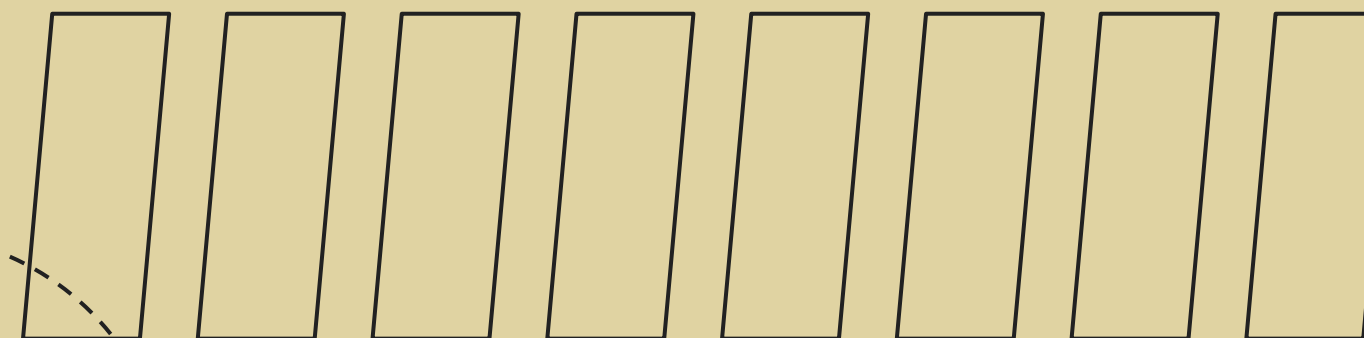


Векторы на плоскости: направление и длина

Вектор на плоскости — направленный отрезок: он «показывает», куда ✦ и как далеко.



Зачем в 7 классе нужны векторы



Векторы описывают перемещение: от одной точки к другой. Они встречаются на карте, в чертежах и в задачах на координатной плоскости, где важны не только размеры, но и направление движения.



Что нужно знать про вектор с первого взгляда

				
Начало и конец У вектора есть начало и конец: стрелка показывает, откуда начинается движение и куда оно направлено. Поэтому один и тот же отрезок может быть «разным» в зависимости от направления.	Длина вектора Длина отражает, насколько далеко направлено движение. Нулевой вектор имеет длину 0: его «острия» не смещают точку ни в какую сторону.	Обозначение стрелкой Вектор часто обозначают стрелкой над буквами или одной маленькой буквой, например $\vec{AB}$ или a . Такая запись помогает быстро понимать, какой именно отрезок рассматривают.	Равные и противоположные Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление, даже если расположены в разных местах. Противоположные — одинаковые по длине, но направлены в разные стороны.	

