

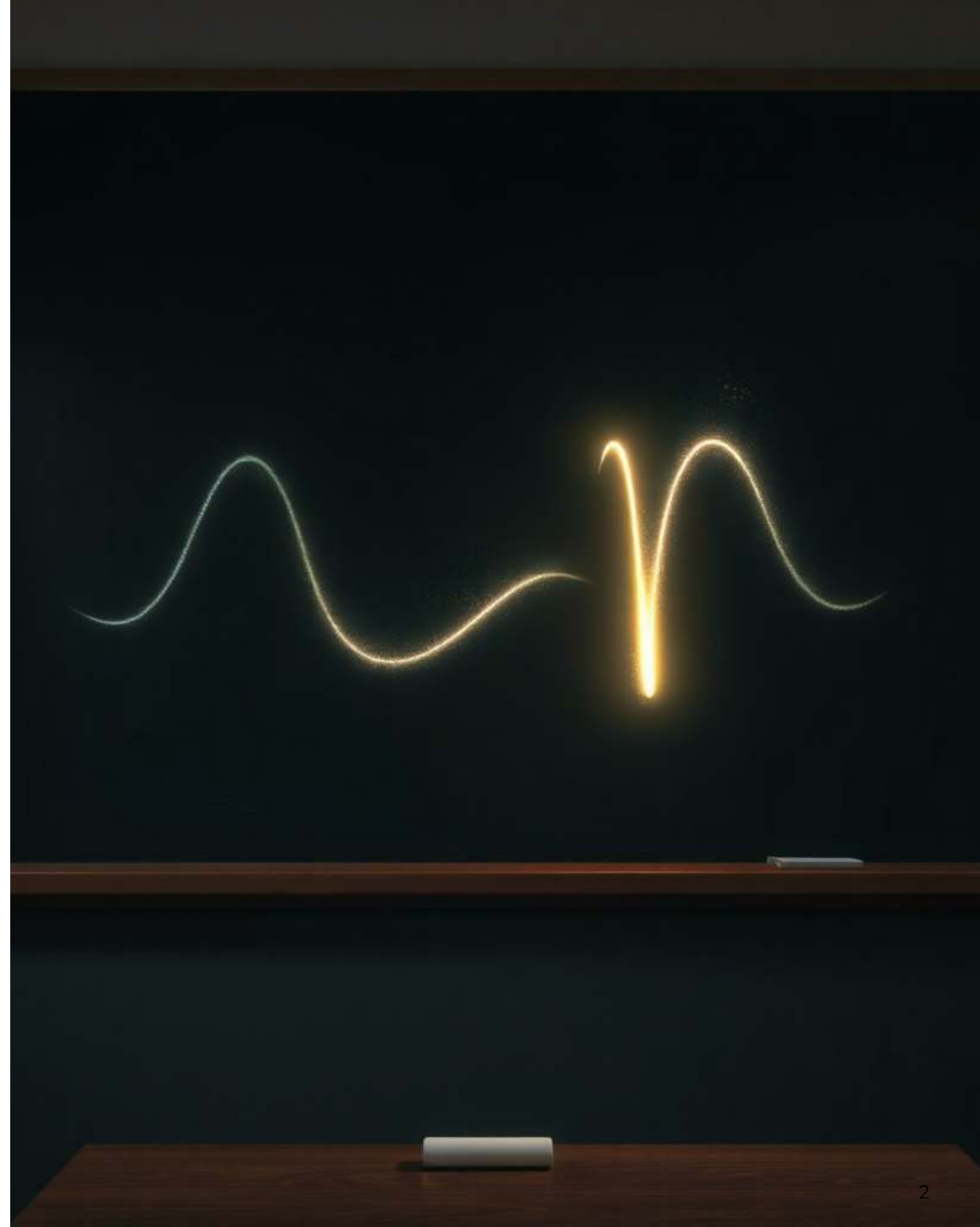
Преобразование суммы $A \cdot \sin x$ и $B \cdot \cos x$ к виду $C \cdot \sin(x+t)$

Как заменить сумму двух тригонометрических функций одной синусоидой



Зачем приводить сумму к одной синусоиде

Выражения вида $A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$ часто встречаются в алгебре и физике. Преобразование к одной функции упрощает исследование графика, поиск экстремумов и решение уравнений, а также помогает увидеть амплитуду и фазовый сдвиг сразу в готовом виде.



