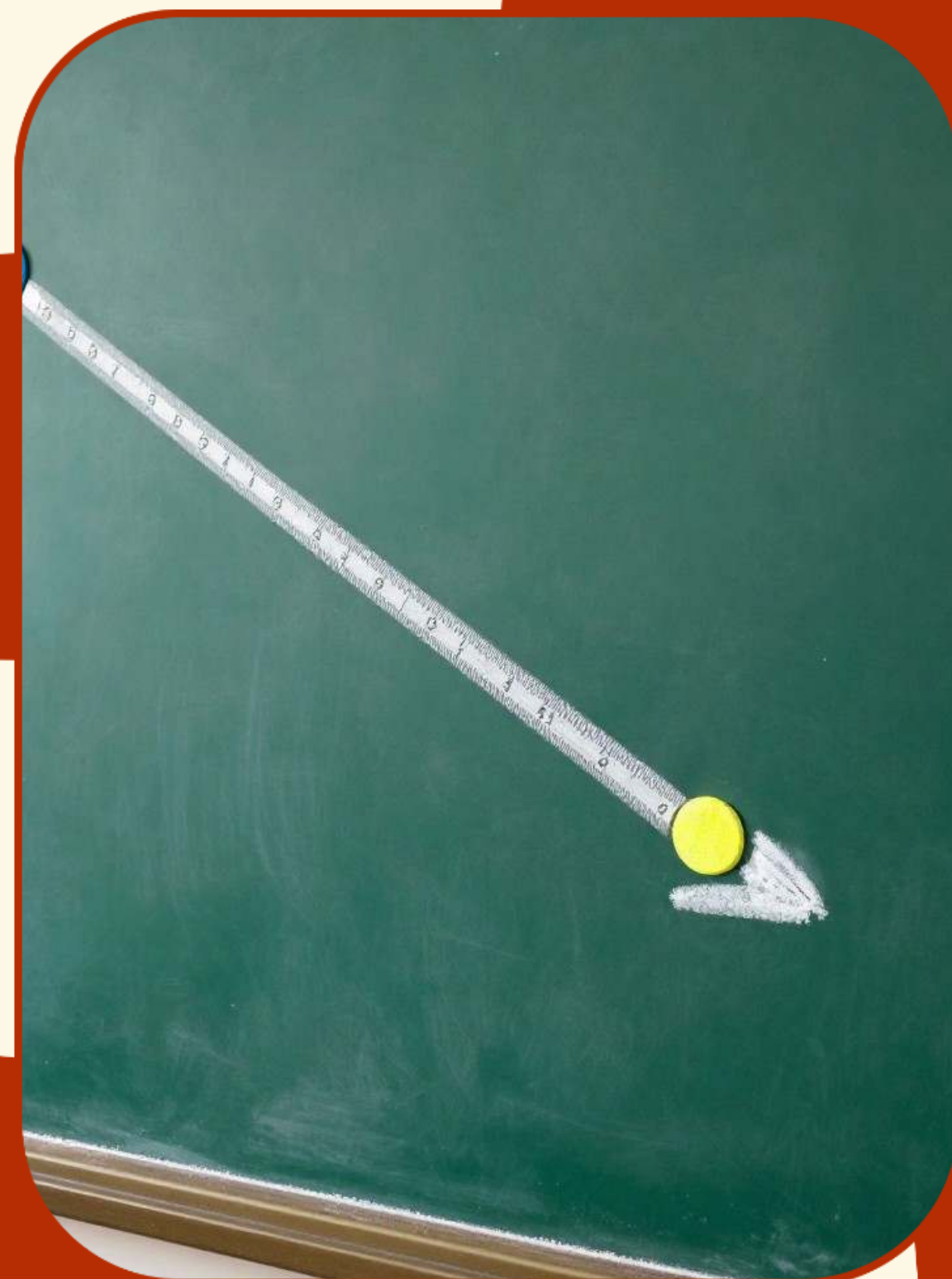
Подставить координаты

Далее используют формулу расстояния через квадратный корень. Для точек А(1,2) и В(4,6) получается $\sqrt{((4-1)^2+(6-2)^2)}=5$, то есть между точками пять единиц.