Как выглядит вектор на рисунке

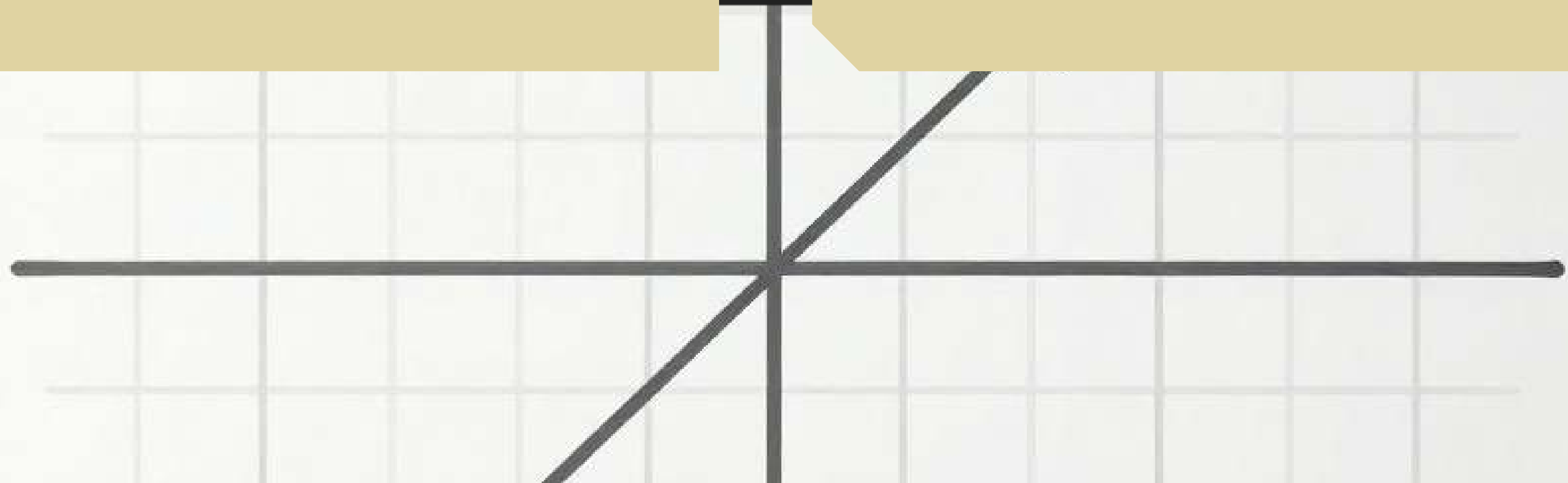


Стрелка между двумя точками

Вектор изображают стрелкой: начало стрелки показывает старт движения, а острей — направление. При этом важны именно точки начала и конца, а не просто длина отрезка.

Как рисовать вектор по клеткам

На координатной плоскости вектор удобно строить по клеткам: видно его горизонтальную и вертикальную составляющие. Обычно на рисунке есть оси, масштаб, подписи точек и сама стрелка.



Основные понятия темы

В терминах легко запутаться, поэтому свяжем определения с короткими примерами на чертежах и координатной плоскости.

Когда вы связываете рисунок, обозначения и числа, решение становится короче и точнее.

Термин	Коротко и с примером
Вектор	Направленный отрезок: $\overrightarrow{AB}$, где стрелка идёт от A к B .
Нулевой вектор	Имеет длину 0 и не имеет направления: например, $(0;0)$ или $\overrightarrow{AA}$.