Тригонометрическая формула, на которой основан метод

1. Формула суммы

В основе метода лежит тождество $\sin(x+t) = \sin x \cdot \cos t + \cos x \cdot \sin t$, позволяющее выразить сумму двух функций через одно синусоидальное выражение с фазовым сдвигом.

2. Умножение на С

Если умножить это равенство на число C , получится $C \cdot \sin(x+t) = C \cdot \cos t \cdot \sin x + C \cdot \sin t \cdot \cos x$, то есть форма, удобная для сравнения с исходным выражением.

3. Сравнение коэффициентов

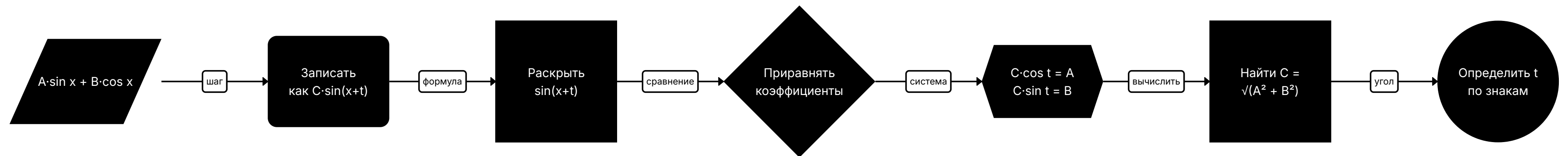
Чтобы записи совпали, коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ должны быть одинаковыми. Отсюда возникают условия $C \cdot \cos t = A$ и $C \cdot \sin t = B$, связывающие новую форму с исходной.

4. Связь параметров

Из этих равенств следует, что число C определяет амплитуду, а угол t задаёт сдвиг графика. Именно так исходная сумма превращается в одну синусоиду без изменения значения.

Алгоритм преобразования выражения

Последовательность действий при записи $A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$ в виде $C \cdot \sin(x+t)$



Сопоставление коэффициентов в двух записях

Таблица показывает, как исходная сумма согласуется с преобразованной формой и какие равенства следуют после раскрытия скобок.

Новая запись полностью эквивалентна исходной: меняется только форма, а не значение выражения.

Элемент	Вид записи	Итог
Исходная форма	$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$	—
Новая форма	$C \cdot \sin(x+t)$	—
После раскрытия	$C \cdot \cos t, C \cdot \sin t$	при $\sin x$ и $\cos x$
Связь параметров	$C = \sqrt{A^2 + B^2}$	$\cos t = A/C, \sin t = B/C$

Тригонометрическое тождество $\sin(x+t) = \sin x \cdot \cos t + \cos x \cdot \sin t$

Геометрический смысл числа С

Длина вектора

Число $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ можно понимать как длину вектора с координатами (A, B) на плоскости. Тогда формула сразу приобретает наглядный геометрический смысл.

Теорема Пифагора

Если построить прямоугольный треугольник с катетами $|A|$ и $|B|$, то C будет его гипотенузой. Поэтому значение C всегда неотрицательно и вычисляется по теореме Пифагора.

Связь с модулем

На величину C влияют только модули коэффициентов: смена знака у A или B не меняет длину. Меняется лишь направление вектора, а не его абсолютная величина.