3

Связать с длиной

Такой способ работает для любых точек на плоскости. Он показывает, что расстояние между точками — это не отдельное правило, а длина соответствующего вектора.



Главные признаки

Одна линия

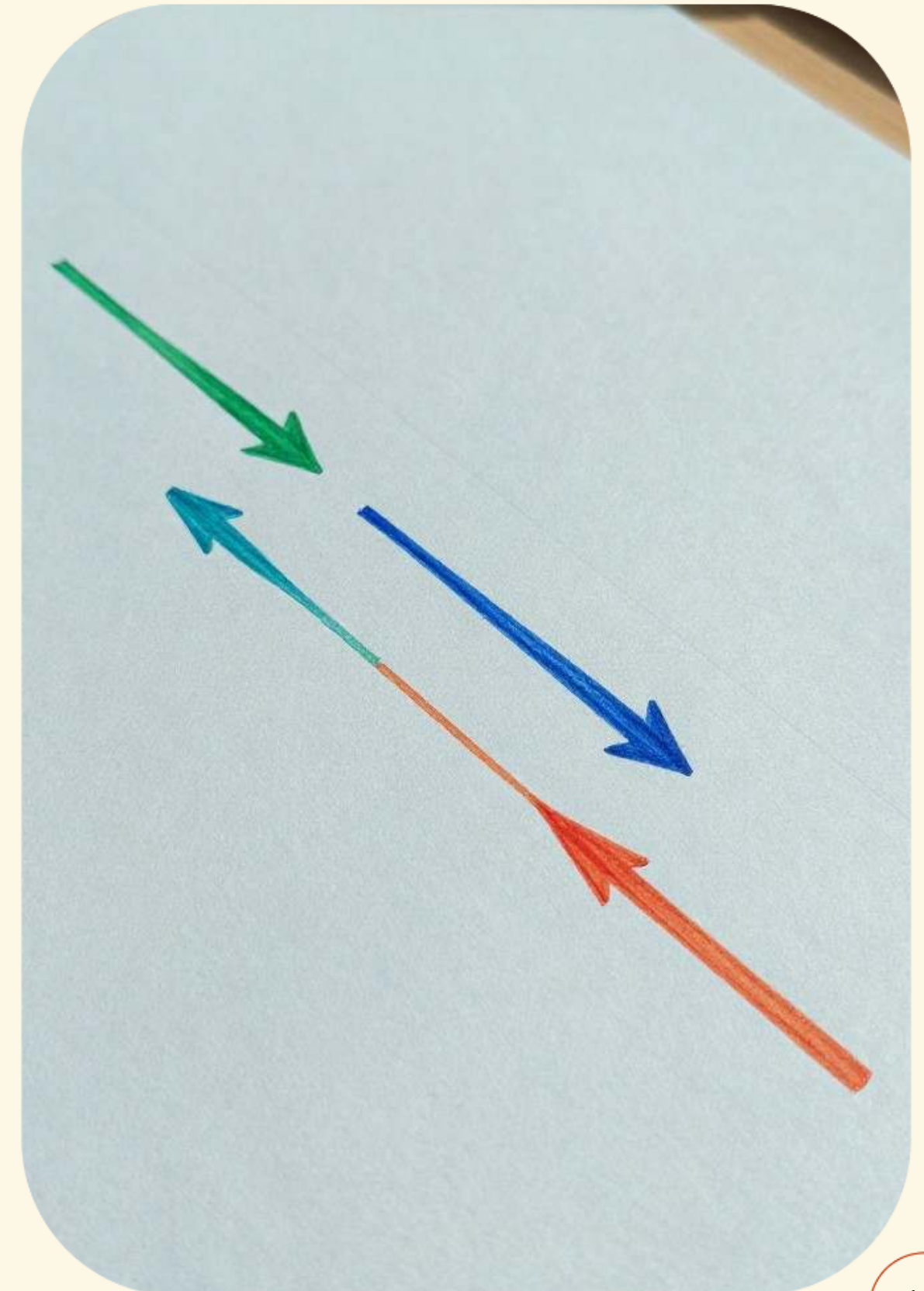
Коллинеарные векторы направлены вдоль одной прямой или вдоль параллельных прямых. На координатах это видно по пропорциональным числам, например $(2,4)$ и $(1,2)$.