Равные векторы	Совпадают по длине и направлению: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если обе стрелки одинаково «смотрят».
Противоположные векторы	Одинаковая длина, но обратное направление: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.
Длина вектора	Число, показывающее «масштаб» движения: можно найти по координатам, не измеряя линейкой.
Координаты вектора и вывод	Координаты задают смещение по осям: $(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Один и тот же вектор можно описать рисунком, буквами и числами.

Из каких признаков состоит вектор



Длина и направление задают «суть» вектора. Начало, конец и координаты нужны, чтобы правильно изобразить его и выполнять сравнения.



С практической точки зрения: сначала смотрим длину и направление, затем используем начало/конец и координаты для вычислений.

Длина Направление Начало Конец
Координаты



Вычислительная опора курса: свойства векторов
(школьная математика, 7 класс)

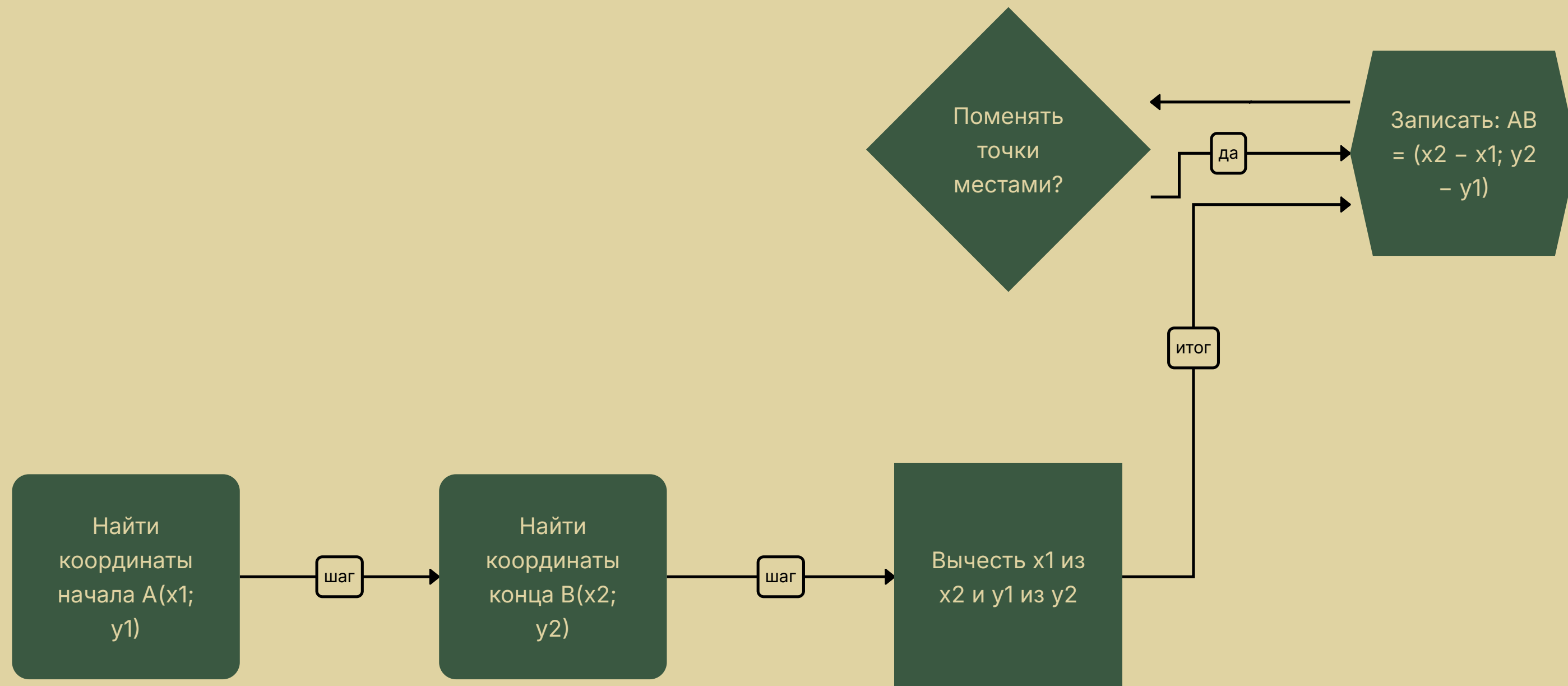
**Для вектора (3; 4)
длина получается
равной 5**