Как меняется амплитуда С при разных коэффициентах

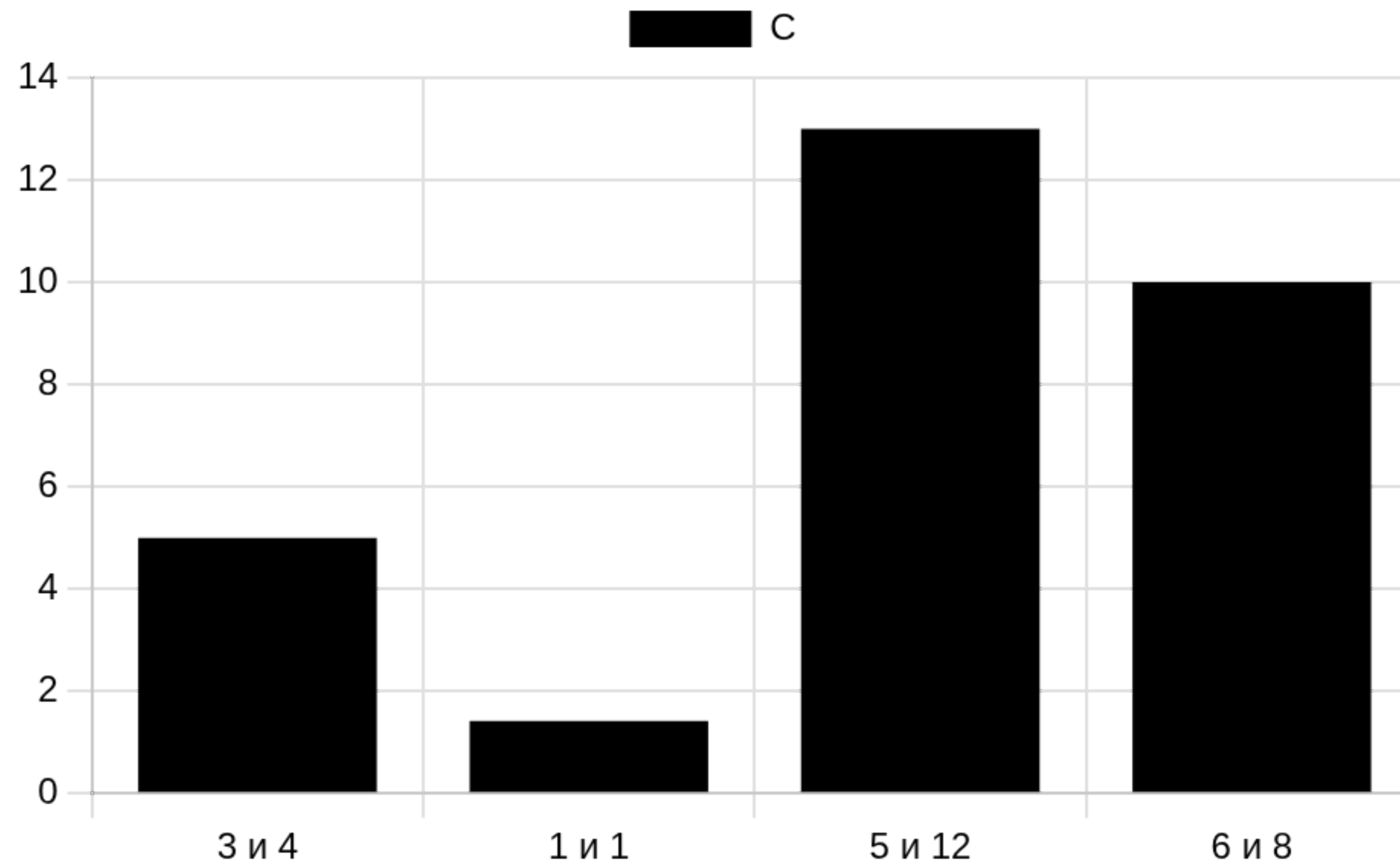


Диаграмма иллюстрирует, что амплитуда определяется не суммой коэффициентов, а их геометрическим сочетанием.

Чем больше модули A и B, тем больше C, но зависимость квадратичная, а не линейная.

Вычисления по формуле $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; примеры: (3,4), (1,1), (5,12), (6,8)

Как находится параметр t

1.