Пропорциональные координаты

Если один вектор получается из другого умножением на число, они тоже коллинеарны. Это удобно проверять без рисунка, просто сравнивая отношения координат.

Разное направление

Противоположные векторы имеют одинаковую длину, но смотрят в разные стороны. Например, $(2,3)$ и $(-2, -3)$ отличаются только направлением.



Сравнение векторов по координатам

Сравнивать векторы удобно по координатам: сначала проверяют равенство, затем направление и пропорциональность. Таблица показывает, чем отличаются равные, коллинеарные и противоположные векторы.

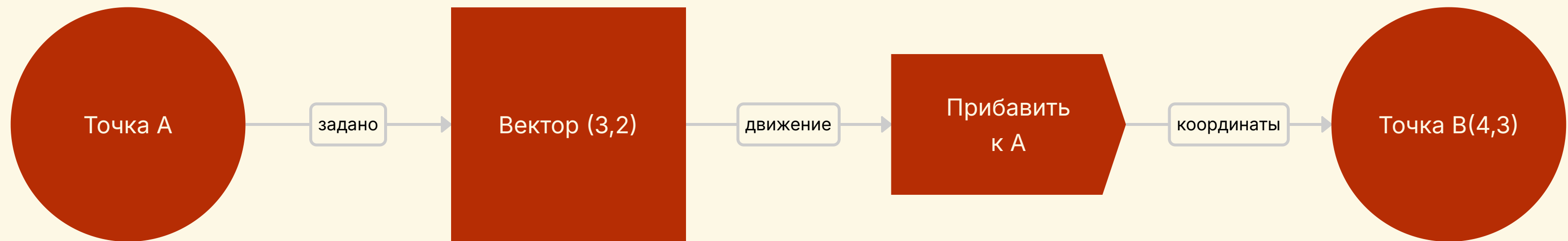
Совпадение координат даёт равенство; пропорциональность указывает на одно направление или его противоположность; знак координат помогает быстро определить вид векторов.

Примеры по координатам из школьной темы векторов

Пара	Сравнение	Вывод
(2,3) и (2,3)	Координаты совпадают	Равны
(2,3) и (4,6)	Пропорциональны	Не равны
(2,3) и (-2,-3)	Противоположны	Разные направления

Как решать задачу на движение

Переход от текста о перемещении к записи через координаты



Последовательное построение

1

Первый шаг

Сначала откладывают первый вектор от начальной точки. Его конец становится новой опорой для следующего шага, поэтому движение читается последовательно и без пропусков.

2

Второй шаг

Затем второй вектор строят от конца первого. Такой способ показывает, как отдельные перемещения складываются в один общий путь на координатной сетке.

3

Общий результат

Итоговый вектор соединяет стартовую и конечную точки. Для $(2,1)$ и $(-1,3)$ получается $(1,4)$, и именно этот отрезок показывает результат.



Что потренировать



Координаты по точкам

Находить координаты вектора по двум точкам нужно особенно аккуратно. Главное — правильно вычитать координаты второй точки из координат первой или наоборот, в зависимости от записи.



Сложение без рисунка

При сложении векторов удобно складывать соответствующие координаты. Это позволяет быстро получить ответ и сразу увидеть, не допущена ли ошибка в знаках.



Масштаб и направление

Умножение на число меняет длину и иногда направление. Если коэффициент отрицательный, вектор разворачивается, поэтому знак нужно проверять в первую очередь.



Вычисление длины

Длину вектора находят по формуле с квадратами координат. Она всегда неотрицательна, поэтому ответ должен быть числом с корнем или целым числом.



Сравнение направлений

Чтобы сравнить направления, смотрят на пропорциональность координат. Если числа совпадают по отношению, векторы коллинеарны; если ещё и знаки противоположны, направление обратное.



Векторы: кратко и полезно

Векторы помогают описывать движение, расстояния и положение точек на плоскости. Если помнить правила координат, задачи становятся понятнее: один рисунок и несколько аккуратных вычислений дают точный ответ.