Число 5 получается при подстановке координат в формулу длины:
 $3^2 + 4^2 = 25$, значит $\sqrt{25} = 5$. Это показывает, что измерять линейкой не нужно.

5

Как найти координаты вектора по точкам

✕ Связь между чертежом и числовой записью через разности координат



Длина вектора по координатам

01

Если у вектора координаты $(x; y)$, то его длина равна $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это следует из теоремы Пифагора: горизонталь и вертикаль образуют прямой угол.

02

Пусть дан вектор $(3; 4)$. Тогда $|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Значит, длину можно вычислить точно по числам.

03

Такой подход особенно удобен в задачах на клетчатой бумаге и координатной плоскости: не нужно измерять отрезок линейкой и можно быстро проверять результаты.

Сравнение длин нескольких векторов

У векторов $(1; 2)$ и $(-2; 2)$ длины разные, а $(3; 4)$ и $(0; 5)$ имеют одинаковую длину 5, хотя направления могут отличаться.

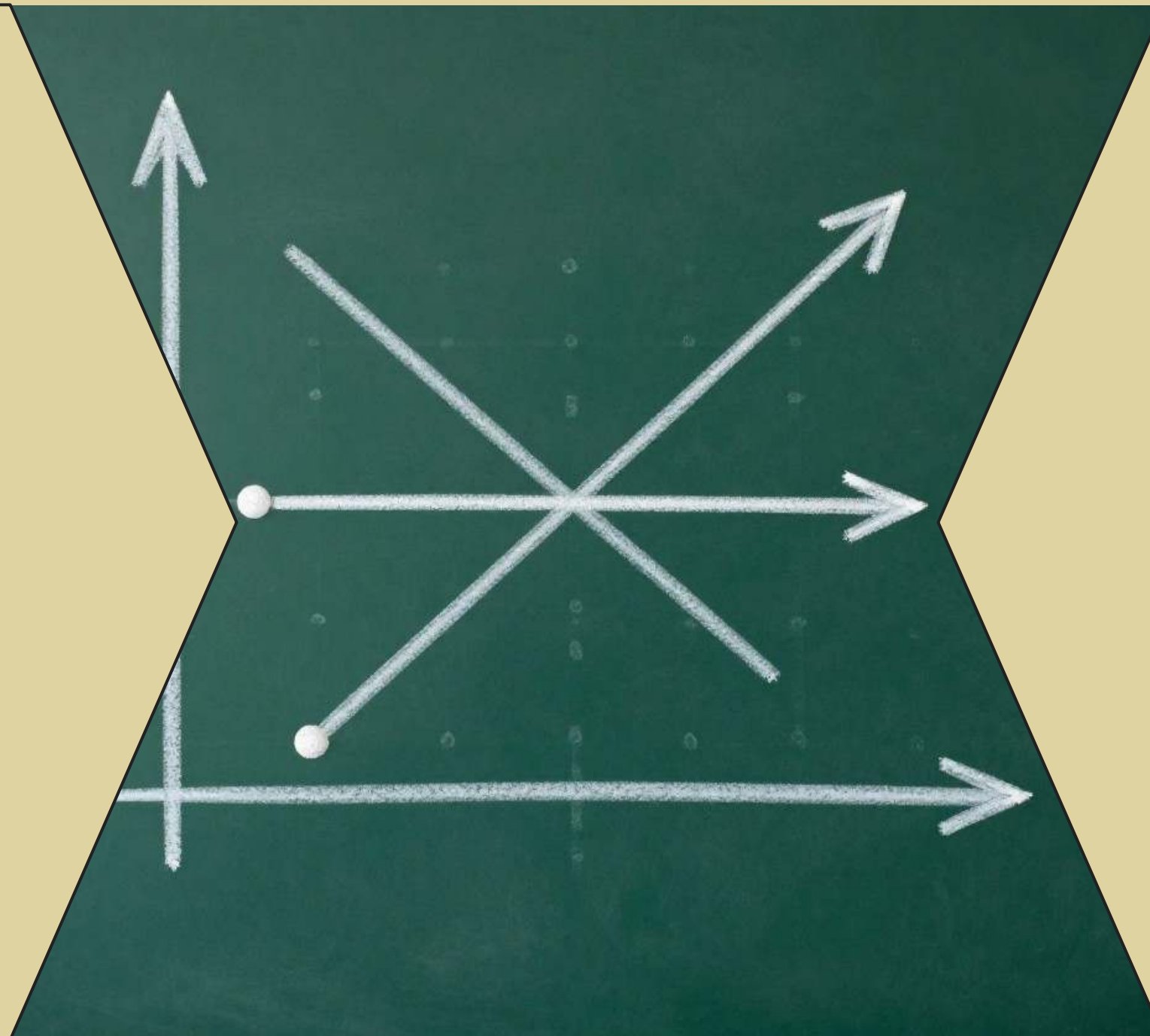
Координаты позволяют сравнить длины численно, но равная длина ещё не означает совпадение направления.



Вычисления по формуле $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Равные и противоположные векторы

- ▶ Равные векторы имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Их можно располагать в разных местах рисунка: при этом стрелки будут «совпадать» по смыслу, хотя начальная и конечная точки разнятся.



▶ Противоположные векторы равны по длине, но направлены в разные стороны. На рисунке удобно сравнивать пары параллельных стрелок одной длины: AB и CD — равные, а AB и BA — противоположные.

Сложение векторов

01

Чтобы сложить векторы, используют правило треугольника: к концу первого вектора мысленно прикладывают начало второго. Тогда сумма изображается вектором, который идёт от начала первого к концу второго.

02

Векторная сумма показывает «итоговое перемещение» после двух последовательных шагов: сначала движение по первому вектору, затем — по второму. Поэтому она помогает находить общий путь в задачах, где направление меняется.