Найти C

Сначала вычисляют $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. После этого удобно перейти к отношениям $\cos t = A/C$ и $\sin t = B/C$, которые задают угол через его тригонометрические значения.

2.

Использовать тангенс

Если $A \neq 0$, можно быстро получить $\tan t = B/A$. Это помогает найти подходящее значение, но само по себе ещё не гарантирует правильную четверть.

3.

Проверить четверть

Один и тот же тангенс соответствует нескольким углам. Поэтому найденный угол обязательно сверяют по знакам $\sin t$ и $\cos t$, чтобы не перепутать расположение.

4.

Учесть знаки

Знаки A и B подсказывают, положительны или отрицательны $\cos t$ и $\sin t$. Именно это позволяет выбрать единственный правильный угол t для итоговой записи.

Знаки коэффицентов и четверть угла t

A	B	Четверть t
+	+	I
-	+	II
-	-	III
+	-	IV

Знаки функций $\sin t$ и $\cos t$ в координатных четвертях

Таблица помогает быстро определить, в какой четверти находится угол t , ориентируясь на знаки коэффицентов A и B .

Знаки A и B однозначно указывают четверть, а при нуле одного из коэффицентов угол определяется отдельно по формулам.

Особые случаи при $A = 0$, $B = 0$ и нулевых коэффициентах

Только синус

Если $B=0$, исходное выражение уже содержит только $\sin x$. Тогда можно взять $C=|A|$, а угол t выбрать равным 0 или π в зависимости от знака A .

Только косинус

Если $A=0$, остаётся $B \cdot \cos x$. Такое выражение тоже сводится к одной синусоиде, но с сдвигом на $\pi/2$ и дополнительным учётом знака B .

Нулевое выражение

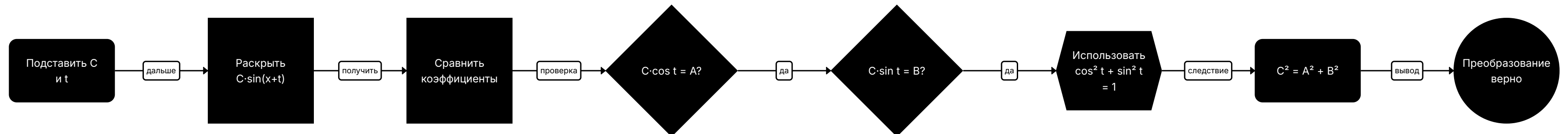
Если $A=0$ и $B=0$, выражение тождественно равно нулю. В этом случае амплитуда C равна 0, а параметр t не влияет на результат.

Проверка формулы

Эти ситуации показывают, что метод работает и в предельных случаях. Даже когда один или оба коэффициента равны нулю, преобразование остаётся корректным.

Проверка правильности преобразования

Последовательная проверка через раскрытие формулы и тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$



A wooden triangle, a glass sine wave, and a pen on a white surface.

Пример 1: $3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x$

Находим амплитуду

По формуле $C = \sqrt{3^2 + 4^2}$ получаем $C = 5$. Это значение задаёт амплитуду новой синусоиды и сразу показывает, насколько велико исходное выражение.

Определяем угол

Из равенств $\cos t = 3/5$ и $\sin t = 4/5$ следует, что угол t лежит в первой четверти. Его знак согласуется с положительными коэффициентами при $\sin x$ и $\cos x$.

Записываем ответ

После подстановки параметров выражение принимает вид $3 \cdot \sin x + 4 \cdot \cos x = 5 \cdot \sin(x+t)$. Новая запись короче и удобнее для исследования графика и экстремумов.

Геометрическая модель

Этому примеру соответствует прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Он наглядно связывает алгебраическое преобразование с теоремой Пифагора и выбором угла t .

Пример 2: $2 \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x$

1. Исходные коэффициенты

Здесь $A = 2$ и $B = -2$, поэтому важно учитывать знак второго коэффициента. Именно он определяет положение угла t и форму итоговой записи.

2. Вычисляем C

По формуле $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ получаем $C = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$. Это и есть амплитуда преобразованной функции.