03

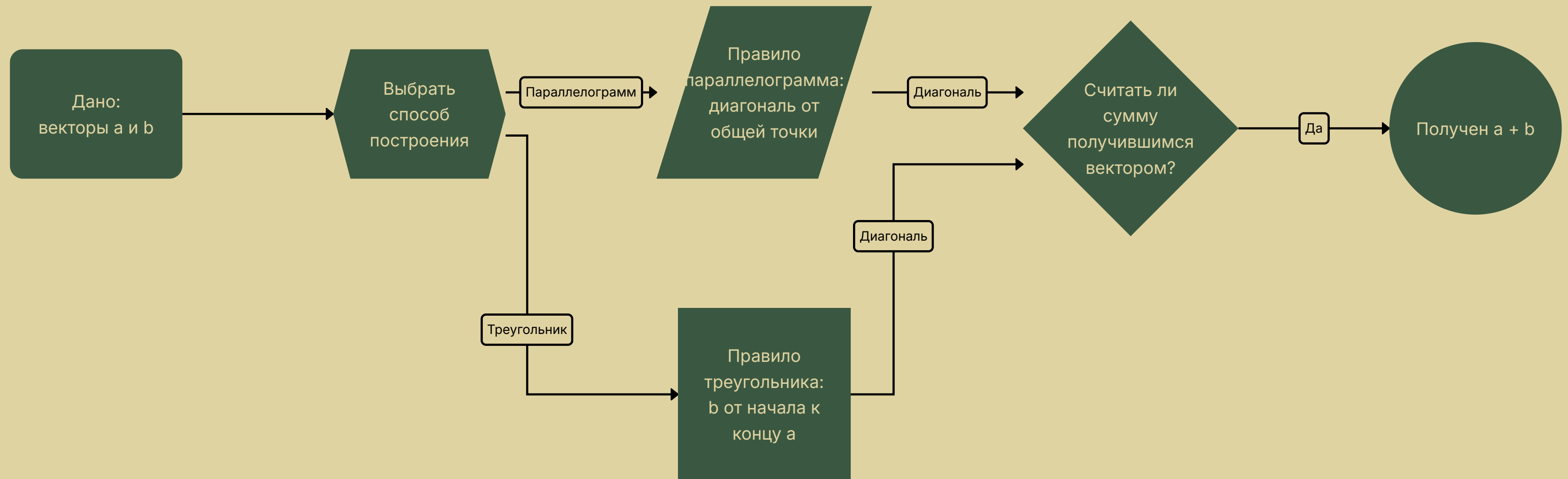
Можно также применять правило параллелограмма: из одной точки откладывают два вектора, а их суммой считают диагональ параллелограмма. Этот способ особенно удобен на клетчатой бумаге.

04

Оба правила дают один и тот же результат, поэтому можно выбирать вариант, который проще построить по рисунку. В вычислениях это соответствует сложению координатных разностей по осям.

Как построить сумму двух векторов

✗ Два способа построения: правило треугольника и правило параллелограмма – приводят к одному и тому же вектору



Вычитание векторов — через противоположный



Переход к сложению
Вычитание сводят к сложению: $a - b = a + (-b)$. Это означает, что вместо вычитания нужно добавить вектор, который «направлен наоборот» относительно b .



Меняется направление второго
При такой замене направление второго вектора обязательно меняется на противоположное. Поэтому разность показывает, как отличается одно перемещение от другого по направлению и величине.



Зачем это нужно в задачах
Формула удобна, когда нужно сравнить два пути, найти разность координат или определить итоговое смещение между начальной и конечной точками движений.

Действия с векторами и их смысл

✕ Таблица показывает основные действия над векторами и то, как их понимать на чертеже.

✕ Правила действий над векторами связывают чертёж и координаты: разность превращается в сложение, а длина определяется формулой модуля.

Действие	Смысл и запись/пример
Сложение	$a + b$ — итоговое перемещение; треугольник/параллелограмм (например, два шага подряд).
Вычитание	$a - b = a + (-b)$; значит вычесть — это добавить противоположное движение.
Умножение на число	$k \cdot a$: при $k > 0$ направление сохраняется, длина меняется (например, $2 \cdot a$ вдвое длиннее).
Длина	$ a $ — расстояние, связанное с координатами; длина не зависит от направления (как модуль).
Вывод	Работа с векторами возможна и на рисунке, и в вычислениях по правилам.

Материал курса «Векторы на плоскости»,
базовые операции с направленными отрезками

Что происходит при умножении вектора на число



При умножении положительного числа вектор «растягивается» или «сжимается», оставаясь в том же направлении. Умножение на -1 меняет направление, а на 0 превращает его в нулевой.



Знак и величина множителя управляют направлением и длиной: модуль меняется в $|k|$ раз, а ориентация определяется знаком k .



Графическая интерпретация правил из школьной темы о векторах (без привязки к конкретным координатам)

Векторы в задачах на плоскости

Шаг 2: найти итоговое смещение

Когда шагов несколько, записывают их как векторы и находят сумму. По рисунку применяют треугольник или параллелограмм, а координаты удобно складывать по осям.

Шаг 1: описать движение

В задачах вектор задаёт перемещение точки: например, движение по клеткам на координатной сетке. Начало стрелки соответствует стартовой позиции, а конец — финишу.

Шаг 3: связать рисунок и ответ

Геометрические задачи сводят к координатам: неизвестную сторону или положение точки ищут через длину и разность координат. Такой подход делает запись короче и проверяемой.

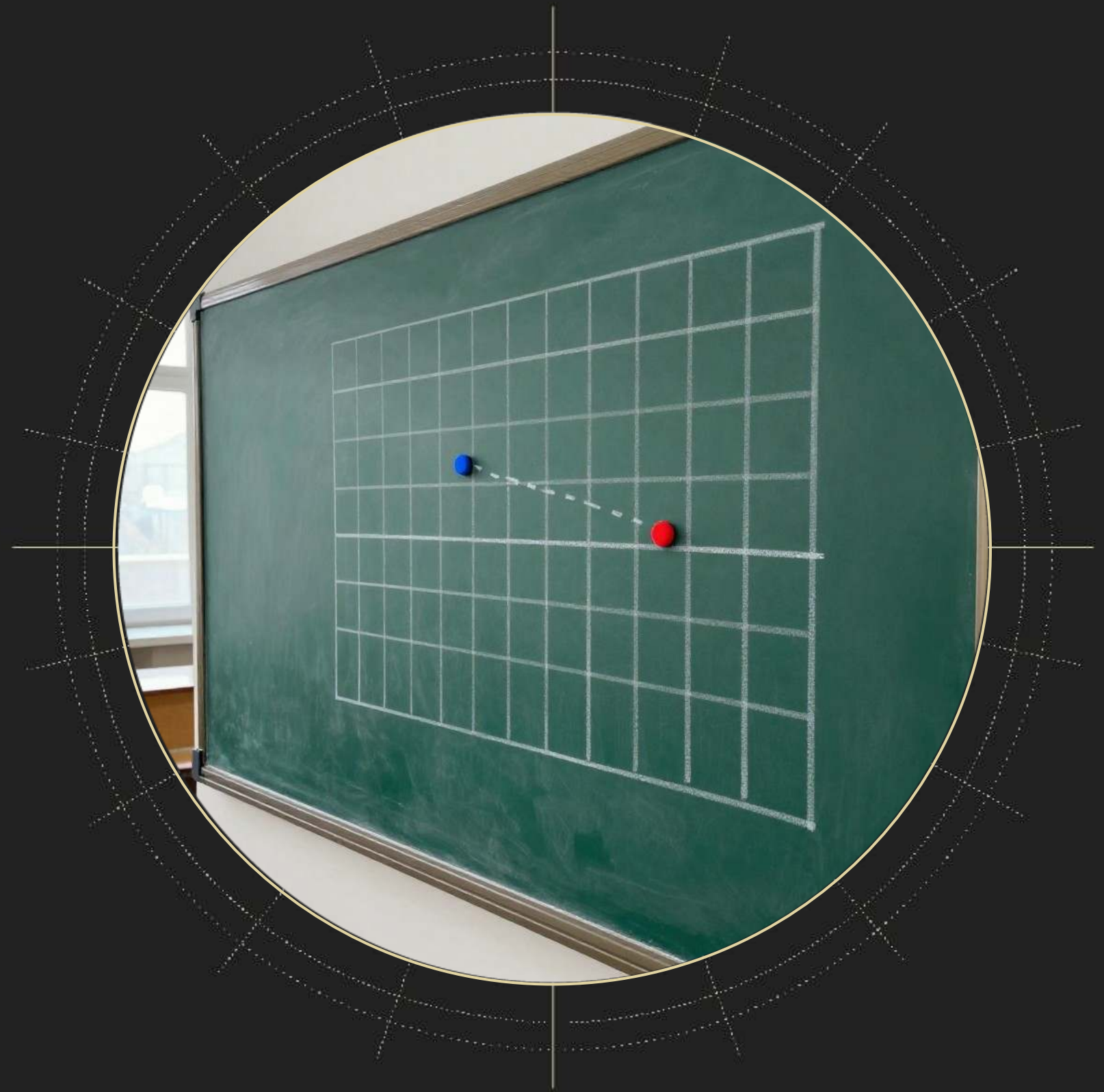
Связь координат точки и координат вектора

01

Координаты вектора можно получить как разность координат конца и начала. Если известна начальная точка и вектор перемещения, то конечную точку находят, прибавляя координаты вектора к координатам начала, по осям.

02

На сетке это видно наглядно: стрелка показывает, на сколько клеток нужно сместиться по горизонтали и вертикали. Такой приём используют, когда после заданного перемещения нужно построить новую точку на плоскости.