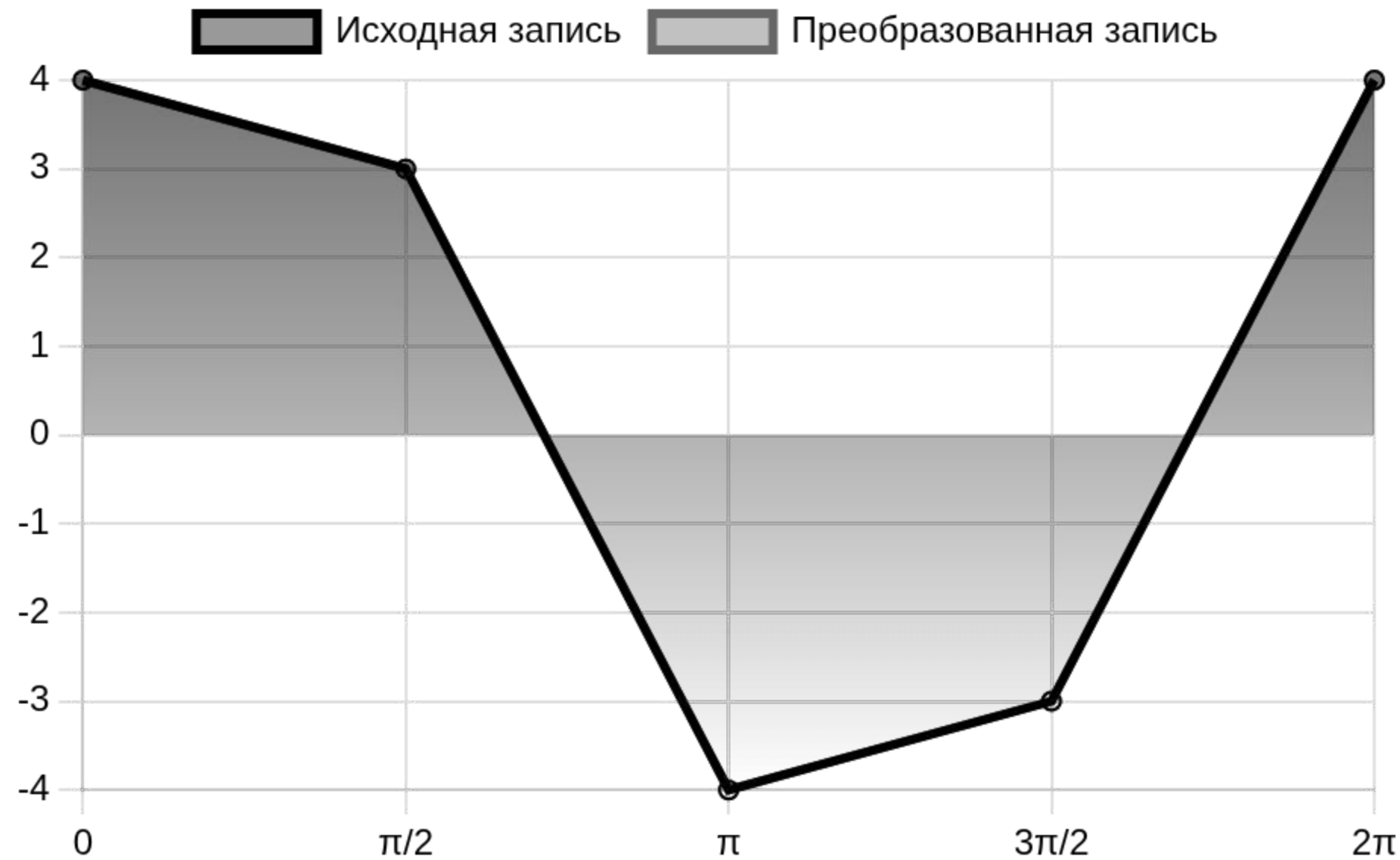
3. Находим угол

Из $\cos t = 1/\sqrt{2}$ и $\sin t = -1/\sqrt{2}$ следует, что t находится в четвертой четверти. Эквивалентно можно записать $t = -\pi/4$.