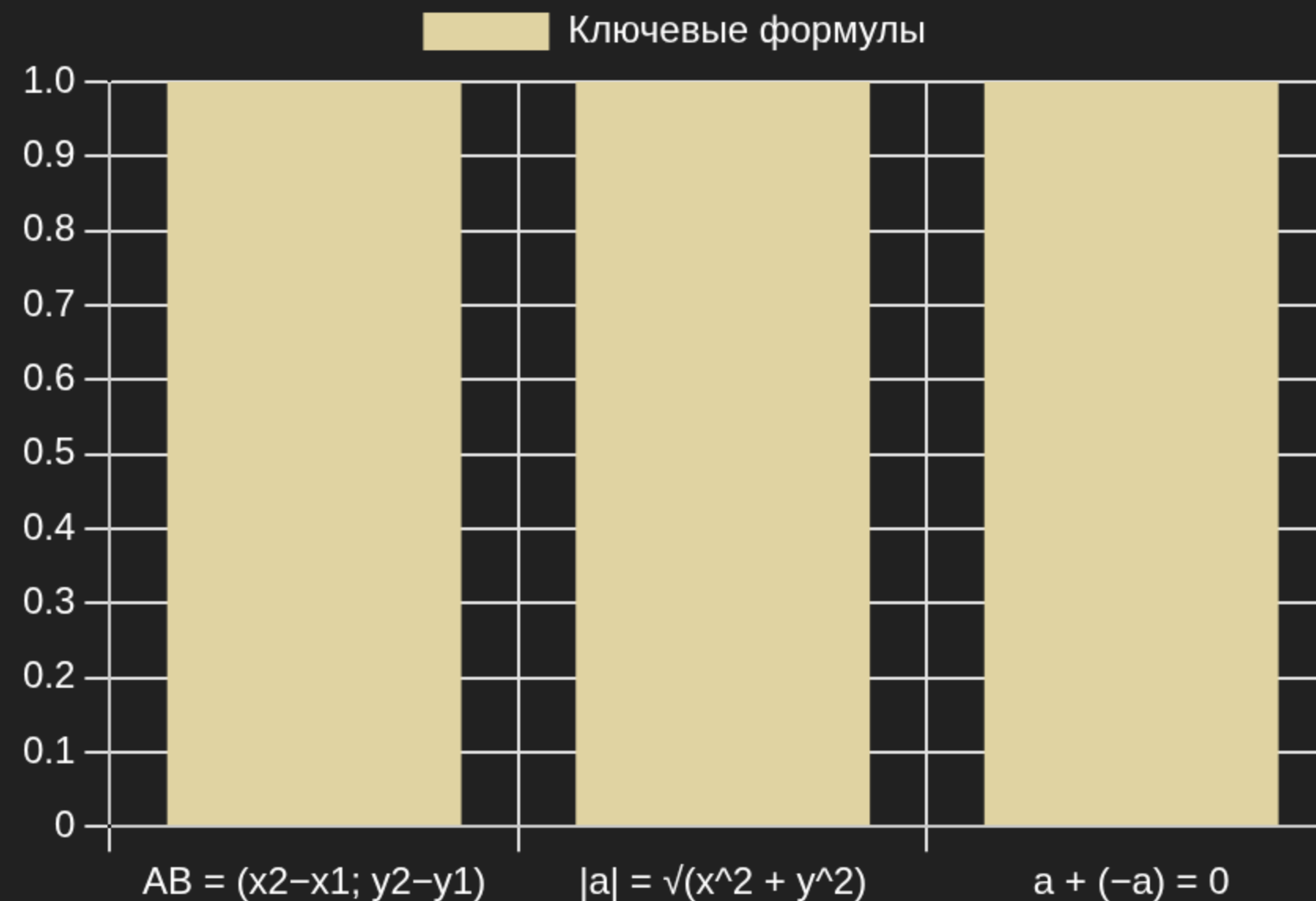
Главные формулы темы



Формулы связывают геометрию и числа: координаты вектора задают его перемещение, длина выражает «масштаб», а противоположный вектор компенсирует движение полностью.



Если помнить три записи – разность координат, формулу длины и компенсацию противоположным вектором – можно аккуратно выполнять вычисления и проверять рисунок.



Конспект и формулы школьного курса по теме «Векторы на плоскости»

Коротко о главном

- Вектор — это направленный отрезок с длиной и направлением. Равные векторы совпадают по длине и направлению, а противоположные одинаковы по длине, но направлены в разные стороны. Координаты помогают находить длину, сумму и разность.