4. Итоговое равенство

После преобразования получаем $2 \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x = 2\sqrt{2} \cdot \sin(x - \pi/4)$. Такая запись сразу показывает амплитуду и фазовый сдвиг.

График исходной и преобразованной функции



Построение по формуле $3 \sin x + 4 \cos x = 5 \sin(x+t)$, учебный пример

На графике совпадают не только значения функции, но и её амплитуда. Различие между записями заключается лишь в способе представления одной и той же зависимости.

Совпадение кривых подтверждает, что преобразование сохраняет функцию; меняется только форма записи и удобство дальнейшего анализа.

$$\pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

— это пределы значений функции после приведения к виду одной синусоиды.

После преобразования к виду $C \cdot \sin(x+t)$ сразу видны наибольшее и наименьшее значения. Это экономит время при решении задач на экстремумы.

Следует из неравенства $-1 \leq \sin(x+t) \leq 1$

Сравнение исходной и преобразованной формы

Таблица показывает, как меняется запись и почему новая форма удобнее для вычислений и анализа.

Преобразованная запись компактнее и удобнее для исследования графика, а исходная форма полезна лишь для отдельного анализа коэффициентов.

Исходная форма	Преобразованная форма	Удобство
$A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$	$C \cdot \sin(x+t)$	Разделены вклады
Два коэффициента	Одна амплитуда	Компактнее
Сложнее искать экстремум	Сразу видны max/min	Быстрее анализ
Смешанное уравнение	Стандартный вид	Меньше преобразований

Сравнение формы записи тригонометрического выражения

Типичные ошибки при выполнении преобразования

Неверная формула для С

Ошибка возникает, когда пишут $C = A^2 + B^2$ и забывают извлечь квадратный корень. В этом случае амплитуда получается завышенной и противоречит проверке по коэффициентам.

Неправильная четверть

Одного значения тангенса недостаточно: одинаковое отношение может соответствовать разным четвертям. Поэтому знак А и В нужно учитывать до окончательного выбора угла t .

Игнорирование знака минус

При $B < 0$ легко потерять отрицательный знак при вычислении $\sin t$. Тогда фазовый сдвиг будет выбран неверно, а график окажется смещённым неправильно.

Подмена угла $\arctan$

Запись $t = \arctan(B/A)$ допустима только как промежуточный шаг. Без проверки по знакам коэффициентов она не гарантирует правильную четверть и может дать ошибочный ответ.

Особые случаи

Если $A = 0$ или $B = 0$, нужно отдельно рассмотреть вырожденную ситуацию. Формальные вычисления по общей схеме здесь часто приводят к лишним или неверным шагам.

Применение метода при решении уравнений

Сведение смешанного тригонометрического уравнения к стандартному виду через одну синусоиду



Практическая ценность метода в алгебре и смежных областях

1.

Алгебра 10 класса

Метод соединяет тождественные преобразования с анализом графиков и экстремумов. Он помогает увидеть, как одна и та же функция может быть записана по-разному без изменения смысла.

2.

Гармонические колебания

В физике и технике сумма синуса и косинуса часто описывает колебательный процесс. Преобразование к одной синусоиде позволяет сразу выделить амплитуду и фазу сигнала.

3.

Периодические модели

При математическом моделировании периодических явлений компактная запись упрощает вычисления и интерпретацию результатов. Это особенно важно, когда требуется сравнивать разные режимы поведения.

4.

Универсальный приём

Замена двух тригонометрических функций одной синусоидой сокращает число шагов в вычислениях. Поэтому приём полезен не только в школьных задачах, но и в более широких прикладных контекстах.

Одна синусоида вместо суммы двух функций

Преобразование $A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$ к виду $C \cdot \sin(x+t)$ делает выражение компактным, сохраняет его значение и сразу открывает путь к анализу графиков, экстремумов и уравнений.